Fenomenología de Gravitación Cuántica

Fiz1410-Primer Semestre 2008

Prof. Jorge Alfaro S.

Examen

Lunes 23 de Junio de 2008

- Problema 1

Fije unidades de tal manera que:$4\pi\gamma l_P^2 = 1$, con γ el parámetro de Barbero-Immirzi y l_P la longitud de Planck.

El autovalor del operador área es:

$$A = 2\sum_p \sqrt{j_p(j_p+1} \tag{1}$$

Sea s_j el número de intersecciones del espín network con la superficie de área A(punctures), que llevan espín j. Se tiene:

$$A = 2\sum_j s_j\sqrt{j(j+1} \tag{2}$$

Considere una configuración con s_j dado.

(A) Encuentre los estados cuánticos permitidos para este s_j, debido a las proyecciones del espín en la dirección z (m).Llame a este número de estados $d_1(s_j)$.Indic.: Son s_j cajas idénticas, llenas con la degeneración debido a m de bolas distinguibles.

Sol:

$$d_1 = \prod_j (2j+1)^{s_j}$$

Como las "punctures" son distinguibles, se pueden elegir de un número de formas equivalentes dado por:

$$d_2 = \frac{(\sum_j s_j)!}{\prod_j s_j!} \tag{3}$$

La entropía del agujero negro con horizonte A está dado por la fórmula de Boltzmann:

$$S = \ln(N),\, N = \prod_j d_1(s_j)\, d_2, \text{sometidos al vínculo (2)}$$

(B) Encuentre el valor asintótico de N para A dado, maximizando $\ln(N)$ como función de s_j, sometidos al vínculo (2).Suponga que $s_j \gg 1$.

Sol:

$$F = \sum_j (s_j \ln(2j+1) - \ln(s_j!)) + \ln(\sum_j s_j)! \quad + \lambda(A - 2\sum_j s_j \sqrt{j(j+1)})$$

$$\text{Stirling: } n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$

$$F = \sum_j (s_j \ln(2j+1) - s_j \ln(s_j) + s_j - \frac{1}{2}\ln(s_j)) \quad + \lambda(A - 2\sum_j s_j \sqrt{j(j+1)})$$

$$+ \sum_j s_j \ln(\sum_j s_j) - \sum_j s_j + \frac{1}{2}\ln(\sum_j s_j)$$

$$\ln(2j+1) - \ln(s_j) - 2\lambda\sqrt{j(j+1} \quad + \ln(\sum_j s_j) = 0$$

$$B = \sum_j s_j$$

$$s_j = B(2j+1)e^{-2\lambda\sqrt{j(j+1}}$$

$$1 = \sum_j (2j+1)e^{-2\lambda\sqrt{j(j+1}}$$

(C) Compare su resultado con la fórmula de la entropía semiclásica:

$$S_{\text{BH}} = \frac{1}{4}\frac{A}{l_P^2} \tag{4}$$

Encuentre γ

Sol:

$$F \sim B \sum_j \Bigg((2j+1)\ln(2j+1)e^{-2\lambda\sqrt{j(j+1}} - (2j+1)e^{-2\lambda\sqrt{j(j+1}} ln((2j+1)e^{-2\lambda\sqrt{j(j+1}})) -$$
$$B\ln(B) + B\ln(B) \sim B\sum_j 2\lambda(2j+1)\sqrt{j(j+1}e^{-2\lambda\sqrt{j(j+1}} = 2\lambda\sum_j s_j\sqrt{j(j+1} = \lambda A$$

Esto es:

$$S = \lambda A = \lambda\frac{A}{4\pi\gamma l_P^2}, \gamma = \frac{\lambda}{\pi}$$

- Problema 2

De LQG y otros métodos se abre la posibilidad de violar Lorentz, debido a que las partículas tiene velocidades máximas (mav)distintas.Esto es:

$$E_i^2 = c_i^2 p^2 + m_i^2, \text{para la} < \text{partícula}\, i$$

(A) Considere el proceso $\gamma \to e^+ + e^-$, con $c_\gamma > c_-$. Encuentre la energía mínima (umbral) del fotón para que este proceso sea posible.

(B) Considere el proceso $\pi_0 \to \gamma + \gamma$, con $c_\gamma > c_\pi$. Encuentre la energía mínima del pión para que esta reacción se prohiba.

Sol:

$$(A) \qquad p_\gamma = p_- + p_+, E_\gamma \geq \min(E_- + E_+)$$

Esto es: $v_- = v_+$, con lo cual, $p_- = p_+$,

$E_\gamma^2 \geq 4E_-^2$, $(c_\gamma^2 - c_-^2)p_\gamma^2 \geq 4m_e^2$,

$$E_\gamma \geq \frac{\sqrt{2}m_e}{\sqrt{c_\gamma - c_-}}$$

$(B) p_\pi = 2p_\gamma$, $E_\pi^2 \geq 4E_\gamma^2$, $c_\pi^2 p_\pi^2 + m_\pi^2 \geq c_\gamma^2 p_\pi^2$,

$$p_\pi \leqslant \frac{m_\pi}{\sqrt{2(c_\gamma - c_\pi)}} \quad \text{, or} \quad E_\pi \leqslant \frac{m_\pi}{\sqrt{2(c_\gamma - c_\pi)}} \text{ permite la reacción}$$

La reacción esta prohibida para $E_\pi \geq \dfrac{m_\pi}{\sqrt{2(c_\gamma - c_\pi)}}$

- Problema 3

LQG en el límite semiclásico, predice la ecuación de ondas para una partícula de espín $\frac{1}{2}$ dada por:

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar\hat{A}\vec{\sigma}\cdot\nabla + \frac{\hat{C}}{2\mathcal{L}}\right]\xi(t,\vec{x}) + m(\alpha - \beta i\hbar\vec{\sigma}\cdot\nabla)\chi(t,\vec{x}) = 0,$$

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar\hat{A}\vec{\sigma}\cdot\nabla - \frac{\hat{C}}{2\mathcal{L}}\right]\chi(t,\vec{x}) + m(\alpha - \beta i\hbar\vec{\sigma}\cdot\nabla)\xi(t,\vec{x}) = 0,$$

con $\chi(t,\vec{x}) = i\sigma_2\xi^*(t,\vec{x})$

(A) Despeje $\chi(t,\vec{x})$ y encuentre una ecuación de segundo orden para $\xi(t,\vec{x})$.

Sol: $\chi = -\frac{1}{m}\frac{1}{\alpha - \beta i\hbar\vec{\sigma}\cdot\nabla}\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar\hat{A}\vec{\sigma}\cdot\nabla + \frac{\hat{C}}{2\mathcal{L}}\right]\xi$

$$\left(\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar\hat{A}\vec{\sigma}\cdot\nabla - \frac{\hat{C}}{2\mathcal{L}}\right]\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar\hat{A}\vec{\sigma}\cdot\nabla + \frac{\hat{C}}{2\mathcal{L}}\right] - m^2(\alpha - \beta i\hbar\vec{\sigma}\cdot\nabla)^2\right)\xi(t,\vec{x}) = 0$$

(B) Escriba las soluciones de energía positiva y negativa:

$$W(\vec{p},h)e^{-\frac{i}{\hbar}Et + \frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}, \quad W(\vec{p},h)e^{\frac{i}{\hbar}Et - \frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}},$$

donde los espinores $W(\vec{p},h)$ son autoestados de la helicidad $(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})$ con $s = \pm 1$

Encuentre la relación de dispersión, $E(\vec{p},s)$.

Sol: $E_\pm = \sqrt{(A^2 + m^2\beta^2)|\vec{p}|^2 + m^2\alpha^2 + \left(\frac{C}{2\mathcal{L}}\right)^2 \pm B|\vec{p}|}$, $B = A\frac{C}{\mathcal{L}} + 2\alpha\beta m^2$

$$\left(-\frac{C}{2\mathcal{L}} + E - psA\right)\left(\frac{C}{2\mathcal{L}} + E + psA\right) - m^2(\beta ps + \alpha)^2 = 0$$

$$E^2 = (psA + \frac{C}{2\mathcal{L}})^2 + m^2(\beta ps + \alpha)^2$$