Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
Departamento de Física

Delta Gravity Clásica Esféricamente Simétrica

por

Camilo Miguel Ch.

Informe de práctica presentado a la Facultad de Física de la Pontificia Universidad Católica de Chile, como requisito para optar al grado académico de Licenciado en Física.

Profesor Guía : Dr. Jorge Alfaro
Comisión Examinadora : Dr. Leopoldo Infante
Dr. Andres Gomberoff

Julio de 2010
Santiago – Chile

A mi MamaDua y a mi Yeye, se que están en algún lugar de este inmenso Universo, las extraño, pero ya tendremos oportunidad de volver a encontrarnos

Agradecimientos

Ante todo agradecer a Ricardo Avila por toda la ayuda brindada en este trabajo, sus valiosas explicaciones y su gran disposición. Agradezco también a mi profesor guía Jorge Alfaro, por aceptar trabajar conmigo, sabiendo de mis falencias matemáticas, por su paciencia y motivación. Quiero agradecer a Marco Aurelio Díaz y a Marcelo Loewe, al primero que sin saberlo me enseño que lo que no nos mata nos hace más fuertes, a perseverar y seguir adelante, y al segundo por su magnífica claridad para explicar cada uno de los ramos que dicta. Como no agradecer a mi familia, quienes son los responsables de mis inquietudes intelectuales, a mi polola Karim, por regalonearme cuando me estresaba, y a mis amigos por escuchar una y otra vez mis voladas, sin entender muchas veces, pero estando ahí igualmente.

Índice general

Resumen

Este trabajo consiste principalmente en el estudio del modelo Delta Gravity, recientemente desarrollado en nuestra universidad. Reproducimos y verificamos sus ecuaciones, comentando algunos de sus recientes avances para finalmente intentar encontrar la solución de sus ecuaciones en un problema concreto, asumiendo simetrías esféricas, fluidos perfectos y densidades constantes, o en otras palabras, buscando la solución para estrellas con densidad uniforme que en un posterior análisis podrá generar alguna predicción falseable para el modelo.

Capítulo 1

Introducción

El estudio del universo en sí mismo es algo maravilloso e impresionante, preguntas sobre su origen y su evolución son interrogantes que el hombre se ha planteado desde sus primeros pasos y a cientos de años de ello, aun quedan muchas incógnitas. El esfuerzo ha sido inmenso y si bien se ha logrado comprender mucho de nuestro mundo, a cada paso aparecen más preguntas y mas interrogantes por resolver, como si el universo jugara con nosotros, cuando creemos comprenderlo casi todo aparecen nuevas pistas que nos dejan con las sensación de no saber nada.

Este es el caso de la física actual, mucho se ha avanzado pero hoy nos encontramos con varios problemas, entre ellos:

1. Encontrar una explicación de la expansión acelerada del universo, descubierta por dos grupos independientes [1],[2] y explicar la mayor cantidad de masa que las curvas de rotación de galaxias predicen [3],conocido como problema de la masa desaparecida.Hasta ahora se explica lo primero con la denominada energía oscura y lo segundo con la materia oscura, sin embargo el problema es el mismo pintado de otra forma: ¿Que es la energía y la materia oscura?. Por ahora solo sabemos, que

en caso de existir, la energía oscura representaría cerca del 76 % [4],[5] de nuestro universo y la materia oscura cerca del 20 % [5].

2. Por otro lado tenemos la, hasta ahora, incompatibilidad (CITA::::) de las dos teorías mas grandes de la física moderna, la Relatividad General y la Mecánica Cuántica, una trata de los fenómenos a escala muy grande y la segunda de los fenómenos a escalas muy pequeñas. Sin embargo la necesidad de explicar ciertos fenómenos gravitacionales a una escala muy pequeña, nos demandan una unificación de ellas, o dicho de otra manera, necesitamos encontrar una teoría de la Gravitación Cuántica.

Muchos otros problemas, se pueden encontrar en la actualidad, pero estos dos son los que motivan el desarrollo de esta tesis, que sirve como una inocente aproximación a estos dos grandes desafíos de la naturaleza. Y digo que sirve como aproximación, porque este trabajo solo incluye una ínfima parte de todo el estudio que estos problemas involucran, pero nos sirve de introducción a posteriores investigaciones que busquen solucionar estas interrogantes, además, personalmente me inclino a creer que una teoría de la Gravedad Cuántica debería poder explicar(CITA:::: en caso de existir) tanto los fenómenos de aceleración en la expansión del universo, como el problema de la masa desaparecida en las curvas de rotación de las galaxias, y esto podría ser prescindiendo de la denominada energía y materia oscura o explincado que son realmente estas dos denominaciones y sus comportamientos. Así aparecen dos posibilidades generales[3],[5]:

- Entender la naturaleza de la Energía oscura y la Materia oscura.
- Modificar la Teoría General de la relatividad o ser reemplazada por una más completa.

En este marco se soporta nuestro trabajo que busca estudiar una parte del modelo denominado Delta Gravity, recientemente desarrollado con la intención de solucionar las interrogantes planteadas por nuestro propio universo. Este estudio será en un limite clásico, y no debemos esperar la solución a las interrogantes planteadas (como motivación), ni mucho menos. Este trabajo solo enmarca uno de los tantos estudios que deberá soportar el modelo de Delta Gravity.

Capítulo 2

Principios Variacionales

Antes de comenzar con el desarrollo del modelo, debemos comentar al menos, una de las herramientas esenciales en este estudio, como es el principio variacional, que utilizaremos tanto para obtener las nuevas ecuaciones de campo que propone el modelo, como para obtener las geodésicas en Delta Gravity.

2.1. Principio de Acción

Principio variacional es la denominación general que se usa en el cálculo de variaciones[1], para hablar de un principio integral o principio que considera desplazamientos totales y pequeñas variaciones virtuales del movimietno entero[2] y que permite encontrar funciones que extreman un determinado funcional entre dos puntos extremos q_1 y q_2.

[1] El cálculo de funciones continuas que maximizan o minimizan un funcional dado

[2] A diferencia de un principio diferencial, que considera pequeños desplazamientos respecto al estado instantaneo

Este principio se puede aplicar en muchos contextos, pero cuando se consideran sistemas mecánicos, se le llama principio de Hamilton, que según[6] enunciamos:

El movimiento del sistema entre el tiempo t_1 y el tiempo t_2 es tal que la integral curvilínea

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \tag{2.1}$$

donde $L = T - V$, el lagrangiano clásico, tiene un valor estacionario para el camino del movimiento correcto.

Esto significa que dentro de todos los posibles caminos que el sistema pueda recorrer entre los instantes t_1 y t_2, recorrerá el camino para el cual el valor integral en (2.1) sea estacionario, y por esto último entendemos que a lo largo de todo el camino, la integral mantiene el mismo valor.A este camino se le llama camino correcto.

Ahora bien, a este valor constante o magnitud física escalar, se le suele llamar acción o integral de acción, que permite enunciar el principio de acción como:

El movimiento de un sistema es tal que la variación de la integral curvilínea I para t_1 y t_2 es nula:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0 \tag{2.2}$$

A esta función $\mathcal{L}$ suele llamársele invariante lagrangiana y puede ser más general que en el principio de Hamilton.

Al principio de acción también se le da la forma de lo que se conoce como principio de la menor acción, nombre que permite relacionar este principio directamente con nuestra intuición física, pues tendemos a observar que la naturaleza en general opta por caminos que permiten economizar su esfuerzo, o minimizar su energía, por ejemplo el agua siempre busca caminos cuyas pendientes le permitan bajar más rápido, la trayectoria de un cuerpo en un campo gravitacional tiende a ser la de mínima longitud, etc.

En el caso más general para campos físicos ϕ en un espacio n-dimensioanal la acción toma la forma

$$S = \int_M d^n x \mathcal{L}_0((\phi_\alpha, \partial\phi_\alpha), \mathbf{x})$$

donde M es un cierto contorno del dominio de $\mathcal{L}_0$ y α un indice que indica la variedad del campo.

2.2. Ventajas del principio de Acción

El principio de acción es una formulación que tiene la principal ventaja de establecer inmediatamente una conexión entre principios de simetría y leyes de conservación, además de permitir describir sistemas aparentemente no mecánicos, que no se pueden abordar intuitivamente, como en la mecánica clásica, ampliando considerablemente nuestras fronteras de estudio para nuevas teorías.

Este principio al estar definido mediante magnitudes físicas, en el lagrangiano, que no hacen referencia a un sistema particular de coordenadas generalizadas, como la energía cinética, entrega automáticamente una formulación invariante respecto de la elección de las coordenadas del sistema.

En cuanto a la relación entre simetría y conservación, si la lagrangiana no contiene explícitamente una coordenada particular de desplazamiento q_j, se conservara la correspondiente cantidad de movimiento canónica $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$, y a esta coordenada q_j se le llamara cíclica.

Ahora bien, si una coordenada de desplazamiento es cíclica, quiere decir que una traslación del sistema, no tiene efecto alguno sobre el sistema, o sea si el sistema es invariante ante esa traslación en una direccion dada se conserva la cantidad de momento correspondiente. Igualmente si una coordenada de rotación es cíclica, indicara que el sistema es invariante ante una rotación en torno al eje dado y su momento se conserva.

Así las propiedades de simetría están íntimamente relacionadas a las leyes de conservación.

Por ejemplo en simetría esférica, que será la simetría a utilizar más adelante, podemos decir inmediatamente que se conservan todas las componentes del momento angular, o si en otro sistema solo hay simétria con respecto al eje z, entonces solo se conservará el momento angular para la componente z.

Otro teorema de conservación importante es el de la conservación de la energía total, siempre que la lagrangiana no sea función explicita del tiempo se podrá construir una magnitud física a partir del lagrangiano, conocida como Hamiltoniano, que permanecerá constante en el tiempo, y si las trasformaciones de coordenadas generalizadas no contienen explícitamente al tiempo, entonces la energía se conservará[6].

Todo lo anterior se puede generalizar en el teorema de Nohether[6]que no estudiaremos en este trabajo.

2.3. Aplicación: Ecuaciones de Einstein

Como un ejemplo del principio de acción , según(2.2) y para aproximarnos a nuestro posterior desarrollo, derivamos las ecuaciones de Einstein para su teoría de la gravitación. Partimos de la acción dada por Hilbert

$$S_G = \int d^d x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2k} R + \mathcal{L}_m \right) \tag{2.3}$$

donde $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ y aplicamos el principio de acción variando esta:

$$\delta S_G = \int d^d x \left[\delta\sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2k} R + \mathcal{L}_m \right) + \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2k} \delta R + \delta\mathcal{L}_m \right) \right] = 0$$

considerando las siguientes identidades de [7] y [8] :

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$$
$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\delta g_{\rho\sigma}$$
$$\delta R = \delta(\, g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$$
$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\mathbf{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu} - (\delta\mathbf{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda} \tag{2.4}$$

esta ultima conocida como identidad de Palatini, desarrollando resulta:

$$\delta S_G = \int d^d x\sqrt{-g}\left\{\left(-\frac{1}{2k}R + \mathcal{L}_m\right)\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \frac{1}{2k}R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \frac{-1}{2k}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left[(\delta\mathbf{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu} - (\delta\mathbf{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda}\right] + \delta\mathcal{L}_m\right\}$$

además podemos manipular el termino

$$\frac{-1}{2k}\sqrt{-g}\left[(g^{\mu\nu}\delta\mathbf{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu} - (g^{\mu\nu}\delta\mathbf{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda}\right] = \frac{-1}{2k}\left[(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\mathbf{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\lambda})_{,\nu} - (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\mathbf{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu})_{,\lambda}\right]$$

al usar $(V^{\mu})_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}V^{\mu})_{,\mu}$ según [7] y si integramos en todo el espacio desaparecerá quedando simplemente:

$$\delta S_G = \int d^d x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{4k}g^{\mu\nu}R + \frac{1}{2k}R^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{2}\mathcal{L}_m g^{\mu\nu} + \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g_{\mu\nu}}\right)\right]\delta g_{\mu\nu}$$

y con la definición para el tensor energia-momentum dada en [8]

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_m g^{\mu\nu} + \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}T^{\mu\nu} \tag{2.5}$$

obtenemos:

$$\delta S_G = \int d^d x\left[-\frac{1}{4k}g^{\mu\nu}R + \frac{1}{2k}R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}T^{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} = 0$$

que nos entrega las ecuaciones de Einstein

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + kT^{\mu\nu} = 0 \tag{2.6}$$

Capítulo 3

Modelo Delta Gravity

Estudiar este modelo es interesante por varios motivos,podría darnos pistas de esa tan anhelada teoría de la gravitación cuántica[13], o quizás ayudarnos a solucionar alguna de las interrogantes planteadas por el lado oscuro de nuestro universo[14], pero aunque nada de eso veremos en este desarrollo, el solo hecho de estudiar un nuevo modelo, es en sí mismo un objetivo interesante y si podemos contribuir con un grano de arena en este estudio, mejor aún.

3.1. Presentación del Modelo

El modelo original y mucho más general, aparece con la motivación de encontrar teorías de gauge renormalizables y estudiar una variante basada en la estructura algebraica construida con el método de cuantizacion Batalin-Vilkovisky (BV) . Un reporte preliminar de estas ideas se encuentra en [9]. Este modelo fue llamado primeramente *Semiclassical Gauge theories* y entrega una generalizacin de las trasformaciones de *Yang-Mills theories* [10],[11].

Sin entrar en el estudio detallado y remitiéndonos a los cálculos en [9],[10],[11] podemos resaltar algunas virtudes del modelo original:

- Es un modelo que no asume ninguna simetría inicial.

- Es inmediatamente renormalizable si se asume un grupo de gauge no abeliano.

- Vive en un Loop al igual que la Relatividad general [12].

- También este modelo conserva algunas características cuánticas de la teorías de gauge no abeliana habitual como libertad asintótica.

Básicamente la idea es que el modelo cumpla con una restricción: recuperar la ecuaciones de movimiento clásicas y para ello , a un campo A_μ , que cumple ciertas trasformaciones [11], se le incorpora un campo auxiliar B_μ. El campo A_μ cumple con una cierta invariante lagrangiana $\mathcal{L}_0$ y el campo auxiliar B_μ puede ser generado, asumiendo$B_\mu = \delta A_\mu$,que en conjunto cumpliran con una nueva invariante lagrangiana.

Este modelo general aplicado a la Gravedad de Einstein genera lo que llamamos el modelo Delta Gravity.

En este trabajo nos interesa estudiar el límite clásico del modelo, aplicado a la teoría de la gravitación de Einstein, por eso mostramos el siguiente método para obtener una nueva invariante lagrangiana y la respectiva acción, de un campo cualquiera ϕ:

3.1.1. Metodo para nueva Acción

Primero, conocemos el lagrangiano $\mathcal{L}_0$ del campo y calculamos su variación con respecto a ϕ de la siguiente forma:

$$\delta\mathcal{L}_0 = \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta\phi}\delta\phi + \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta(\partial_\beta\phi)}\delta(\partial_\beta\phi) = \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta\phi}\tilde{\phi} + \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta(\partial_\beta\phi)}(\partial_\beta\tilde{\phi})$$

donde definimos $\tilde{\phi} = \delta\phi$ el campo auxiliar e independiente.

Luego la nueva invariante sera $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \grave{\mathcal{L}}$ con $\grave{\mathcal{L}} = \kappa_2 \delta \mathcal{L}_0$,siendo κ_2 una constante a definir. Esto a su vez genera la siguiente acción:

$$S = \int d^d x \left\{ \mathcal{L}_0 + \grave{\mathcal{L}} \right\} = \int d^d x \left\{ \mathcal{L}_0 + \kappa_2 \left(\frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta \phi} - \partial_\beta \left[\frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta(\partial_\beta \phi)} \right] \right) \tilde{\phi} \right\}$$

Este procedimiento es general, justificado en [10], y puede ser utilizado para cualquier lagrangiano obteniendo resultados similares al modelo general, incluso si no hay simetrías de gauge para empezar.

En el resto del trabajo utilizaremos la forma efectiva de esta acción dada en [13],que se aplica perfectamente para nuestro objetivo, y donde la nueva acción se define simplemente por:

$$S_{\delta G} = \int d^d x \left\{ \mathcal{L}_0 + \mathcal{L} \right\} = \int d^d x \left\{ \mathcal{L}_0 + \kappa_2 \left(\frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta \phi} \right) \tilde{\phi} \right\}$$

3.1.2. Acción en Delta Gravity

Ahora si aplicamos lo anterior a la Teoría de la Gravitación de Einstein con

$$\mathcal{L}_0 = \sqrt{-g}(-\frac{1}{2\kappa} R + \mathcal{L}_m)$$

$$\phi = g^{\mu\nu}$$

$$\tilde{\phi} = \delta \phi = \tilde{g}^{\mu\nu}$$

Tendríamos:

$$S_{\delta G} = \int d^d x \left\{ \mathcal{L}_0 + \kappa_2 \left(\frac{\delta(\sqrt{-g}(-\frac{1}{2\kappa} R + \mathcal{L}_m))}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \tilde{g}^{\mu\nu} \right\}$$

$$S_{\delta G} = \int d^d x \left\{ \mathcal{L}_0 + \kappa_2 \left(\frac{-1}{2\kappa} \frac{\delta(\sqrt{-g} R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \tilde{g}^{\mu\nu} \right\}$$

y considerando las relaciones 2.4 , 2.5 y sus combinaciones, se obtiene la acción para Delta Gravity:

$$S_{\delta G} = \int d^d x \sqrt{-g}(-\frac{1}{2\kappa} R + \mathcal{L}_M) + \kappa_2 \int d^d x \sqrt{-g} \left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \kappa T_{\mu\nu} \right] \tilde{g}^{\mu\nu} \quad (3.1)$$

3.2. Ecuaciones para el Campo Auxiliar $\tilde{g}_{\mu\nu}$

Queremos obtener las ecuaciones para este nuevo campo y estudiar si este modifica lo que hoy conocemos sobre la gravedad en un limite clasico. Para ello nuevamente utilizamos el principio de acción (2.2) aplicado a (3.1). Primero variamos con respecto a $\tilde{g}^{\mu\nu}$, pero esta variación nos entrega inmediatamente las ecuaciones originales de la gravedad de Einstein dadas en (2.6) , ósea recuperamos inmediatamente los resultados de RG. Mientras el resto de la variación será:

$$\delta S = \int d^d x \delta \left[\sqrt{-g}(-\frac{1}{2\kappa}R + \mathcal{L}_M) \right] + \kappa_2 \int d^d x \delta \left\{ \sqrt{-g} \left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \kappa T_{\mu\nu} \right] \right\} \tilde{g}^{\mu\nu}$$

Sin embargo del primer término darán nuevamente las ecuaciones de Einstein y por ende se anularan idénticamente y del segundo término se salva, por la misma razón, solo:

$$\delta S = \kappa_2 \int d^d x \sqrt{-g} \left[\left(\delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta g_{\mu\nu} R \right) + \kappa \delta T_{\mu\nu} \right] \tilde{g}^{\mu\nu}$$

que, utilizando las identidades (2.4) se puede desarrollar

$$\delta S = \kappa_2 \int d^d x \sqrt{-g} \left\{ \delta R_{\mu\nu} - \left(\frac{1}{2} \delta g_{\mu\nu} R + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (-g^{\mu\gamma} g^{\nu\beta} \delta g_{\gamma\beta} R_{\mu\nu} + g^{\kappa\sigma} \delta R_{\kappa\sigma}) \right) + k \delta T_{\mu\nu} \right\} \tilde{g}^{\mu\nu}$$

agrupando terminos

$$\delta S = \kappa_2 \int d^d x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g_{\gamma\beta} R^{\gamma\beta} - \frac{1}{2} \delta g_{\mu\nu} R + k \delta T_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\kappa\sigma} \delta R_{\kappa\sigma} \right\} \tilde{g}^{\mu\nu}$$

nos concentraremos en los dos ultimos terminos para desarrollarlos, asi tenemos

$$\kappa_2 \int d^d x \sqrt{-g} \left\{ \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\kappa\sigma} \delta R_{\kappa\sigma} \right\} \tilde{g}^{\mu\nu}$$

que puede ser escrito como

$$\kappa_2 \int d^d x \sqrt{-g} \left\{ g^{\kappa\gamma} g^{\sigma\beta} - \frac{1}{2} g^{\gamma\beta} g^{\kappa\sigma} \right\} \delta R_{\kappa\sigma} \tilde{g}_{\gamma\beta}$$

ahora utilizamos la identidad de palatini $\delta R_{\kappa\sigma} = (\delta\mathbf{\Gamma}^{\lambda}_{\kappa\lambda})_{;\sigma} - (\delta\mathbf{\Gamma}^{\lambda}_{\kappa\sigma})_{;\lambda}$ con

$\delta\mathbf{\Gamma}^{\lambda}_{\kappa\sigma} = \left[\frac{1}{2}g^{\lambda\varepsilon}(\delta g_{\kappa\varepsilon;\sigma} + \delta g_{\varepsilon\sigma;\kappa} - \delta g_{\kappa\sigma;\varepsilon})\right]$ y $\delta\mathbf{\Gamma}^{\lambda}_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\varepsilon}(\delta g_{\varepsilon\lambda;\kappa})$ de (Weinberg pag 290)

reemplazando

$$\kappa_2 \int d^dx\sqrt{-g}\left\{g^{\kappa\gamma}g^{\sigma\beta} - \frac{1}{2}g^{\gamma\beta}g^{\kappa\sigma}\right\}\frac{1}{2}g^{\lambda\varepsilon}(\delta g_{\varepsilon\lambda;\kappa\sigma} - \delta g_{\kappa\varepsilon;\sigma\lambda} - \delta g_{\varepsilon\sigma;\kappa\lambda} + \delta g_{\kappa\sigma;\varepsilon\lambda})\tilde{g}_{\gamma\beta}$$

Debemos observar que los terminos a la derecha son simetricos para los indices $(\kappa\sigma)$ por lo que el primer parentesis debe ser simetrizado, de tal modo que nos da

$$\kappa_2 \int d^dx\sqrt{-g}\frac{1}{4}\left\{g^{\kappa\gamma}g^{\sigma\beta} + g^{\sigma\gamma}g^{\kappa\beta} - g^{\gamma\beta}g^{\kappa\sigma}\right\}g^{\lambda\varepsilon}(\delta g_{\varepsilon\lambda;\kappa\sigma} - \delta g_{\kappa\varepsilon;\sigma\lambda} - \delta g_{\varepsilon\sigma;\kappa\lambda} + \delta g_{\kappa\sigma;\varepsilon\lambda})\tilde{g}_{\gamma\beta}$$

y llamaremos $P^{\gamma\beta\kappa\sigma}$ un tensor simetrico para $(\gamma\beta)$ y $(\kappa\sigma)$

$P^{\gamma\beta\kappa\sigma} = \frac{1}{4}\left\{g^{\kappa\gamma}g^{\sigma\beta} + g^{\sigma\gamma}g^{\kappa\beta} - g^{\gamma\beta}g^{\kappa\sigma}\right\}$

con lo que nos queda

$$\kappa_2 \int d^dx\sqrt{-g}P^{\gamma\beta\kappa\sigma}g^{\lambda\varepsilon}(\delta g_{\varepsilon\lambda;\kappa\sigma} - \delta g_{\kappa\varepsilon;\sigma\lambda} - \delta g_{\varepsilon\sigma;\kappa\lambda} + \delta g_{\kappa\sigma;\varepsilon\lambda})\tilde{g}_{\gamma\beta}$$

$$\kappa_2 \int d^dx\sqrt{-g}(P^{\gamma\beta\kappa\sigma}g^{\lambda\varepsilon}\delta g_{\varepsilon\lambda;\kappa\sigma} - P^{\gamma\beta\kappa\sigma}g^{\lambda\varepsilon}\delta g_{\kappa\varepsilon;\sigma\lambda} - P^{\gamma\beta\kappa\sigma}g^{\lambda\varepsilon}\delta g_{\varepsilon\sigma;\kappa\lambda} + P^{\gamma\beta\kappa\sigma}g^{\lambda\varepsilon}\delta g_{\kappa\sigma;\varepsilon\lambda})\tilde{g}_{\gamma\beta}$$

renombrando indices

$$\kappa_2 \int d^dx\sqrt{-g}(P^{\gamma\beta\kappa\sigma}g^{\lambda\varepsilon}\delta g_{\varepsilon\lambda;\kappa\sigma} - P^{\gamma\beta\lambda\sigma}g^{\kappa\varepsilon}\delta g_{\lambda\varepsilon;\sigma\kappa} - P^{\gamma\beta\kappa\lambda}g^{\sigma\varepsilon}\delta g_{\varepsilon\lambda;\kappa\sigma} + P^{\gamma\beta\varepsilon\lambda}g^{\sigma\kappa}\delta g_{\varepsilon\lambda;\kappa\sigma})\tilde{g}_{\gamma\beta}$$

y volvemos a observar que hay simetrias para los indices $(\varepsilon\lambda)$ por lo que debemos volver a simetrizar algunas expresiones, que desarrollandolas nos entregan

$$\kappa_2 \int d^dx\sqrt{-g}(P^{\gamma\beta\kappa\sigma}g^{\lambda\varepsilon} - P^{\gamma\beta\kappa\lambda}g^{\sigma\varepsilon} - P^{\gamma\beta\kappa\varepsilon}g^{\sigma\lambda} + P^{\gamma\beta\varepsilon\lambda}g^{\sigma\kappa})\delta g_{\varepsilon\lambda;\kappa\sigma}\tilde{g}_{\gamma\beta}$$

Ahora integrando por partes y covariantemente

$$-\kappa_2 \int d^dx\sqrt{-g}(P^{\gamma\beta\kappa\sigma}g^{\lambda\varepsilon} - P^{\gamma\beta\kappa\lambda}g^{\sigma\varepsilon} - P^{\gamma\beta\kappa\varepsilon}g^{\sigma\lambda} + P^{\gamma\beta\varepsilon\lambda}g^{\sigma\kappa})\delta g_{\varepsilon\lambda}\tilde{g}_{\gamma\beta;\sigma\kappa}$$

$$\kappa_2 \int d^dx\sqrt{-g}(P^{\gamma\beta\kappa\lambda}g^{\sigma\varepsilon} + P^{\gamma\beta\kappa\varepsilon}g^{\sigma\lambda} - P^{\gamma\beta\kappa\sigma}g^{\lambda\varepsilon} - P^{\gamma\beta\varepsilon\lambda}g^{\sigma\kappa})\delta g_{\varepsilon\lambda}\tilde{g}_{\gamma\beta;\sigma\kappa}$$

Definamos ahora $F^{(\gamma\beta)(\varepsilon\lambda)\kappa\sigma} = P^{\gamma\beta\kappa\lambda}g^{\sigma\varepsilon} + P^{\gamma\beta\kappa\varepsilon}g^{\sigma\lambda} - P^{\gamma\beta\kappa\sigma}g^{\lambda\varepsilon} - P^{\gamma\beta\varepsilon\lambda}g^{\sigma\kappa}$,asi nos queda

$$\kappa_2 \int d^dx\sqrt{-g}F^{(\gamma\beta)(\varepsilon\lambda)\kappa\sigma}\delta g_{\varepsilon\lambda}\tilde{g}_{\gamma\beta;\sigma\kappa}$$

y volvamos al principio

$$\delta S = \kappa_2 \int d^dx\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g_{\gamma\beta}R^{\gamma\beta}\tilde{g}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}R\tilde{g}^{\mu\nu} + \kappa\delta T_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu} + F^{(\gamma\beta)(\varepsilon\lambda)\kappa\sigma}\delta g_{\varepsilon\lambda}\tilde{g}_{\gamma\beta;\sigma\kappa}\right\}$$

$$\delta S = \kappa_2 \int d^dx\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2}\delta g_{\gamma\beta}R^{\gamma\beta}\tilde{g}^{\mu}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}R\tilde{g}^{\mu\nu} + \kappa\delta T_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu} + F^{(\gamma\beta)(\varepsilon\lambda)\kappa\sigma}\delta g_{\varepsilon\lambda}\tilde{g}_{\gamma\beta;\sigma\kappa}\right\}$$

desarrollando y renombrando indices mudos

$$\delta S = \kappa_2 \int d^dx\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2}R^{\varepsilon\lambda}\tilde{g}^{\mu}_{\mu} - \frac{1}{2}R\tilde{g}^{\varepsilon\lambda} + \frac{\kappa\delta T_{\gamma\beta}}{\delta g_{\varepsilon\lambda}}\tilde{g}^{\gamma\beta} + F^{(\gamma\beta)(\varepsilon\lambda)\kappa\sigma}\tilde{g}_{\gamma\beta;\sigma\kappa}\right\}\delta g_{\varepsilon\lambda}$$

que nos entrega finalmente la ecuacion para $\tilde{g}_{\gamma\beta}$

$$\frac{1}{2}\left(R^{\varepsilon\lambda}\tilde{g}^{\mu}_{\mu} - R\tilde{g}^{\varepsilon\lambda}\right) + \frac{\kappa\delta T_{\gamma\beta}}{\delta g_{\varepsilon\lambda}}\tilde{g}^{\gamma\beta} + F^{(\gamma\beta)(\varepsilon\lambda)\kappa\sigma}\tilde{g}_{\gamma\beta;\sigma\kappa} = 0 \tag{3.2}$$

Este resultado es completamente equivalente a la forma utilizada en [14]

$$\begin{aligned} S^{\gamma\sigma} + \frac{1}{2}(R\tilde{g}^{\gamma\sigma} - g_{\mu\nu}R^{\sigma\gamma}\tilde{g}^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\nabla_\nu\tilde{g}^{\mu\nu}\right)_{,\mu} \\ +\frac{1}{4}g^{\sigma\gamma}\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\sigma}g_{\mu\nu}\nabla_\sigma\tilde{g}^{\mu\nu}\right)_{,\alpha} = \kappa\frac{\delta T_{\mu\nu}}{\delta g_{\gamma\sigma}}\tilde{g}^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.3}$$

con ∇_σ derivada covariante y donde

$$S^{\sigma\gamma} = (U^{\sigma\beta\gamma\rho} + U^{\gamma\beta\sigma\rho} - U^{\sigma\gamma\beta\rho})_{;\rho\beta} \qquad U^{\alpha\beta\gamma\rho} = \frac{1}{2}\left[g^{\gamma\rho}(\tilde{g}^{\beta\alpha} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu})\right]$$

Para terminar, en el resto del desarrollo usaremos

$$\kappa\frac{\delta T_{\mu\nu}}{\delta g_{\gamma\sigma}}\tilde{g}^{\mu\nu} = \kappa\left\{p\delta^{\gamma}_{\nu} + (p+\rho)U^{\gamma}U_{\nu}\right\}\tilde{g}^{\sigma\nu}$$

la forma en que se obtiene, escapa al desarrollo de este trabajo,sin embargo se utiliza tambien en [14].

3.3. Geodésicas en Delta Gravity

Las geodésicas para una partícula en un campo gravitatorio están dadas por la acción

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int d^n y\sqrt{-g}R - m\int dt\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}$$

sin embargo en delta gravity aparase un nuevo término, que nos entrega una nueva acción

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int d^n y\sqrt{-g}R - m\int dt\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} + \kappa_2\int d^n y\sqrt{-g}(G_{\mu\nu} + \kappa T_{\mu\nu})\tilde{g}^{\mu\nu}$$

con la definición de [7] para el tensor energía-momentum

$$T_{\mu\nu}(y) = \frac{m}{\sqrt{-g}}\int dt\,\frac{\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu}{\sqrt{-g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta}}\delta(y-x)$$

Así la acción para una partícula será

$$S_p = m\int\frac{dt}{\sqrt{-g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta}}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu(g^{\mu\nu} + \kappa_2'\tilde{g}^{\mu\nu}) = m\int\frac{dt}{\sqrt{-g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta}}\mathfrak{g}_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \tag{3.4}$$

donde $\kappa_2' = \kappa_2\kappa$ y $\mathfrak{g}_{\mu\nu} = (g_{\mu\nu} + \kappa_2'\tilde{g}_{\mu\nu})$.De esta acción derivamos las ecuaciones geodésicas.

Variando la acción tenemos:

$$\delta S_p = m\int\frac{dt}{\sqrt{-g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta}}\left[\mathfrak{g}_{\mu\nu,h}\delta x^h\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + 2\mathfrak{g}_{\mu h}\delta\dot{x}^h\dot{x}^\mu - \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{g}_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu(-2g_{h\beta}\delta\dot{x}^h\dot{x}^\beta - g_{\alpha\beta,h}\delta x^h\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta)}{-g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta}\right]$$

usando

$$d\tau^2 = -g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

$$\delta S_p = m\int\frac{dt^2}{d\tau}(\mathfrak{g}_{\mu\nu,h}\delta x^h\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} + 2\mathfrak{g}_{\mu h}\frac{d\delta x^h}{dt}\frac{dx^\mu}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{g}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}(2g_{h\beta}\frac{d\delta x^h}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} + g_{\alpha\beta,h}\delta x^h\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt})}{-g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt}})$$

$$\delta S_p = m\int d\tau(\mathfrak{g}_{\mu\nu,h}\delta x^h\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + 2\mathfrak{g}_{\mu h}\frac{d\delta x^h}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu(2g_{h\beta}\frac{d\delta x^h}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} + g_{\alpha\beta,h}\delta x^h\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau})}{d\tau^2})$$

$$\delta S_p = m\int d\tau\left[\mathfrak{g}_{\mu\nu,h}\delta x^h\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + 2\mathfrak{g}_{\mu h}\frac{d\delta x^h}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{1}{2}\mathfrak{g}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}(2g_{h\beta}\frac{d\delta x^h}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} + g_{\alpha\beta,h}\delta x^h\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau})\right]$$

integrando por partes y reemplazando $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$:

$$\delta S_p = m\int d\tau[\mathfrak{g}_{\mu\nu,h}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\delta x^h - (2\mathfrak{g}_{\mu h,\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + 2\mathfrak{g}_{\mu h}\ddot{x}^\mu)\delta x^h - \delta x^h(\mathfrak{g}_{\mu\nu,\rho}\dot{x}^\rho g_{h\beta}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\dot{x}^\beta$$
$$+\mathfrak{g}_{\mu\nu}g_{h\beta}(\ddot{x}^\mu\dot{x}^\nu\dot{x}^\beta + \dot{x}^\mu\ddot{x}^\nu\dot{x}^\beta + \dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\ddot{x}^\beta) + \mathfrak{g}_{\mu\nu}g_{h\beta,\rho}\dot{x}^\rho\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\dot{x}^\beta) + \frac{1}{2}\mathfrak{g}_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu g_{\alpha\beta,h}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\delta x^h]$$

y como $\delta S_p = 0$ cuando $\delta x^h \longrightarrow 0$

$$\mathfrak{g}_{\mu\nu,h}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu - (2\mathfrak{g}_{\mu h,\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + 2\mathfrak{g}_{\mu h}\ddot{x}^\mu) - \mathfrak{g}_{\mu\nu,\rho}\dot{x}^\rho g_{h\beta}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\dot{x}^\beta - \mathfrak{g}_{\mu\nu}g_{h\beta}(\ddot{x}^\mu\dot{x}^\nu\dot{x}^\beta + \dot{x}^\mu\ddot{x}^\nu\dot{x}^\beta$$
$$+\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\ddot{x}^\beta) - \mathfrak{g}_{\mu\nu}g_{h\beta,\rho}\dot{x}^\rho\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\dot{x}^\beta + \frac{1}{2}\mathfrak{g}_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu g_{\alpha\beta,h}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0$$

reordenando:

$$2\mathfrak{g}_{\mu h}\ddot{x}^\mu + (\mathfrak{g}_{h\nu,\beta} + \mathfrak{g}_{\beta h,\nu} - \mathfrak{g}_{\beta\nu,h})\dot{x}^\beta\dot{x}^\nu + (\mathfrak{g}_{\mu\nu}g_{h\beta} + \mathfrak{g}_{\beta\mu}g_{h\nu} + \mathfrak{g}_{\beta\nu}g_{h\mu})\dot{x}^\nu\dot{x}^\beta\ddot{x}^\mu + (\mathfrak{g}_{\mu\nu,\rho}g_{h\beta}$$
$$+\mathfrak{g}_{\mu\nu}g_{h\beta,\rho} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}_{\mu\nu}g_{\rho\beta,h})\dot{x}^\rho\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\dot{x}^\beta = 0$$

$$\mathfrak{g}_{\mu h}\ddot{x}^\mu + \frac{1}{2}(\mathfrak{g}_{h\nu,\beta} + \mathfrak{g}_{\beta h,\nu} - \mathfrak{g}_{\beta\nu,h})\dot{x}^\beta\dot{x}^\nu + \frac{1}{2}(\mathfrak{g}_{\mu\nu}g_{h\beta} + \mathfrak{g}_{\beta\mu}g_{h\nu} + \mathfrak{g}_{\beta\nu}g_{h\mu})\dot{x}^\nu\dot{x}^\beta\ddot{x}^\mu + \frac{1}{2}(\mathfrak{g}_{\mu\nu,\rho}g_{h\beta}$$
$$+\mathfrak{g}_{\mu\nu}g_{h\beta,\rho} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}_{\mu\nu}g_{\rho\beta,h})\dot{x}^\rho\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\dot{x}^\beta = 0$$

$$(\mathfrak{g}_{\mu h} + \frac{1}{2}(\mathfrak{g}_{\mu\nu}g_{h\beta} + \mathfrak{g}_{\beta\mu}g_{h\nu} + \mathfrak{g}_{\beta\nu}g_{h\mu})\dot{x}^\nu\dot{x}^\beta)\ddot{x}^\mu + \frac{1}{2}(\mathfrak{g}_{h\nu,\beta} + \mathfrak{g}_{\beta h,\nu} - \mathfrak{g}_{\beta\nu,h})\dot{x}^\beta\dot{x}^\nu + \frac{1}{2}(\mathfrak{g}_{\mu\nu,\rho}g_{h\beta}$$
$$+\mathfrak{g}_{\mu\nu}g_{h\beta,\rho} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}_{\mu\nu}g_{\rho\beta,h})\dot{x}^\rho\dot{x}^\mu\dot{x}^\beta\dot{x}^\nu = 0$$

Si llamamos:

$$\mathfrak{S}_{\beta\nu h} = \frac{1}{2}(\mathfrak{g}_{h\nu,\beta} + \mathfrak{g}_{\beta h,\nu} - \mathfrak{g}_{\beta\nu,h})$$
$$N_{\mu\nu\rho h\beta} = \frac{1}{2}(\mathfrak{g}_{\mu\nu,\rho}g_{h\beta} + \mathfrak{g}_{\mu\nu}g_{h\beta,\rho} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}_{\mu\nu}g_{\rho\beta,h})$$
$$M_{h\mu} = \mathfrak{g}_{\mu h} + \frac{1}{2}(\mathfrak{g}_{\mu\nu}g_{h\beta} + \mathfrak{g}_{\beta\mu}g_{h\nu} + \mathfrak{g}_{\beta\nu}g_{h\mu})\dot{x}^\nu\dot{x}^\beta$$

Finalmente obtenemos las nuevas geodésicas:

$$M_{h\mu}\ddot{x}^\mu + \mathfrak{S}_{\beta\nu h}\dot{x}^\beta\dot{x}^\nu + N_{\mu\nu\rho h\beta}\dot{x}^\rho\dot{x}^\mu\dot{x}^\beta\dot{x}^\nu = 0 \tag{3.5}$$

3.4. Discusión Delta Gravity

No podemos terminar este capítulo sin tomar en cuenta algunos puntos sobre los cálculos mostrados hasta ahora y hacer un breve análisis.

Consideremos la ecuación (referencia ecc para g gotico), vemos que siempre podremos obtener al menos una solución sencilla y conocida, esta es $\tilde{g}^{\gamma\beta} = a g^{\gamma\beta}$, esto sin embargo será solo cierto cuando suponemos estar en el vacio, donde $R = 0$ y $R_{\mu\nu} = 0$. Además si nos encontramos alejados de la fuente gravitatoria podemos suponer que nuestra espacio tiende al de Minkowski y por ende $a = 1$.

Por otro lado las geodésicas sufren una clara modificación, a las generadas por relatividad general (RG), pero debemos notar que si estamos fuera de las fuentes gravitatorias, tendremos

$$S_p = m \int \frac{dt}{\sqrt{-g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}} \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu (1 + \kappa_2') g^{\mu\nu}$$

ósea describiremos el movimiento de una partícula de masa $m' = m(1 + \kappa_2')$ y además recuperaremos la forma para la geodésica dada por RG con $L = -m'\sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$.

Esto nos da a entender, que al menos en el vacio, el modelo no es descartable, pues recuperamos lo hasta ahora conocido en cuanto a RG, además el modelo en estas condiciones vive a un loop, es finita y exacta como se demuestra en [13] , lo que coincide con el resultado obtenido por t'Hooft para la relatividad general en las mismas condiciones[12].

Otro punto interesante es que el modelo prescinde de constante cosmológica, esta no es necesaria, y de hecho para ser finita a un nivel cuántico, fuera de materia, requiere $\Lambda = 0$ [13] y como puede verse en [14], en presencia de fluido a gran escala, como es la suposición para analizar la evolución de nuestro universo, ayudados de una métrica FRW, el modelo predice aceleraciones y se comporta mucho mejor de lo esperado, y aunque nada es afirmable aun, en el peor de los casos estos resultados nos pueden dar alguna luz para resolver el problema del universo oscuro.

Sin embargo en presencia de materia y curvatura podríamos encontrar modificaciones que nos podrían hacer pensar que el modelo no es puramente geométrico, podríamos suponer materia esféricamente simétrica y analizar que soluciones encontramos para $\tilde{g}_{\mu\nu}$, probablemente apareceran efectos nuevos aplicables a rotación de estrellas o cosas por el estilo.

Capítulo 4

Delta Gravity para métrica esféricamente Simétrica

La investigación tanto teórica como experimental mantiene siempre un grado de incertidumbre y más aun cuando se investigan modelos nuevos, donde se puede intuir una solución, pero los resultados pueden ser muy diferentes.

Hasta ahora el modelo ha funcionado muy bien, sin embargo necesitamos generar la mayor cantidad de predicciones, denominadas “falseables”, o predicciones que son susceptibles de verificación, y eso nos proponemos en este capítulo.

Intentaremos encontrar alguna propiedad observable y medible para estrellas, asumiendo simetría esférica y un fluido perfecto, primero determinaremos algunas condiciones que simplificaran nuestro calculo e intentaremos resolver las ecuaciones para las formas explicitas de $\tilde{g}_{\mu\nu}$, dadas las condiciones mencionadas.

4.1. Simetría esférica y Estrellas con densidad uniforme

Para encontrar las ecuaciones de $\tilde{g}_{\mu\nu}$ debemos elegir una cierta métrica , en este caso tomaremos la simetría esférica dada por

$$ds^2 = A(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2) - B(r)dt^2$$

que implica inmediatamente que los $\tilde{g}_{\mu\nu}$ toman la forma :

$$d\tilde{s}^2 = D(r)dr^2 + E(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2) - C(r)dt^2$$

Esto es así, porque una vez que ya usamos la métrica en su forma estándar, con r redefinido para obtener una forma simplificada, ya no podemos volver a redefinir r y por ende $d\tilde{s}^2$ debe aparecer en su forma más general. También asumiremos un fluido perfecto, con lo que tomamos el tensor energía -momentum como:

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p + \rho)U_\mu U_\nu$$

donde p es la presion, ρ la densidad y U^μ la velocidad definida como $g^{\mu\nu}U_\mu U_\nu = -1$.

Finalmente nuestros cálculos serán con densidad constante, esto nos permitirá estudiar un caso particular de estrella, que no existe en realidad, pero su estudio es interesante porque, al menos en RG, sus simplicidad permite soluciones exactas y ayuda a determinar ciertos límites superiores para el red shift de las líneas espectrales en la superficie de una estrella [7].

4.2. Ecuaciones para $g_{\mu\nu}$ con ρ constante

Una vez definida la simetría, el tensor energía-momentum y asumir nuestros cálculos con un fluido en reposo, podemos obtener de 2.6 las ecuaciones para los coeficientes de la métrica $A(r), B(r)$, estas son:

$$\frac{\frac{d^2}{dr^2}\,\mathrm{B}(r)}{2\,\mathrm{B}(r)} - \frac{\left(\frac{d}{dr}\,\mathrm{B}(r)\right)\left(\frac{\frac{d}{dr}\,\mathrm{B}(r)}{\mathrm{B}(r)} + \frac{\frac{d}{dr}\,\mathrm{A}(r)}{\mathrm{A}(r)}\right)}{4\,\mathrm{B}(r)} - \frac{\frac{d}{dr}\,\mathrm{A}(r)}{r\,\mathrm{A}(r)} = -4\,\pi\,\mathrm{A}(r)\;\mathrm{G}(\rho - p) \tag{4.1}$$

$$-1 + \frac{r\left(\frac{\frac{d}{dr}\,\mathrm{B}(r)}{\mathrm{B}(r)} - \frac{\frac{d}{dr}\,\mathrm{A}(r)}{\mathrm{A}(r)}\right)}{2\,\mathrm{A}(r)} + \frac{1}{\mathrm{A}(r)} - 1 = -4\,\pi\,r^2\,\mathrm{G}(\rho - p) \tag{4.2}$$

$$-\frac{\frac{d^2}{dr^2}\,\mathrm{B}(r)}{2\,\mathrm{A}(r)} + \frac{\left(\frac{d}{dr}\,\mathrm{B}(r)\right)\left(\frac{\frac{d}{dr}\,\mathrm{B}(r)}{\mathrm{B}(r)} + \frac{\frac{d}{dr}\,\mathrm{A}(r)}{\mathrm{A}(r)}\right)}{4\,\mathrm{A}(r)} - \frac{\frac{d}{dr}\,\mathrm{B}(r)}{r\,\mathrm{A}(r)} = -4\,\pi\,\mathrm{B}(r)\;\mathrm{G}(\rho - p) \tag{4.3}$$

Estas ecuaciones se pueden resolver para $A(r)$ entregando la solución

$$A(r) = \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right]^{-1} \tag{4.4}$$

con

$$\mathcal{M}(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r')dr' \tag{4.5}$$

Para encontrar $B(r)$ podemos usar la relación de equilibrio hidrostático [7]

$$\frac{\dot{B}}{B} = -\frac{2\dot{p}}{p+\rho} \tag{4.6}$$

reemplazando esto y 4.4 en 4.2 podemos despejar

$$r^2\dot{p}(r) = -G\mathcal{M}(r)[\rho(r) + p(r)]\left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{\mathcal{M}(r)}\right]\left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right]^{-1} \tag{4.7}$$

esto entrega una ecuación de estado $p(\rho(r))$. Agregamos la condición extra $\mathcal{M}(0) = 0$. Si reemplazamos y ordenamos 4.7 en 4.6 se obtiene

$$\frac{\dot{B}}{B} = -\frac{2G}{r^2}\left[\mathcal{M} + 4\pi r^3 p\right]\left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}\right]^{-1}$$

y la solución con $B(\infty)=1$

$$B(r)=\exp\left\{-\int_r^\infty \frac{2G}{r^2}\left[\mathcal{M}(r') + 4\pi r'^3 p(r')\right]\left[1-\frac{2G\mathcal{M}(r')}{r'}\right]^{-1}\right\}$$

si ahora colocamos ρ constante y la expresamos en términos de la masa estelar

$$\rho=\frac{3M}{4\pi R^3}\qquad \text{para}\, r<R$$

podemos resolver $p(r)$,$B(r)$ y $A(r)$ encontrando

$$p(r)=\frac{3M}{4\pi R^3}\left\{\frac{\left[1-\frac{2\,\mathrm{MG}}{R}\right]^{1/2}-\left[1-\frac{2\,\mathrm{MGr}^2}{R^3}\right]^{1/2}}{\left[1-\frac{2\,\mathrm{MGr}^2}{R^3}\right]^{1/2}-3\left[1-\frac{2\,\mathrm{MG}}{R}\right]^{1/2}}\right\}$$

$$\mathrm{A}\,(r)=\left(1-\frac{2\,G\,M\,r^2}{R^3}\right)^{-1}$$

$$\mathrm{B}\,(r)=\frac{1}{4}\left(3\left(1-\frac{2\,G\,M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(1-\frac{2\,G\,M\,r^2}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \tag{4.8}$$

4.3. Ecuaciones para $\tilde{g}_{\mu\nu}$ con ρ constante

Ahora debemos encontrar las ecuaciones para $\tilde{g}_{\mu\nu}$, esto no es fácil sin ayuda de un programa matemático que pueda manipular términos indexados, sin embargo con esta ayuda y las ecuaciones dadas en 3.3, encontramos las monstruosas ecuaciones para $C(r)$,$D(r)$ y $E(r)$, que mostramos solo por completitud.

$$\begin{gathered}
4r^2A(r)^2B(r)^2\ddot{E}(r)+\left(12rA(r)^2-2r^2A(r)\dot{A}(r)\right)B(r)^2\dot{E}(r)+\Big(-2r^2A(r)^2B(r)\ddot{B}(r)\\
+r^2A(r)^2\dot{B}(r)^2+(r^2A(r)\dot{A}(r)-2rA(r)^2)B(r)\dot{B}(r)+(4A(r)^2-2rA(r)\dot{A}(r))B(r)^2\Big)\,E(r)\\
-4rA(r)B(r)^2\dot{D}(r)+\left((6r\dot{A}(r)-4A(r))B(r)^2-2rA(r)B(r)\dot{B}(r)\right)D(r)\\
+\left(-4rA(r)\dot{A}(r)-4A(r)^3+4A(r)^2\right)B(r)C(r)=-4r^2A(r)^3B(r)\kappa((\rho{+}p)B(r){-}p)C(r)
\end{gathered} \tag{4.9}$$

$$
\begin{aligned}
&\left(2r^2A(r)B(r)\dot{B}(r)+4rA(r)B(r)^2\right)\dot{E}(r)+\left(-2r^2A(r)B(r)\ddot{B}(r)+r^2A(r)\dot{B}(r)^2\right.\\
&\quad\left.+(r^2\dot{A}(r)+2rA(r))B(r)\dot{B}(r)+(2r\dot{A}(r)+4A(r))B(r)^2\right)E(r)-4A(r)B(r)^2D(r)\\
&+4rA(r)B(r)\dot{C}(r)+\left(2r\dot{A}(r)B(r)-2rA(r)\dot{B}(r)\right)C(r)=4r^2A(r)B(r)^2\kappa pD(r)
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

$$
\begin{aligned}
&4r^2A(r)^2B(r)^3\ddot{E}(r)+\left(2r^2A(r)^2B(r)^2\dot{B}(r)+(8rA(r)^2-2r^2A(r)\dot{A}(r))B(r)^3\right)\dot{E}(r)\\
&+\left(4r^2A(r)^2B(r)^2\ddot{B}(r)-2r^2A(r)^2B(r)\dot{B}(r)^2+(4rA(r)^2-2r^2A(r)\dot{A}(r))B(r)^2\dot{B}(r)\right.\\
&\quad\left.-4rA(r)\dot{A}(r)B(r)^3\right)E(r)+\left(-2r^2A(r)B(r)^2\dot{B}(r)-4rA(r)B(r)^3\right)\dot{D}(r)\\
&+\left(-2r^2A(r)B(r)^2\dot{B}(r)+r^2A(r)B(r)\dot{B}(r)^2+(3r^2\dot{A}(r)-6rA(r))B(r)^2\dot{B}(r)\right.\\
&\left.+(6r\dot{A}(r)+4A(r)^2-4A(r))B(r)^3\right)D(r)+4r^2A(r)^2B(r)^2\ddot{C}(r)+\left((4rA(r)^2-2r^2A(r)\dot{A}(r))B(r)^2\right.\\
&\quad\left.-4r^2A(r)^2B(r)\dot{B}(r)\right)\dot{C}(r)+\left(-2r^2A(r)^2B(r)\ddot{B}(r)+3r^2A(r)^2\dot{B}(r)^2+(r^2A(r)\dot{A}(r)\right.\\
&\left.-2rA(r)^2)B(r)\dot{B}(r)+(2rA(r)\dot{A}(r)+4A(r)^3-4A(r)^2)B(r)^2\right)C(r)=8r^2A(r)^3B(r)^3\kappa pE(r)
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Observamos inmediatamente que estas ecuaciones diferenciales son de segundo orden con coeficientes variables,para $C(r)$,$D(r)$ y $E(r)$ lo que dificulta su solución, hasta para un programa de cálculo. Aun así para resolverlas utilizamos nuevamente a nuestro buen "amigo matemático"[1],que reemplazara los valores de $A(r)$ y $B(r)$ obtenidos en 4.8 para desarrollarlas.

Lamentablemente y después de varios intentos con algunos ansatz, no encontramos una solución distinta de la trivial, esto nos desanima pero es solo cosa de tiempo para encontrarlas.

---

[1] Cualquier programa matematico, como maple o maxima

Capítulo 5

Análisis

Capítulo 6

Conclusiones

Ante todo debemos considerar que este informe de práctica no está completo, falta aun el resultado principal, el cálculo de los coeficientes para $\tilde{g}_{\mu\nu}$ con simetría esférica. La intención principal era generar alguna predicción en un límite clásico y con ciertas simplificaciones, que pudiese ser observada y verificada, objetivo que no se ha logrado. Sin embargo hasta ahora hemos llevado un análisis del modelo Delta Gravity, considerando sus últimos avances y el estado actual del modelo. Delta Gravity es un modelo que brilla por su sencillez, permite recuperar fácilmente las ecuaciones de Einstein, pero la supera funcionando muy bien cuando se le aplica a la evolución del universo,y con la virtud de en el vacio ser renormalizable, lo que le da un nivel cuántico interesante(que su predecesora no tiene??).

Comenzamos este trabajo considerando un par de problemas que nuestro universo nos ha planteado, y Delta Gravity es un modelo que busca solucionarlos, hasta ahora va muy bien encaminado, pero debe soportar aun muchos estudios y seguir avanzando. Este trabajo era un intento por aportar en este sentido y no dudamos que en cierto grado lo será.

Bibliografía

[1] Perlmutter et al.1999 *:Astrophys. J. 517:565-586*.

[2] Riess et al.1998 *:Astron. J. 116:1009-1038*.

[3] Bertone et al.2005 *:Particle Dark Matter: Evidence, Candidates and Constraints*. Physics Reports, Volume 405, Issue 5-6, p. 279-390.

[4] Spergel et al.2003 *:Astrophys. J. Suppl. 148, 175*.

[5] Frieman et al.2008. *:Dark Energy and the Accelerating Universe.*. Annu. Rev. Astron. Astrophys.46:385432.

[6] H.Goldstein. *: Mecánica Clásica*. Ed. Reverté, 1996.

[7] Steven Weinberg. *: Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, 1972.

[8] W.Misner,S.Thorne and J.A Wheeler. *: Gravitation*. W.H.Freeman and Company, 1973.

[9] J.Alfaro.1997 *: BV Gauge Theories*. arXiv:hep-th 9702060.

[10] J.Alfaro and P.Labraña.2002 *: Semiclassical gauge theories*. Physical Review D, vol. 65, Issue 4, id. 045002

[11] P.Labraña.1999 *: Teorías de Gauge Semiclásicas*. Tesis presentada para grado academico de L.en Fisica, P.Universidad Catolica de Chile.

[12] G.t́Hooft and M. Veltman.1974 *:Ann. Inst. H. Poincare 20 (1974) 69.*

[13] J.Alfaro,P.González and R. Avila.1999 *:Quantization of Delta-Gravity*. En preparación.

[14] J.Alfaro.2010 *:Delta-Gravity and Dark Energy*. arXiv:1006.5765v1[gr-qc] 30 Jun 2010.

[15] L.Santalo. *:Vectores y tensores con sus aplicaciones*. Ed. Universitaria de Buenos Aires,1970.

[16] G.Birkhoff and S.Maclane. *:Algebra Moderna*. Ed.Vicens-Vives,Barcelona,1963.

[17] J.B.Fralegh and R.A Beauregard. *:Algebra Lineal*. Addison-Wesley iberoamericana,1987.

[18] E. Loedel. *:Fisica Relativista*. Ed.Kapeluz,Buenos Aires,1955.

[19] ed.por M. Livio. *:The Dark Universe,Matter,Energy and Gravity*. Cambrigde University Press,2003.

[20] J.D.Logan. *:Invariant Variational Principles*. Ed.Academic Press,1977.

[21] J.Cepa. *:Cosmologia Fisica*. Ed.Akal,2007.