



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE FÍSICA

Cromodinámica cuántica compactificada

por

PEDRO ALBERTO LABRAÑA MORAGA

Tesis presentada a la Facultad de Física
de la Pontificia Universidad Católica de Chile,
como requisito para optar al
grado académico de Doctor en Ciencias Exactas
con mención en Física

PROFESOR GUÍA : Dr. Jorge Alfaro
COMISIÓN EXAMINADORA : Dr. Marcelo Loewe
Dr. Marco Aurelio Díaz
Dr. Jorge Gamboa
Dr. Alexander A. Andrianov

Diciembre del 2004
SANTIAGO – CHILE

AGRADECIMIENTOS

Agradesco a mis padres.

A CONICYT etc

Resumen

En esta tesis se estudiaron propiedades de los mesones a partir de sus grados de libertad fundamentales (quarks y gluones) cuyas propiedades están determinadas por la Cromodinámica Cuántica (QCD). Con este propósito se generó un modelo efectivo de QCD en dos dimensiones, esto al considerar QCD en $4D$ y luego compactificar dos dimensiones espaciales en dos círculos de radios R pequeños y proyectar en el subespacio de los modos cero de K-K (Kaluza-Klein). El modelo que se obtiene es más simple que QCD_4 pero retiene propiedades importantes de él en orden de describir estados ligados de quarks.

Se demostró que este sistema induce una masa dinámica para los campos gluónicos transversales, campos escalares en la representación adjunta del grupo de color y se probó que esta masa diverge cuando el radio de compactificación R se hace pequeño.

Se encontró el propagador completo de los quarks, en límite quiral, demostrándose que el polo de estos es real. En este modelo los quarks no poseen propiedades taquiónicas, a diferencia de lo que ocurre en QCD_2 .

Se estudiaron estados ligados de quark-antiquark vía resolver la ecuación de Bethe-Salpeter. Con este objetivo se analizaron las amplitudes de scattering para los diferentes canales del modelo determinándose que el modelo posee cuatro clases de estados ligados. Para cada clase de estado ligado se determinó su espectro de masas y su vértice propio quark-antiquark-mesón.

Usando una adecuada representación de las matrices γ en $4D$ se pudo determinar la relación entre los espinores en $2D$ y $4D$. Esta relación nos permitió entender nuestros estados ligados en $2D$ en función de su manera de transformar respecto a Lorentz en dimensión $4D$. De esta manera se analizaron los mesones escalares y pseudoescalares $4D$ que nuestro modelo predice determinándose el espectro de masa en ambos casos. En particular se determinó que en el límite quiral el estado fundamental pseudoescalar es sin masa en concordancia con el rompimiento espontáneo de la simetría quiral de QCD_4 . Por otro lado el espectro de masas de los estados escalares es masivo en concordancia con la evidencia experimental.

RESUMEN

Índice general

Resumen	I
Introducción	v
Notación y Convenciones	xv
0.1. Notación y Convenciones en $4D$	xv
0.2. Notación y Convenciones en $2D$	xvi
1. Presentación del Modelo en $2D$	1
1.1. Compactificación de QCD_4 y Obtención del Modelo en $2D$	1
1.2. Simetrías Globales del Modelo	4
1.2.1. Simetrías Globales en $4D$	4
1.2.2. Simetrías Globales en $2D$	6
2. Cuantización del modelo	9
2.1. Coordenadas Cono de Luz y Fijación del Gauge	9
2.2. Determinación de las Masas de los Escalares	10
2.3. El Régimen del Modelo	13
3. Mesones	15
3.1. Las Matrices de Scattering	15
3.2. Ecuación de Bethe-Salpeter	18
4. Propagador Vestido de los Quarks	21
4.1. Autoenergía de los Quarks	21
4.2. Solución Perturbativa de $\chi(p)$	23
4.3. Solución No-Perturbativa de $\chi(p)$	24
5. Ecuación Homogénea de Bethe-Salpeter para $\Lambda(q;p)$	27
5.1. Ecuación de Bethe-Salpeter homogénea para Λ	27

INTRODUCCIÓN

5.2. El Vértice Propio	31
6. Ecuación de Autovalores Para $\phi(x)$	33
6.1. Funciones pares y Funciones Impares	33
6.2. Condiciones de Borde y Espectro Positivo	34
6.3. El Espectro de Autovalores	36
6.4. Comportamiento Asintótico del Espectro	39
7. Matrices de Scattering	43
7.1. Ecuación de Bethe-Salpeter inhomogénea para Λ	43
7.2. Amplitudes de Scattering Δ , Θ y Ω	47
7.3. Amplitudes de Scattering T	49
8. Resultados e Interpretación del Modelo	51
8.1. Estados Ligados $2D$	51
8.2. Interpretación del Modelo	53
9. Conclusiones	55
A. Reglas de Feynman	59
A.1. Reglas de Feynman en Notación Doble Línea	59
A.2. Reglas de Feynman en Notación Adjunta Normal	61
B. Notas del Capítulo 3	63
B.1. Ecuación de Bethe-Salpeter Amplitudes T_1 y T_4	63
B.2. Ecuación de Bethe-Salpeter Amplitudes T_5 y T_8	65
C. Notas Capítulo 5	69
C.1. Vértice Propio $\Theta(q, p)$	69
C.2. Vértice Propio $\Omega(q, p)$	70
C.3. Vértice propio $\Delta(q, p)$	70
D. Notas del Capítulo 7	73
D.1. Solución Ecuación Inhomogénea para $\Lambda_1(q, q'; p)$	73
E. Notación y convenciones	83
E.1. Relaciones Útiles	83
E.2. Notación y Convenciones en $4D$	84
E.3. Notación y Convenciones en $2D$	84
E.4. Coordenadas Cono de Luz	84

Introducción

Si observamos a la naturaleza veremos que en ella habitan un sinnúmero de objetos de diferentes formas, tamaños y propiedades y que estos a su vez interactúan entre si de muy diversas maneras. Ha sido una constante de la humanidad tratar de determinar relaciones entre los diversos fenómenos que la naturaleza nos presenta, tratando gradualmente de organizar las cosas, enlazando fenómenos que en principio lucen diferentes con la esperanza de poder de este modo entenderlos mejor.

Siguiendo este modo de pensar surge en forma natural la pregunta de si acaso es posible que los múltiples objetos que a diario vemos no sean el resultado de la unión de un número reducido de objetos más fundamentales, especies de ladrillos básicos, que aunque siendo pocos al combinarlos en diferentes cantidades y de diferentes maneras generan la totalidad de objetos que vemos en la naturaleza. Surge de esta forma el concepto de lo que es una partícula elemental. Esto es, un objeto sin estructura interna, ladrillo fundamental de la naturaleza.

De igual manera nos podemos preguntar si las diversas fuerzas que a diario vemos en nuestra experiencia común, como lo son por ejemplo la fuerza de gravedad, la resistencia que pone el viento al movimiento de un objeto, las fuerzas electroestáticas, la fuerza entre imanes, los diferentes tipos de fuerzas de roce, las fuerzas de contacto, no son acaso el resultado de la combinación de fuerzas más fundamentales y por lo mismo más simples. La respuesta a esta pregunta es sí. En la naturaleza se han determinado que existen cuatro fuerzas fundamentales de las cuales las restantes pueden, en principio, ser derivadas. Estas fuerzas son: La fuerza de gravedad, la fuerza electromagnética, la fuerza nuclear débil y la fuerza nuclear fuerte. De estas fuerzas nosotros sólo tenemos experiencia más o menos directa de las primeras dos, las restantes son fuerzas que actúan en el interior de los núcleos atómicos.

Respecto a la primera pregunta la respuesta en este momento también es afirmativa, aunque habría que agregar que se tardó en determinar cuales son estos ladrillos fundamentales, y de algún modo hasta hoy se puede argumentar que tal vez si miramos a mayor energía, lo que implica observar con mayor resolución, tal vez lo que hoy consideramos una partícula fundamental revela poseer una subestructura.

El primer miembro de estos ladrillos fundamentales en ser descubierto fue el electrón, des-

INTRODUCCIÓN

cubierto por J.J. Thomson en 1887. Las siguientes partículas subatómicas en ser descubiertas fueron el Protón (1919) y el Neutrón (1932) dando sustento a esta idea de la existencia de un número reducido de ladrillos fundamentales constituyentes de la materia. Sin embargo pronto se descubrió que la naturaleza no es tan simple y comenzaron a aparecer muchas más partículas que en principio también tendrían derecho a ser llamadas fundamentales. De este modo tenemos que en 1931 la primera de las denominadas antipartículas, el positrón es descubierto. Luego mientras la comunidad científica buscaba a las partículas mediadoras de la interacción fuerte predichas por H. Yukawa, los piones, aparece (1937) otra partícula con una masa similar a la de las partículas de Yukawa pero que no siente la interacción fuerte. A esta partícula se le denominó mesón μ o *muón* (el nombre mesón viene del hecho de que los valores de las masas de los mesones están entre los valores de las masas del electrón y del protón). Los piones de Yukawa, que son tres π^- , π^0 , π^+ , fueron finalmente encontrados en 1946. Luego aparecieron los Kaones que son partículas bastantes parecidas a los piones pero con masas mayores. Finalmente con la ayuda de los primeros aceleradores de partículas fueron apareciendo más y más partículas hadrónicas¹ hasta llegar a la década de los años 60's donde se conocían alrededor de cien partículas de este tipo.

De este modo tenemos que el panorama para los físicos de partículas a comienzos de los años sesenta parecía ya no ser tan prometedor. La idea original de que con número reducido de ladrillos fundamentales estaba construido nuestro mundo parecía derrumbarse ante la ploriferación de estas partículas hadrónicas. ¿Como podían ser elementales más de cien partículas, que además no parecían tener una relación clara unas con otras? Se dice que el famoso físico Italiano Enrico Fermi habría dicho: “si llego a adivinar esto me hubiera dedicado a la botánica”.

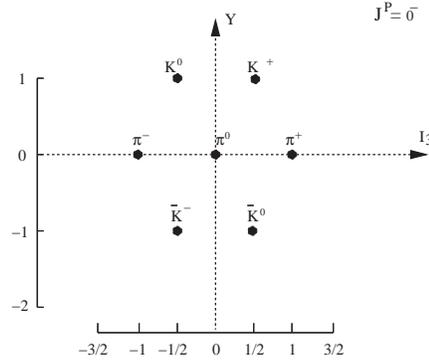
Para resolver este problema primero había que clasificar a los hadrones de una manera astuta. Murray Gell-Mann y el físico Israelí Yuval Ne'eman a comienzos de los años sesenta [1], [2] y [3] se convirtieron en los Dimitri Mendeleev de la era moderna al encontrar lo que sería el análogo de la tabla periódica de los elementos químicos, pero para la física de partículas, en particular para la física hadrónica, en lo que sería llamado el modelo del camino óctuple (nombre dado por M. Gell-Mann al modelo inspirandose en el Budismo).

En la formulación final del camino óctuple, dada por el mismo M. Gell-Mann e independientemente por G. Zweig en 1964, se postula que los hadrones no son partículas elementales, en cambio son partículas compuestas, estados ligados de otras partículas más pequeñas que en principio sí serían elementales y que M. Gell-Mann denominó *quarks*, nombre sacado de la enigmática frase “¡Tres quarks para Muster Mark!” del libro de James Joyce *Feynegan's Wake*. Esto porque en el modelo original habían tres variedades (sabores) de quarks; el quark up, el down y el strange.

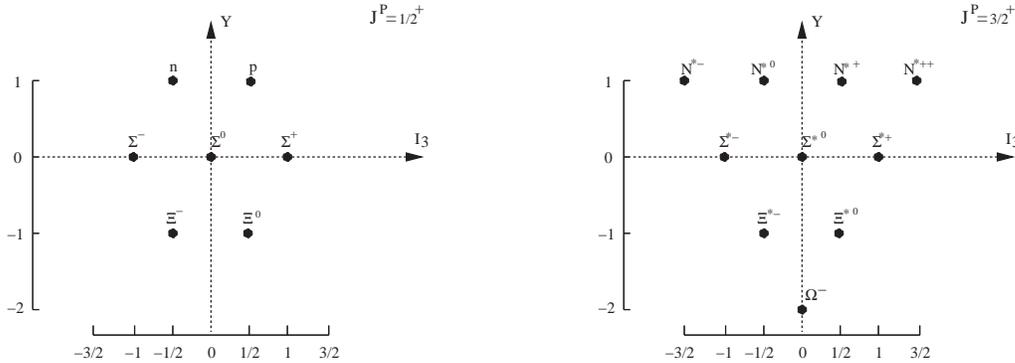
¹Los hadrones son las partículas que sienten la interacción fuerte.

INTRODUCCIÓN

En la formulación del camino óctuple los hadrones se pueden ordenar en octetos y decupletes de partículas del mismo espín y paridad. De este modo tenemos que los mesones² se ordenan en singletes y octetos, de la siguiente manera:



En cambio los bariones³ se ordenan en singletes, octetos y decupletes, de la siguiente manera:



Estas formas de ordenarse pueden ser naturalmente explicadas si se considera que los bariones y los mesones no son partículas elementales sino que son objetos compuestos. En particular los bariones son objetos compuestos por combinaciones de tres quarks y los mesones por combinaciones de un quark y un antiquark.

Con el formalismo del camino óctuple se logra explicar por qué los mesones y bariones se agrupan y ordenan de esta manera tan peculiar, además se da un orden al zoo de partículas hadrónicas, unido al hecho de que ya no se tienen más de cien partículas elementales, ya que los hadrones no son elementales ahora son los quarks que son muchos menos (seis en el modelo estándar) y además están de algún modo relacionados entre ellos formando familias.

Un hecho importante que ayudó a la consolidación del modelo de quarks fue el descubrimiento del barión Ω^- . En el tiempo en que M. Gell-Mann postuló la existencia de los quarks y ordenó los mesones y bariones en multipletes sólo se conocían nueve bariones, la décima

²Los mesones son partículas hadrónicas de espín entero. Ejemplo los piones.

³Los bariones son partículas hadrónicas de espín semientero. Ejemplo el protón.

INTRODUCCIÓN

partícula (en la parte más baja del decuplete) de carga -1 y extrañeza -3 no se conocía. M. Gellman predijo la existencia de este décimo barión y determinó su masa, también reconoció que la vida media de esta partícula debía ser mayor respecto de sus compañeros del decuplete esto porque Ω^- se desintegra debido a interacciones débiles. De este modo Gell-Mann les dijo a los físicos experimentales que existía un nuevo barión y les mostró donde debían buscarlo. Naturalmente el Ω^- fue encontrado en 1964 [4] con exactamente las propiedades que Gell-Mann había predicho.

Sin embargo faltaba explicar algunas cosas, en particular cual es la dinámica de estos quarks, es decir faltaba una teoría que diera una explicación a como interactúan los quarks entre si para formar los hadrones. Además existía el problema de que los quarks como partículas independientes no aparecían en los experimentos. La solución a estos problemas vino de promover a la invariancia global de color de la teoría de quarks a una invariancia local de gauge. Los primeros en poner de manifiesto que las teorías de Yang-Mills eran ideales para describir las interacciones entre los quarks fueron M. Gell-Mann, H. Fritzsch y Y. Nambu. Por su parte la comunidad científica fue aceptando en forma gradual que ésta era la solución para el problema de las interacciones fuertes hasta que finalmente esta idea fue completamente aceptada con el advenimiento de la libertad asintótica y el descubrimiento de la partícula J/Ψ en 1974.

La invarianza global de color fue originalmente implementada por O. Greenberg en 1964 [6] para solucionar un problema del modelo de quarks que consistía en que a pesar de que los quarks tiene espín $1/2$ no parecían comportarse como fermiones. En un decuplete, por ejemplo, el Ω^- contiene tres quarks idénticos con espín rotando en la misma dirección. Esto debía estar prohibido por el principio de exclusión de Pauli. Sin embargo en la nueva teoría, cada uno de los quarks en el interior de una partícula tal como el Ω^- tienen un color diferente y, por lo tanto, uno puede demostrar matemáticamente que ellos tienen que formar decupletes y octetos exactamente igual que los bariones.

De este modo nace la Cromodinámica Cuántica (QCD) por sus siglas en inglés al introducir el color como una invariancia local a la teoría de los quarks. Como los colores son tres entonces la teoría es invariante local $SU(3)$ donde los campos de materia son los quarks y los campos de gauge mediadores de las interacciones entre los quarks son ocho campos vectoriales sin masa denominados gluones.

Fuerza Entre Quarks

Como hemos mencionado QCD [7] describe en forma correcta los fenómenos más energéticos que ocurren en el interior de los hadrones en particular el fenómeno de la libertad asintótica. ¿Pero que sucede respecto de la hipótesis del confinamiento? ¿Es posible demostrar trabajando de primeros principios desde QCD el confinamiento del color? O dicho de otra

manera, trabajando con QCD ¿Es posible obtener el potencial entre los quarks? y de obtenerse ¿Es este potencial confinante? Lamentablemente el confinamiento es un fenómeno que está fuera del rango de validez de la teoría de perturbaciones de QCD . Como consecuencia de esto no existe una expresión analítica para las fuerzas que mantiene unidos a los quarks en el interior de los hadrones que se pueda derivar de primeros principios usando QCD .

Veamos porque un análisis perturbativo falla. Para esto estudiaremos un estado $q\bar{q}$ (mesón) y determinaremos el potencial entre los quarks en un límite no-relativista. Para esto trataremos los estados ligados con la ayuda de la ecuación de Schrödinger:

$$H\Psi = E\Psi, \quad H = m_1 + m_2 + \frac{p^2}{2\mu} + V(r). \quad (1)$$

En esta aproximación el mayor desafío es determinar $V(r)$. Considerando el scattering elástico de las partículas constituyentes la parte del potencial que es asequible en forma perturbativa se puede determinar siguiendo los siguientes pasos [5]:

i) Calcular la amplitud de scattering T_{fi} :

$$S_{fi} = \langle f, out | i, in \rangle = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T_{fi}, \quad (2)$$

al menor orden no trivial en teoría de perturbaciones.

ii) Realizar el límite no-relativista.

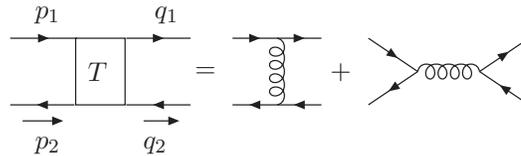
iii) Obtener el potencial $V(r)$ como la transformada de Fourier de T_{fi}

$$V(r) = -(2\pi)^3 \int d^3k e^{-ik \cdot r} T_{fi}(k). \quad (3)$$

Luego en el caso de un estado $q\bar{q}$ debemos calcular el scattering:

$$q_i(p_1, \sigma_1) + \bar{q}_j(p_2, \sigma_2) \rightarrow q_k(q_1, \tau_1) + \bar{q}_l(q_2, \tau_2), \quad (4)$$

donde los índices $i, j, \dots = 1, 2, 3$ representan al color. Como los estados físicos son singletes de color introducimos la función de color de los mesones $(1/\sqrt{3})\delta_{ij}$. Los diagramas que debemos calcular son los siguientes:



Debido a a que la amplitud T está en el singlete de color tenemos que sólo el primero de los diagramas contribuirá. De este modo obtenemos la siguiente expresión para el potencial:

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}. \quad (5)$$

INTRODUCCIÓN

Podemos notar que éste es un potencial tipo Coulomb, el cual no es confinante. De este modo podemos apreciar que por cálculos perturbativos sólo podemos determinar la parte del potencial que es relevante a pequeñas distancias; si queremos determinar la forma del potencial para valores grandes de r se deben considerar cálculos no-perturbativos. En particular para determinar el potencial entre los constituyentes de los mesones, se debe de determinar, en principio, a todo orden la matriz de scattering $q\bar{q}$.

Una manera de realizar esto es con la denominada ecuación de Bethe-Salpeter [8], ver también [21]-[24]. En esta formulación la idea es determinar a todo orden la matriz de scattering T no al considerar la suma infinita de todos los diagramas de Feynman que contribuyen a ella, sino que encontrando una ecuación para la amplitud T que represente dicha suma infinita de diagramas. De este modo cambiamos el problema de sumar infinitos diagramas por el problema de resolver una ecuación integral. Por ejemplo los diagramas que contribuyen a la amplitud T en QCD son de la siguiente forma:

Luego si de estos diagramas sólo consideramos los diagramas tipo escalera tendremos que la amplitud T satisface la siguiente ecuación:

Donde como es usual en este tipo de aproximación hemos reemplazado los propagadores libres de los quarks por los propagadores vestidos, los cuales deben ser determinados en forma independiente. Esta es la ecuación de Bethe-Salpeter que satisface la amplitud T la cual al ser resuelta nos permite determinar las propiedades de la amplitud de scattering más allá de la teoría de perturbaciones. En particular los estados ligados pueden identificarse en este esquema a través de la aparición de polos en T . Con la ayuda de la ecuación homogénea de Bethe-Salpeter, la cual en esta aproximación puede asumir la forma de un problema de autovalores, es posible determinar las masas de los estados ligados y las funciones de onda de estos. Desde luego que se debe justificar de algún modo el hecho de haber considerado sólo los diagramas tipo escalera, pero esto es un punto que discutiremos luego.

De este modo tenemos que si deseamos estudiar estados ligados en una formulación relativista usando teoría cuántica de campos éste es el esquema que debemos utilizar. La ecuación

de Bethe-Salpeter es una ecuación formalmente exacta para el problema de los estados ligados de dos cuerpos, que provee un formalismo covariante para el estudio cuantitativo de estos estados.

Sin embargo debemos decir que en términos prácticos este tipo de esquema no siempre es aplicable. En particular la ecuación de Bethe-Salpeter generalmente no puede ser resuelta y por otro lado el núcleo de interacción que aparece en esta ecuación no puede ser derivado directamente desde QCD . Sin embargo existen algunos modelos [14]-[20] donde este esquema puede ser desarrollado y por otro lado es posible considerar algunas aproximaciones para esta ecuación (no siempre muy bien justificadas) de modo de aplicar este esquema a QCD [10]-[13], en particular es común considerar la aproximación de retener sólo las contribución de los diagramas tipo escalera a T y reemplazar los propagadores libres de los quarks por los propagadores vestidos, todo esto unido en muchos casos a la aproximación de considerar que el núcleo de interacción es instantáneo, aproximación que es denominada solución estática. Para una revisión de este tema en el contexto de QCD ver [25].

En este contexto es que QCD en $2D$ (QCD_2) [30] en el Límite N_c^4 grande [29] aparece como un modelo donde la aproximación de considerar sólo los diagramas tipo escalera para la amplitud T está completamente justificada. Esto unido al hecho de que el núcleo de la interacción para un gauge particular denominado gauge cono de luz es instantáneo, hace que este modelo sea un precioso laboratorio para estudiar estados ligados siguiendo el esquema de la ecuación de Bethe-Salpeter. Este fue precisamente el trabajo de G. 't Hooft [30] quien en el límite N_c grande estudia estados ligados $q\bar{q}$ resolviendo la ecuación homogénea de Bethe-Salpeter determinando de este modo el espectro de masa y las funciones de onda de estos mesones en $2D$. En particular de este trabajo se desprende que la teoría es confinante y que los estados ligados poseen un espectro de masa discreto, el cual sigue una trayectoria de Regge aproximadamente lineal. Todas estas propiedades que se esperan que QCD en $4D$ posea.

Durante los años QCD_2 ha sido sujeto de innumerables investigaciones que cubren desde el estudio del confinamiento de los quarks, factores de forma hadrónicos, deep-inelastic scattering [31, 32], hadron-hadron scattering [33], el rol de los instantones y solitones [34, 35], estados de muchos sabores [36], condensados de quarks [37] y física de quark pesados [38]. Por otro lado la versión bosonizada de QCD_2 ha sido utilizada para la descripción de los espectros mesónicos y bariónicos [39, 40, 41] y para el estudio del rompimiento espontáneo de la simetría quiral [40, 42].

También se ha demostrado que QCD_2 en el límite N_c grande posee una interpretación en términos de una teoría de cuerdas [43] exhibiendo de este modo importantes propiedades que se esperan encontrar a partir del verdadero QCD en cuatro dimensiones. Una interesante revisión de QCD_2 se puede encontrar en [44] también en [45], donde QCD_2 aparece tratada

⁴Donde N_c es el número de colores.

INTRODUCCIÓN

dentro del contexto de otros modelos en $2D$.

Sin embargo QCD_2 es demasiado simple para describir ciertos aspectos realistas de una teoría de gauge en dimensión mayor. Por ejemplo en una teoría en dos dimensiones no existen gluones físicos y tanto el momentum angular como el espín están ausentes. Además en QCD_2 existe el problema de las propiedades taquiónicas de los quarks [30] y la ausencia de una versión realista del rompimiento espontáneo de la simetría quirial, situación que se manifiesta en el desacoplamiento de los piones del resto de los estados [46]. Esto es una clara señal de que necesitamos más información proveniente de las dimensiones extras en order de obtener una mejor imagen de QCD mediante el uso de un modelo en dos dimensiones.

De este modo surge la pregunta natural de si es posible enriquecer a QCD_2 de alguna manera de modo de otorgarle más propiedades físicas, pero esto sin volverlo un modelo intratable. Dentro de este esquema es que ha sido sugerido que la introducción de campos de materia en la representación adjunta del grupo de gauge [47, 48] provee la información de los grados de libertad transversales del gluón, característicos de una teoría de gauge en dimensión mayor, otorgando de este modo una imagen más adecuada de las interacciones fuertes.

En esta tesis se estudió un modelo en $2D$ que es una versión extendida de QCD_2 . Este modelo es obtenido de QCD en $4D$ al compactificar dos dimensiones espaciales en un 2-toro y no considerar los modos pesados de K-K (Kaluzza-Klein) [50]. Como consecuencia obtenemos un modelo en dos dimensiones que se asemeja a la teoría real en dimensión mayor, esto debido a que hemos introducido en forma natural campos de materia en la representación adjunta a QCD_2 . Estos nuevos campos son escalares respecto de la teoría en $2D$ y reproducen los efectos transversales de los gluones físicos. Además este modelo posee una estructura espinorial más rica que QCD_2 otorgando una mejor resolución de los estados escalares y vectoriales mismos que pueden ser clasificados por sus propiedades bajo las transformaciones de Lorentz en $4D$.

Este modelo es analizado en el gauge cono de luz y usando la aproximación N_c grande. Las contribuciones de las dimensiones extras están controladas por las masas, radiativamente inducidas, de los campos gluónicos escalares. Esto debido a que la información respecto de la existencia de las dimensiones transversales está representada por la presencia de estos campos escalares. En nuestras aproximaciones consideraremos el límite en que estas masas son grandes.

Veremos que este modelo otorga una aproximación más razonable al régimen del rompimiento espontáneo de la simetría quirial en QCD_4 ; en particular veremos que la sola inclusión de los modos más livianos de K-K cataliza la generación de una masa dinámica para los quarks que permite solucionar el problema de tener quarks taquiónicos como sucede en QCD_2 .

También veremos que en el límite quiral del modelo existe un estado ligado $q\bar{q}$ pseudoescalar respecto de $4D$ de masa cero, el cual no está sometido a una restricción que le prohíba interactuar con los demás estados masivos del modelo, como de hecho ocurre en QCD_2 .

Esta tesis está escrita de la siguiente manera, en el Capítulo 1 es derivado el modelo extendido de QCD_2 al compactificar dos dimensiones espaciales en un 2-Toro y proyectar en el sub-espacio de los modos cero de K-K. También se describen las principales propiedades a nivel clásico que el modelo posee. En el Capítulo 2 se comienzan a estudiar las propiedades cuánticas del modelo, en particular se determinan las reglas de Feynman y se demuestra que los campos escalares del modelo efectivamente adquieren masa en forma dinámica. En el Capítulo 3 se comienzan a estudiar los mesones del modelo. Con este objetivo se estudian las amplitudes de scattering $q\bar{q}$ para los diferentes canales y se determinan las ecuaciones de Bethe-Salpeter que estas amplitudes satisfacen. En el Capítulo 4 se determina el propagador vestido de los quarks por medio de solucionar la ecuación de Schwinger-Dyson para la autoenergía de los quarks. Veremos que existen dos tipos de soluciones a esta ecuación y demostraremos que al considerar la solución no-perturbativa se obtienen quarks con masas reales. En el Capítulo 5 se resuelve la ecuación homogénea de Bethe-Salpeter que satisface una de las amplitudes de scattering y se determina uno de los vértices propios quark-antiquark-mesón junto con la ecuación integral de autovalores que determina las masas de los estados ligados de ese canal, ecuación que es estudiada y resuelta en el Capítulo 6. Con estos resultados en el Capítulo 7 son determinadas las amplitudes de scattering del modelo, justificando la interpretación del vértice propio y del espectro de masa determinados en los Capítulos anteriores.

En el Capítulo 8 se da un resumen de los principales resultados respecto de las amplitudes de scattering y espectros de masa del modelo en $2D$. También se da una prescripción para interpretar estos resultados respecto de la teoría en $4D$. En particular se identifican los estados ligados escalares y pseudoescalares en $4D$ respecto de los estados ligados de nuestro modelo en $2D$. En el Capítulo 9 son presentadas las conclusiones del trabajo.

NOTACIÓN

Notación y Convenciones

El grupo de simetría interno local de QCD así como de nuestro modelo en $2D$ es $SU(N_c)$ de color, donde N_c es el número de colores. Los generadores de este grupo T^A y las constantes de estructura C_C^{AB} satisfacen la siguiente relación:

$$[T^A, T^B] = i C_C^{AB} T^C, \quad (6)$$

donde $A = 1, \dots, N_c^2 - 1$. Para las constantes de estructura se escogió la siguiente normalización:

$$tr(T^A T^B) = \delta^{AB}, \quad (7)$$

que resulta de utilidad en el tratamiento del límite N_c grande.

Las matrices de Pauli se definen de la manera usual:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

0.1. Notación y Convenciones en $4D$

Un vector en el espacio-tiempo $4D$ tiene componentes (x^0, x^1, x^2, x^3) donde la métrica del espacio tiempo es $g_{\mu\nu} = \{+, -, -, -\}$.

Se consideró la siguiente representación para las matrices γ de Dirac:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_3 &= \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & -i\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (9)$$

donde σ^1, σ^2 y σ^3 son las matrices de Pauli.

Las matrices γ satisfacen:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (10)$$

NOTACIÓN

Esta representación para las matrices γ será de utilidad para los propósitos de realizar la reducción de Kaluza-Klein.

0.2. Notación y Convenciones en $2D$

Un vector en el espacio-tiempo $2D$ tiene componentes (x^0, x^1) donde la métrica del espacio-tiempo es $g_{\mu\nu} = \{+, -\}$.

En $2D$ consideramos la siguiente representación para las matrices de Dirac, inherente de (9):

$$\gamma^0 = \sigma^1, \gamma^1 = i\sigma^2, \gamma^5 = -\sigma^3. \quad (11)$$

En dimensión $2D$ es conveniente trabajar en coordenadas cono de luz (x^\pm) , que se definen a partir de la coordenadas usuales de la siguiente manera:

$$x^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 \pm x^1). \quad (12)$$

El tensor métrico en estas coordenadas es:

$$g_{+-} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

En virtud de este tensor métrico las coordenadas cono de luz satisfacen que $x^+ = x_-$ y $x^- = x_+$. El producto punto entre dos vectores en estas coordenadas es:

$$x^\mu y_\mu = x^+ y_+ + x^- y_- = x_- y_+ + x_+ y_- . \quad (14)$$

La norma al cuadrado de un vector arbitrario \vec{V} en coordenadas cono de luz es:

$$V^\mu V_\mu = 2V_+ V_- = 2V^+ V^- . \quad (15)$$

También es conveniente escribir las matrices γ en estas coordenadas, que se definen de la siguiente manera:

$$\gamma^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma^0 \pm \gamma^1). \quad (16)$$

Las matrices γ en coordenadas cono de luz satisfacen:

$$\{\gamma^+, \gamma^-\} = 2 \quad (17)$$

$$(\gamma^+)^2 = (\gamma^-)^2 = 0. \quad (18)$$

Una resumen más detallado de nuestras notaciones y definiciones así como un compendio de algunas relaciones útiles se encuentra en el apéndice E

Capítulo 1

Presentación del Modelo en $2D$

En este capítulo se derivará el modelo extendido de QCD en $2D$ y se demostrarán algunas propiedades generales de éste. En particular se realizará una derivación formal del modelo a partir de la acción de la Cromodinámica Cuántica en $4D$ al compactificar dos dimensiones espaciales en un 2-Toro. También se estudiarán las simetrías que el modelo posee a nivel clásico.

1.1. Compactificación de QCD_4 y Obtención del Modelo en $2D$

Comenzamos con la acción de QCD en dimensión $3+1$ considerando un sabor de quarks. La acción es la siguiente:

$$S_{QCD} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4\tilde{g}^2} \text{tr}(G_{\mu\nu}^2) + \bar{\Psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi \right], \quad (1.1)$$

donde la traza es respecto a los índices de simetría internos.

Esta acción es invariante local de gauge respecto del grupo de simetría $SU(N_c)$ de color. En esta acción los campos de gauge G_μ están en la representación adjunta de $SU(N_c)$:

$$G_\mu = G_\mu^A T^A = G_\mu^A (T^A)^a_b, \quad (1.2)$$

donde $a = 1 \cdots N_c$ es un índice de la representación fundamental del grupo. Los fermiones (quarks) Ψ están en la representación fundamental del grupo de color $SU(N_c)$.

El tensor de campo $G_{\mu\nu}$ y la derivada covariante D_μ se definen de la manera usual:

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu - i[G_\mu, G_\nu], \quad (1.3)$$

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu - iG_\mu) \Psi. \quad (1.4)$$

Con la ayuda del proyector:

$$P_{1,2} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^2 \gamma^5), \quad (1.5)$$

y de la representación de las matrices γ en $4D$, el espinor de cuatro componentes Ψ puede ser descompuesto de la siguiente manera:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

En este momento procederemos a realizar una derivación formal de nuestro modelo en $2D$. Para esto consideraremos que dos de las dimensiones espaciales, a saber, x_2 y x_3 están compactificadas en un 2-Toro:

$$0 \leq x_2 \leq L = 2\pi R, \quad (1.7)$$

$$0 \leq x_3 \leq L = 2\pi R. \quad (1.8)$$

Luego asumiremos que L es suficientemente pequeño en orden de obtener un modelo efectivo en $2D$ [50]. Siguiendo este esquema consideraremos que todos los campos en (1.1) son periódicos en el intervalo $0 \leq x_{1,2} \leq L$. Luego expandimos los campos en modos de Fourier respecto de las dimensiones compactificadas:

$$G_\mu(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{2\pi i}{L}[nx_2 + mx_3]\right\} G_\mu^{(nm)}(x_0, x_1), \quad (1.9)$$

$$\Psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{\frac{2i\pi}{L}(nx_2 + mx_3)\right\} \Psi^{(nm)}(x_0, x_1). \quad (1.10)$$

Asumimos el límite de bajas energías:

$$|p_{0,1}| \ll m_{KK}^{n,m} = \frac{2\pi}{L} \sqrt{n^2 + m^2}. \quad (1.11)$$

Luego si escogemos el cutoff de dos dimensiones $\Lambda \simeq \frac{1}{R} = \frac{2\pi}{L}$ de modo que sea mayor que el momentum típico $p_{0,1}$ podremos despreciar los modos masivos de K-K. De esta manera en adelante todos los campos relevantes en las dimensiones espacio-temporales que no han sido compactificadas serán modos cero de Kaluza-Klein.

Luego al retener sólo los modos cero de K-K obtenemos la siguiente acción efectiva en $2D$:

1.1. COMPACTIFICACIÓN DE QCD_4 Y OBTENCIÓN DEL MODELO EN $2D$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \int d^2x \frac{L^2}{4\tilde{g}^2} \text{tr} [-F_{\mu\nu}^2 + 2(D_\mu\phi_1)^2 + 2(D_\mu\phi_2)^2 + 2[\phi_1, \phi_2]^2] \\
&+ L^2 [\bar{\psi}_1 (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi_1 + \bar{\psi}_2 (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi_2 \\
&- i(\bar{\psi}_1 \gamma^5 \phi_1 \psi_2 + \bar{\psi}_2 \gamma^5 \phi_1 \psi_1) - i(\bar{\psi}_1 \gamma^5 \phi_2 \psi_1 - \bar{\psi}_2 \gamma^5 \phi_2 \psi_2)].
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Es decir una acción en $2D$ donde aparecen un campo de gauge usual A_μ dos campos escalares ϕ_1 y ϕ_2 , campos de materia en la representación adjunta del grupo $SU(N_c)$, y dos espinores de dos componentes cada uno ψ_1 y ψ_2 en la representación fundamental de $SU(N_c)$. Los campos en (1.12) se definen a partir de los campos originales en (1.1) de la siguiente manera:

$$A_\mu(x_0, x_1) := G_\mu^{(00)}(x_0, x_1) \quad \mu = 0, 1 \tag{1.13}$$

$$\phi_1(x_0, x_1) := G_2^{(00)}(x_0, x_1) \tag{1.14}$$

$$\phi_2(x_0, x_1) := G_3^{(00)}(x_0, x_1) \tag{1.15}$$

$$\psi_{1,2} := P_{1,2} \Psi^{(00)}. \tag{1.16}$$

Las matrices γ que aparecen en (1.12) corresponden a las matrices γ en $2D$, cuya representación fue definida previamente en (11).

Escalamos los campos de la siguiente forma:

$$\frac{L}{\tilde{g}^2} A_\mu \longrightarrow A_\mu, \tag{1.17}$$

$$L \psi \longrightarrow \psi, \tag{1.18}$$

de manera de obtener que en los vértices de (1.12) aparezca la expresión $\frac{\tilde{g}}{L}$. Luego definimos la constante de acoplamiento g de nuestro modelo de la siguiente manera:

$$\frac{\tilde{g}}{L} = \frac{g}{\sqrt{N_c}}. \tag{1.19}$$

Se ha escogido que la constante de acoplamiento sea g en vez de $\frac{\tilde{g}}{L}$ debido a que deseamos trabajar con una teoría que posea un sensible (y no trivial) límite N_c grande [26]. En particular en nuestras aproximaciones consideraremos los límites $N_c \rightarrow \infty$ y $L \rightarrow 0$ pero manteniendo fijo el valor de g .

De este modo la acción para nuestro modelo en $2D$ será:

$$\begin{aligned}
S_2 &= \int d^2x \text{tr} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} (D_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2} (D_\mu\phi_2)^2 \right] + \bar{\psi}_1 (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi_1 \\
&+ \bar{\psi}_2 (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi_2 - i\frac{g}{\sqrt{N_c}} (\bar{\psi}_1 \gamma^5 \phi_1 \psi_2 + \bar{\psi}_2 \gamma^5 \phi_1 \psi_1) \\
&- i\frac{g}{\sqrt{N_c}} (\bar{\psi}_1 \gamma^5 \phi_2 \psi_1 - \bar{\psi}_2 \gamma^5 \phi_2 \psi_2) + \frac{g^2}{2N_c} \text{tr}[\phi_1, \phi_2]^2.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

CAPÍTULO 1. PRESENTACIÓN DEL MODELO EN 2D

El tensor de campo $F_{\mu\nu}$ y la derivada covariante D_μ en 2D quedan definidos como sigue:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i \frac{g}{\sqrt{N_c}} [A_\mu, A_\nu], \quad (1.21)$$

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - i \frac{g}{\sqrt{N_c}} [A_\mu, \phi], \quad (1.22)$$

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu - i \frac{g}{\sqrt{N_c}} A_\mu \right) \psi. \quad (1.23)$$

Como se puede apreciar en nuestro modelo Ec.(1.20) está incluido el Lagrangiano de QCD en 2D (QCD_2) además aparecen campos escalares de materia en la representación adjunta del grupo $SU(N_c)$ que corresponden a los grados de libertad transversales de los gluones en 4D y tenemos dos “tipos” (sabores) de quarks en 2D. En principio los campos escalares no tienen masa, pero la simetría local de gauge admite un término de masa para ellos, a diferencia de lo que ocurre con el campo de gauge A_μ que se mantiene sin masa. Demostraremos que los campos escalares efectivamente adquieren una masa y que ésta depende del radio de compactificación R de modo que si $R \rightarrow 0$ ella diverge pero siempre manteniéndose menor que la masa de los estados masivos de K-K ($m_{KK} \sim 1/R$) lo que deviene en un desacoplo rápido de los modos pesados de K-K, pero un desacoplo moderado de los campos escalares ϕ_i en este límite. Si los campos escalares se desacoplan de la teoría entonces nuestro modelo se aproxima simplemente a lo que sería QCD_2 con dos sabores de quarks, y se puede decir que en este límite ($R \rightarrow 0$) nuestro modelo no nota las dimensiones extras, aunque como veremos existen interesantes resultados no-perturbativos diferentes de los obtenidos con QCD_2 que persisten aunque $R = 0$.

1.2. Simetrías Globales del Modelo

En esta sección estudiaremos las simetrías globales y corrientes conservadas del modelo. Estos resultados serán de utilidad cuando deseemos estudiar estados ligado de quarks ya que nos permitirán clasificarlos.

1.2.1. Simetrías Globales en 4D

Comenzaremos con las simetrías globales de QCD para el caso de un sabor de quarks. Podemos ver de (1.1) que este Lagrangiano es invariante bajo la siguiente transformación global $U(1)$:

$$\Psi \longrightarrow e^{i\theta} \Psi, \quad (1.24)$$

donde θ es un parámetro que no depende de x . Ahora si $m = 0$ este Lagrangiano es invariante bajo el siguiente par de transformaciones:

1.2. SIMETRÍAS GLOBALES DEL MODELO

$$\Psi_L \longrightarrow e^{i\theta} \Psi_L, \quad (1.25)$$

$$\Psi_R \longrightarrow e^{i\beta} \Psi_R, \quad (1.26)$$

Es decir bajo una transformaciones del tipo (1.24) pero donde los espinores izquierdos y derechos pueden rotar en forma independientes. La transformación (1.24) se obtiene cuando $\theta = \beta$. Los espinores izquierdos y derechos se definen de la manera usual a partir de la matriz γ^5 en $4D$:

$$\Psi_{L,R} = \frac{1}{2} [1 \pm \gamma^5] \Psi. \quad (1.27)$$

Es tradicional y conveniente definir la siguiente transformación:

$$\Psi \longrightarrow e^{i\theta\gamma^5} \Psi, \quad (1.28)$$

de modo de trabajar con las transformaciones (1.24) y (1.28) que dan cuenta de las mismas simetrías que (1.25) y (1.26). Las corrientes asociadas a estas transformaciones son:

$$J^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi, \quad (1.29)$$

$$J^{\mu 5} = \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \Psi. \quad (1.30)$$

La corriente axial (a veces llamada quiral) $J^{\mu 5}$ es conservada sólo si $m = 0$, en cambio la corriente vectorial J^μ es siempre conservada.

Si consideramos a QCD con todos sus sabores de quarks notaremos que debido al hecho de que la masa de los quarks up y dow es muy pequeña QCD posee una simetría quiral $U(1) \times U(1) \times SU(2) \times SU(2)$ aproximada muy buena para estos dos sabores. Es decir podemos multiplicar por una fase a los espinores o los podemos “rotar” respecto al plano (up, down), pero ademas podemos hacer esto transformando en forma independiente los espinores derechos e izquierdos y todo esto es una simetría aproximada pero buena del modelo.

Ahora una de las propiedades más interesantes de QCD es que esta simetría quiral debe estar espontáneamente rota, de modo de dar una explicación al hecho de que la masa de los piones sea tan pequeña en comparación con la masa de los demás hadrones, en particular si se les compara con la masa del η' . Esto es debido a que los piones serían los bosones de Goldstone asociados al rompimiento espontáneo de la simetría quiral $SU(2) \times SU(2)$ de Isospin, que se rompe a su parte diagonal $SU(2)$. En cambio el η' esta asociado con la corriente axial $U(1)$ que no se conserva debido a la anomalía. De este modo el η' no es un bosón de Goldstone y puede tener una masa grande.

Volviendo al caso de QCD con un solo sabor nosotros esperamos que la simetría quiral se rompa espontáneamente al considerar el límite quiral ($m \rightarrow 0$) dando lugar a la aparición

CAPÍTULO 1. PRESENTACIÓN DEL MODELO EN 2D

de un mesón pseudoescalar sin masa equivalente al pión. Esto puede ocurrir debido a que nosotros trabajaremos en el límite N_c grande donde el término de la anomalía en la corriente axial $U(1)$ es irrelevante, su efecto sólo aparece en el siguiente orden en $1/N_c$ [27].

1.2.2. Simetrías Globales en 2D

Ahora estudiaremos las simetrías globales del modelo en 2D y como las simetrías de QCD (1.1) se ven reflejadas en él.

Al igual que QCD_2 el modelo (1.20) posee la siguiente simetría $U(1)$:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \longrightarrow e^{i\theta} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

La corriente conservada asociada a esta transformación $U(1)$ es la siguiente:

$$J^\mu = \bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_1 + \bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_2. \quad (1.32)$$

Sin embargo la versión quirral de esta transformación no es una simetría del modelo, aún si consideramos el límite quirral, a diferencia de lo que ocurre en QCD_2 . Esto debido a que los términos de interacción entre los fermiones y los campos escalares violan explícitamente la simetría quirral $U(1)$.

Nuestro modelo en 2D posee otra simetría debido al rompimiento de la simetría de Lorentz en 4D $SO(1,3)$ a $SO(1,1) \times O(2)$ en 2D, donde ahora $O(2)$ es una simetría interna del modelo. Las transformaciones asociadas a esta simetría son:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \longrightarrow e^{i\theta \hat{T}} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \longrightarrow e^{-2i\theta \hat{T}} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

donde $\hat{T} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

La corriente conservada asociada a esta simetría es:

$$\tilde{J}^\mu = i(\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2 - \bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1) + tr [2(\partial^\mu \phi_2 - i[A^\mu, \phi_2])\phi_1 - 2(\partial^\mu \phi_1 - i[A^\mu, \phi_1])\phi_2]. \quad (1.35)$$

En el límite $m = 0$ la versión quirral de esta transformación $O(2)$ es una simetría del modelo y de hecho corresponde a la proyección de la simetría quirral $U(1)$ de QCD en 4D a nuestro modelo en 2D.

1.2. SIMETRÍAS GLOBALES DEL MODELO

La transformación quiral $O(2)$ es:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \longrightarrow e^{i\theta \hat{T}\gamma_5} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (1.36)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

La corriente conservada asociada a esta simetría es:

$$\tilde{J}^{\mu 5} = i(\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \gamma^5 \psi_1 - \bar{\psi}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \psi_2). \quad (1.38)$$

Como hemos mencionado esta corriente está relacionada con la simetría quiral $U(1)$ de QCD_4 . En particular podemos notar que la corriente (1.38) corresponde a la corriente quiral $U(1)$ de QCD_4 (1.30) escrita respecto de los espinores y matrices γ de $2D$.

Capítulo 2

Cuantización del modelo

En este capítulo comenzaremos a estudiar las propiedades cuánticas del modelo. En particular determinaremos los propagadores libres de los campos de gauge y espinoriales y el propagador de los campos escalares, dando una prescripción para determinar las masas, radiativamente inducidas de estos campos escalares. Demostraremos que esta masa diverge cuando el radio de compactificación se hace pequeño produciendo que los campos escalares se desacoplen del resto de la teoría. También en este capítulo definiremos el parámetro de expansión de nuestras futuras aproximaciones.

2.1. Coordenadas Cono de Luz y Fijación del Gauge

Como ha sido mencionado en la introducción, en $2D$ no existen campos de gauge físicos. Esto se debe a que no es posible satisfacer la condición de transversalidad del campo A_μ . Esto significa que el campo A_μ en $2D$ no es una variable dinámica, sino una ligazón, y en principio debe eliminarse de la teoría antes de escribir a ésta en una forma canónica. Sin embargo, antes de discutir este tema en más detalle escribiremos el modelo en coordenadas cono de luz. También, aprovechando el hecho de que en $2D$ es posible escoger un gauge tal que $[A_\mu, A_\nu]$ se anule, simplificaremos el modelo eliminando la autointeracción entre los gluónes.

Definimos las componentes del campo de gauge en coordenadas cono de luz de la siguiente manera:

$$A^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A^0 \pm A^1). \quad (2.1)$$

Escogemos el gauge $A_- = A^+ = 0$, denominado gauge cono de luz. Este gauge tiene la ventaja de que elimina la autointeracción del campo de gauge y además no requiere de la introducción de campos fantasmas al ser una fijación de gauge lineal [31].

CAPÍTULO 2. CUANTIZACIÓN DEL MODELO

Luego la acción se reduce a:

$$\begin{aligned}
 S = & \int d^2x \operatorname{tr} \left[\frac{1}{2} (\partial_- A_+)^2 + \partial_- \phi_1 \partial_+ \phi_1 + \partial_- \phi_2 \partial_+ \phi_2 + \frac{g^2}{2N_c} [\phi_1, \phi_2]^2 \right. \\
 & - \left. i \frac{g}{\sqrt{N_c}} A_+ [\phi_1, \partial_- \phi_1] - i \frac{g}{\sqrt{N_c}} A_+ [\phi_2, \partial_- \phi_2] \right] + \bar{\psi}_1 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_1 \quad (2.2) \\
 & + \bar{\psi}_2 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_2 + \frac{g}{\sqrt{N_c}} \bar{\psi}_1 \gamma_- A_+ \psi_1 + \frac{g}{\sqrt{N_c}} \bar{\psi}_2 \gamma_- A_+ \psi_2 \\
 & + i \frac{g}{\sqrt{N_c}} (\bar{\psi}_1 \sigma_3 \phi_1 \psi_2 + \bar{\psi}_2 \sigma_3 \phi_1 \psi_1 + \bar{\psi}_1 \sigma_3 \phi_2 \psi_1 - \bar{\psi}_2 \sigma_3 \phi_2 \psi_2) .
 \end{aligned}$$

En coordenadas cono de luz se identifica a la coordenada x_- como el tiempo y a x_+ como la coordenada espacial. Podemos notar que el campo de gauge no aparece derivado respecto de x_- , luego no es una variable dinámica sino que es una ligazón que puede ser eliminada del Lagrangiano al usar su ecuación de movimiento. En esta tesis seguiremos el procedimiento utilizado en [30, 31, 32, 52] y mantendremos el campo A_+ reemplazando la interacción que aparecería entre los campos ϕ y ψ al reemplazar A_+ por su solución clásica, por el intercambio de un campo de gauge virtual cuyo propagador será determinado siguiendo el procedimiento denominado “cutoff regular” [32], procedimiento estándar en el tratamiento de QCD_2 (ver apéndice QCD_2). De esta manera nuestro campo de gauge sólo vivirá dentro de loops.

Las reglas de Feynman se pueden obtenerse de manera directa de la acción en coordenadas cono de luz (2.2). Usaremos estas reglas en la representación doble línea [29, 30]. Esto es, considerando a los campos A_μ y ϕ_i como matrices hermíticas de $N_c \times N_c$ de traza cero, ver (1.2). En el apéndice A aparecen explícitamente las reglas de Feynman del modelo, tanto en la representación doble línea, apta para trabajar en el límite N_c grande, como en la representación usual, es decir, donde los índices de los campos de gauge y escalares son los de la representación adjunta.

Se puede notar que en el propagador de los campos ϕ_i se ha incluido un término de masa M^2 para estos. Este término aparece debido a correcciones radiativas y será calculado a partir del propagador libre (i.e. con $M^2 = 0$) en la siguiente sección

2.2. Determinación de las Masas de los Escalares

Como ha sido mencionado, nosotros esperamos la generación infra-roja de masa para los campos escalares ϕ_1 y ϕ_2 ; esto debido a que no existe una simetría que proteja a estas masas de recibir correcciones cuánticas, como sucede en el caso de los campos de gauge, pero también debido al teorema de Coleman [51].

2.2. DETERMINACIÓN DE LAS MASAS DE LOS ESCALARES

$$= \quad + \quad \chi \quad + \quad \chi \quad \chi \quad + \dots$$

Figura 2.1: El propagador de los campos escalares escrito en función de los diagramas 1PI y de la autoenergía.

Estimaremos el valor de estas masas a primer orden en teoría de perturbaciones y a primer orden en $1/N_c$ lo que nos permitirá no considerar la contribución de los fermiones a este problema. Con este objetivo y aprovechando que la acción es cuadrática en el campo de gauge integramos respecto de A_+ obteniendo:

$$\begin{aligned} S_\phi &= \int d^2x \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ 2\partial_- \phi_1 \partial_+ \phi_1 + 2\partial_- \phi_2 \partial_+ \phi_2 + \frac{g^2}{N_c} [\phi_1, \phi_2]^2 \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^2 \int d^2y \frac{g^2}{N_c} \left([\phi_1, \partial_- \phi_1] + [\phi_2, \partial_- \phi_2] \right) \langle x | P.V. \frac{1}{\partial_-^2} | y \rangle (\phi_k \partial_- \phi_k) \right\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Aplicando el *Background Field Method* separamos $\phi = (\phi_c + \eta)$, donde ϕ_c es un campo de *background* constante. Luego la contribución a un loop viene dada por:

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \int d^2x \text{tr} \left\{ \partial_- \eta_1 \partial_+ \eta_1 + \partial_- \eta_2 \partial_+ \eta_2 + \frac{g^2}{2N_c} ([\phi_{2c}, \eta_1]^2 + [\phi_{1c}, \eta_2]^2) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^2 \frac{g^2}{2N_c} \int d^2y \partial_- ([\phi_{kc}, \eta_k(x)]) \langle x | \frac{1}{\partial_-^2} | y \rangle \partial_- ([\phi_{kc}, \eta_k(y)]) \right. \\ &\quad \left. + \frac{g^2}{N_c} ([\eta_1, \eta_2][\phi_{1c}, \phi_{2c}] + [\phi_{1c}, \eta_2][\eta_1, \phi_{2c}]) \right\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

La contribución a la masa que viene de la parte cuadrática del potencial efectivo puede ser calculada luego de integrar por partes:

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \int d^2x \text{tr} \left\{ \partial_- \eta_1 \partial_+ \eta_1 + \partial_- \eta_2 \partial_+ \eta_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{g^2}{2N_c} ([\phi_{1c}, \eta_1]^2 + [\phi_{2c}, \eta_1]^2 + [\phi_{1c}, \eta_2]^2 + [\phi_{2c}, \eta_2]^2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Luego las contribuciones que vienen dadas por el intercambio del gluon en $2D$ y el "tad-pole" coinciden. Para estimar la masa de los ϕ_i usamos la ecuación de Schwinger-Dyson como una condición de autoconsistencia.

CAPÍTULO 2. CUANTIZACIÓN DEL MODELO

$$\chi = \quad +$$

Figura 2.2: La ecuación para χ .

Para resolver esta ecuación primero consideramos el propagador vestido de los campos escalares. Propagador que está descrito en función de los diagramas de la auto-energía que son una partícula irreducible (1PI) como sigue, ver Figura (2.1):

$$= \frac{i \delta_{ij}}{[q^2 - i\chi(p) + i\epsilon]} \delta_d^a \delta_b^c, \quad (2.6)$$

Parametrizamos la dependencia en el momentum de la auto-energía $\chi(p)$ de la siguiente manera:

$$\chi(p) = i(\alpha p^2 - M^2), \quad (2.7)$$

donde α y M^2 son constantes independientes del momentum y definimos la siguiente expresión:

$$\bar{M}^2 := \frac{M^2}{(1 + \alpha)}. \quad (2.8)$$

Entonces la ecuación de Schwinger-Dyson que satisface $\chi(p)$, ver Figura (2.2), es:

$$\chi(p) = -i \frac{g^2}{\pi(1 + \alpha)} \left[\log \frac{\Lambda^2 + \bar{M}^2}{\bar{M}^2} \right]. \quad (2.9)$$

Donde Λ es el cutoff del modelo en $2D$. Podemos notar que $\chi(p)$ no depende del momentum, luego tenemos que $\alpha = 0$. De este modo la constante M^2 , que será la masa del escalar (el nuevo polo en el propagador), satisface la siguiente ecuación:

$$M^2 = \frac{g^2}{\pi} \log \frac{\Lambda^2 + M^2}{M^2}, \quad (2.10)$$

Resolviendo esta ecuación para M^2 en función de g y Λ encontramos el propagador de los campos escalares:

$$q \quad \phi_i^a \quad \phi_j^c \quad = \frac{i \delta_{ij}}{[q^2 - M^2 + i\epsilon]} \delta_d^a \delta_b^c. \quad (2.11)$$

Por simplicidad en la notación seguiremos representando en los diagramas de Feynman al propagador de los campos escalares con una línea segmentada simple, pero teniendo en cuenta que su valor es (2.11).

2.3. El Régimen del Modelo

Podemos notar que la constante de acoplamiento del modelo g tiene unidades de masa y de hecho gobierna la escala del espectro de masas de QCD_2 [30] así también como de nuestro modelo (como se verá más adelante), por lo que su valor puede ser asociado a la masa de un mesón en particular, es decir se puede fijar. Por otro lado el cutoff Λ del modelo está relacionado con el radio de compactificación que es el otro parámetro libre de la teoría. De este modo nuestro modelo posee dos parámetros libres g y Λ (esto sin contar las masas de los quarks). Un parámetro se puede fijar con la ayuda de la masa de un mesón particular y el otro define un parámetro de expansión respecto de las dimensiones compactificadas, es decir, será una medida de la contribución de los grados de libertad transversales. Esto se ve de la dependencia en Λ de M^2 , es decir si para un valor fijo (finito) de g^2 hacemos tender $\Lambda \rightarrow \infty$ entonces la masa de los escalares M^2 , en virtud de (2.10), crecerá desacoplando a estos campos del resto de la teoría eliminando de este modo las contribuciones de las dimensiones extras y acercando de este modo nuestro modelo a lo que sería simplemente QCD_2 . En resumen si $R \rightarrow 0$ entonces $\Lambda \rightarrow \infty$ lo que implica que $M^2 \rightarrow \infty$, de este modo nuestro modelo no notaría la existencia de las dimensiones extras.

Podemos notar sin embargo que la aproximación $R \rightarrow 0$ soporta en forma consistente el desacoplamiento rápido de los modos masivos de K-K y un desacoplamiento moderado de estos campos escalares, esto debido a que se satisface la siguiente relación:

$$M^2 \ll \Lambda \sim \frac{1}{R} \sim m_{KK}. \quad (2.12)$$

El desacoplamiento moderado de los campos escalares genera una interacción efectiva de cuatro-fermiones diferente a la encontrada en [53]. De todas formas se preferirá mantener la masa de estos campos escalares finita, para luego derivar una expansión gradual en el siguiente parámetro adimensional A :

$$A = \frac{g^2}{2\pi M^2} \sim \frac{1}{\log \frac{\Lambda^4}{M^4}}, \quad (2.13)$$

a partir de la ecuación de Bethe-Salpeter, debido a que para pequeños valores de A se recuperan efectos infrarrojos no-analíticos para la función de onda del estado fundamental.

CAPÍTULO 2. CUANTIZACIÓN DEL MODELO

Capítulo 3

Mesones

En este capítulo comenzaremos la descripción de los mesones como objetos compuestos. Con este objetivo nos acercaremos al problema vía la ecuación de Bethe-Salpeter [8] que proporciona un marco de trabajo relativista para analizar estados ligados de dos cuerpos.

En el estudio de estados ligados vía la ecuación de Bethe-Salpeter la cantidad que se debe determinar es la amplitud de scattering $q\bar{q}$ en principio a todo orden en teoría de perturbaciones, y extraer la información sobre los estados ligados $q\bar{q}$ del modelo (los mesones) de los polos en el núcleo de dicha amplitud. Debido a que no es posible determinar a todo orden en teoría de perturbaciones la amplitud de scattering es que se hace necesario recurrir a algunas aproximaciones las cuales normalmente son restringir los diagramas que contribuyen a la amplitud de scattering a los diagramas tipo escalera y cambiar los propagadores libres de los fermiones y bosones por los propagadores vestidos, calculados o estimados de alguna forma.

En este capítulo se abordará el problema de determinar las amplitudes de scattering $q\bar{q}$ de nuestro modelo. Con este objetivo determinaremos las ecuaciones de Bethe-Salpeter que éstas satisfacen y se presentará una expansión en $1/M^2$ que unida a la aproximación N_c grande nos permitirá solucionar el problema.

3.1. Las Matrices de Scattering

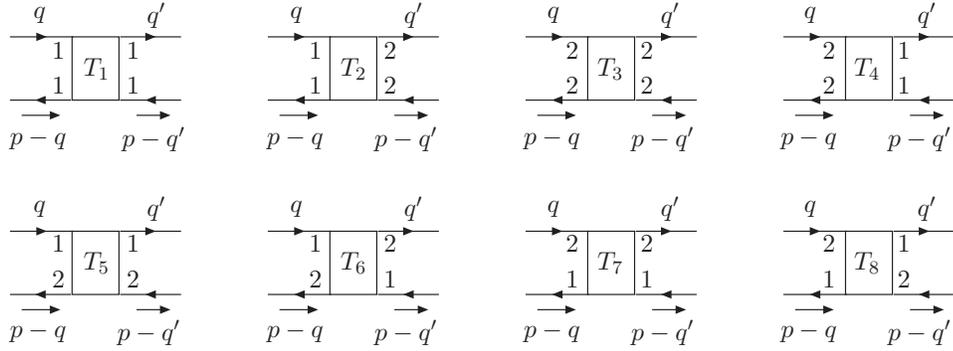
Comenzaremos el estudio de los mesones como estados ligados $q\bar{q}$ siguiendo el esquema presentado en [31] y desarrollado también en el apéndice QCD_2 para esto debemos calcular la matriz de scattering $q\bar{q}$, en principio a todo orden en teoría de perturbaciones.

CAPÍTULO 3. MESONES

$$\begin{array}{c}
 q \qquad q' \\
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & T_1 & 1 & = & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & & 1 & & 1 & + & 1 & \phi_2 & 1 & + & 1 & & \phi_2 & 1 & + & \dots \\
 & & & & & & & \phi_2 & 1 & + & 1 & & \phi_1 & \phi_1 & 1 & + & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & \phi_2 & 1 & + & \dots
 \end{array} \\
 p-q \qquad p-q'
 \end{array}$$

Figura 3.1: Matriz de scattering T_1 . Notar que estamos en el singlete de color.

En virtud de las dos variedades de quarks (ψ_1, ψ_2) y de los vértices que el modelo posee tenemos que las amplitudes que debemos determinar son las siguientes:



Donde la amplitud T_1 representa a la amplitud de scattering del proceso quark 1 y antiquark 1, estado $|1, \bar{1}\rangle$, propagándose al estado quark 1 y antiquark 1, estado $|1, \bar{1}\rangle$. Del mismo modo la amplitud T_6 , por ejemplo, representa a la amplitud de scattering del proceso quark 1 y antiquark 2 propagándose a quark 2 y antiquark 1 ($|1, \bar{2}\rangle \rightarrow |2, \bar{1}\rangle$).

En principio debemos determinar estas ocho amplitudes pero es fácil percatarse que sólo cuatro de estas son independientes, esto es debido a que se satisface que:

$$T_1 = T_3, \quad T_2 = T_4, \quad (3.1)$$

$$T_5 = T_7, \quad T_6 = T_8. \quad (3.2)$$

Escogemos como amplitudes independientes a T_1, T_4, T_5 y T_8 . Para determinar el valor de estas amplitudes, por ejemplo T_1 , debemos sumar en principio infinitos diagramas de la forma mostrada en la Figura (3.1). Sin embargo, en virtud de la aproximación N_c grande y de la expansión en $1/M^2$ es posible despreciar algunos de estos diagramas y sumar en forma consistente los restantes.

En particular lo que se realizará será cambiar la suma infinita que aparece en Figura (3.1) por una ecuación integral de autoconsistencia que satisface T_1 y que representa la misma información que la suma infinita de diagramas al estilo de la ecuación de Schwinger-Dyson. Esta ecuación integral que satisfacen las amplitudes de scattering es denominada ecuación de Bethe-Salpeter [8].

3.1. LAS MATRICES DE SCATTERING

The figure shows two Bethe-Salpeter equations. The top equation is for T_5 and the bottom equation is for T_8 . Both equations show a scattering amplitude on the left, equal to a sum of diagrams on the right. The diagrams involve internal lines labeled 1 and 2, and interaction vertices labeled T_5 , T_8 , ϕ_1 , and ϕ_2 . External momenta are labeled q , q' , $p-q$, and $p-q'$.

Figura 3.2: Ecuación de Bethe-Salpeter para T_5 y T_8 , podemos apreciar que estas ecuaciones están acopladas.

Sin embargo antes de proceder a escribir la ecuación de Bethe-Salpeter para estas amplitudes de scattering es importante notar las siguientes propiedades que ellas satisfacen, a saber que existe una amplitud de scattering diferente de cero para que un estado inicial $|1, \bar{1}\rangle$ termine tanto en un estado final $|1, \bar{1}\rangle$ como en un estado final $|2, \bar{2}\rangle$; lo mismo ocurre por ejemplo con un estado inicial $|1, \bar{2}\rangle$ que puede terminar en un estado final $|1, \bar{2}\rangle$ como en un estado $|2, \bar{1}\rangle$ con amplitudes T_5 y T_6 describiendo estos procesos. Sin embargo también podemos notar que de un estado $|1, \bar{1}\rangle$ es imposible llegar a un estado $|1, \bar{2}\rangle$ o $|2, \bar{1}\rangle$, por ejemplo. En virtud de estos puntos es conveniente definir los siguientes estados que no se mezclan y que harán más fácil su descripción en términos de la ecuación de Bethe-Salpeter:

$$|S\rangle = \frac{1}{2} [|1, \bar{1}\rangle + |2, \bar{2}\rangle], \quad |A\rangle = \frac{1}{2} [|1, \bar{1}\rangle - |2, \bar{2}\rangle], \quad (3.3)$$

$$|V\rangle = \frac{1}{2} [|1, \bar{2}\rangle + |2, \bar{1}\rangle], \quad |P\rangle = \frac{1}{2} [|1, \bar{2}\rangle - |2, \bar{1}\rangle], \quad (3.4)$$

y definir las siguientes amplitudes en función de las originales T :

$$\Delta = \frac{1}{2} (T_1 + T_4), \quad \Lambda = \frac{1}{2} (T_5 - T_8), \quad (3.5)$$

$$\Theta = \frac{1}{2} (T_5 + T_8), \quad \Omega = \frac{1}{2} (T_1 - T_4), \quad (3.6)$$

que representan la amplitud de scattering de los siguientes procesos:

$$\Delta = |S\rangle \rightarrow |S\rangle, \quad \Lambda = |P\rangle \rightarrow |P\rangle, \quad (3.7)$$

$$\Theta = |V\rangle \rightarrow |V\rangle, \quad \Omega = |A\rangle \rightarrow |A\rangle. \quad (3.8)$$

Por definición de los estados (3.3) y (3.4) las amplitudes cruzadas entre ellos se anulan. En la siguiente sección y en el Apéndice B se verá que las ecuaciones de Bethe-Salpeter definidas para las amplitudes (3.5) y (3.6) son más fáciles de trabajar que las definidas respecto de las amplitudes T .

Como se verá más adelante las combinaciones definidas en (3.3) y (3.4) poseen una interpretación respecto de QCD en $4D$, en particular veremos en el Capítulo 8 que los estados $|S\rangle$ y $|P\rangle$ están relacionados con los mesones escalares y pseudoescalares en $4D$.

3.2. Ecuación de Bethe-Salpeter

En esta sección escribiremos la ecuación de Bethe-Salpeter que satisfacen las amplitudes de scattering $q\bar{q}$. Trabajaremos estas amplitudes utilizando la aproximación N_c grande la cual nos otorga la posibilidad de despreciar algunos de los diagramas de Feynman que contribuyen a T . Por ejemplo el último de los diagramas que aparece en la ecuación para T_1 Figura (3.1) no es un diagrama de primer orden en la expansión $1/N_c$ y por lo tanto no es considerado. También consideraremos la aproximación de retener sólo los diagramas tipo escalera (*ladder approximation*) en las amplitudes de scattering, aproximación que en QCD_2 es exacta si se trabaja a primer orden en $1/N_c$, pero que en nuestro caso no lo es ya que existen diagramas que contribuyen a las amplitudes de scattering que no son del tipo escalera pero que si son planares y que por lo tanto sí contribuyen a las amplitudes de scattering a primer orden en la expansión $1/N_c$. Estos diagramas contienen intercambio de partículas ϕ_i y por lo tanto serían de mayor orden en la expansión $1/M^2$. Ellos principalmente contribuyen generando correcciones a los vértices, como en los siguientes casos:

(3.9)

Las contribuciones de estos diagramas serán estimadas más adelante, por lo que por el momento sólo consideraremos contribuciones a las matrices de scattering del tipo escalera, del mismo modo sólo retendremos contribuciones a los propagadores vestidos de los quarks que sean del tipo arco iris, como se explicará en el siguiente capítulo.

Por otro lado diagramas de la siguiente forma:

(3.10)

3.2. ECUACIÓN DE BETHE-SALPETER

no serán considerados ya que estos, si bien son planares, contribuyen a las matrices de scattering al menos a orden $1/M^8$ lo que está fuera de nuestro rango de interés.

En el Apéndice B escribimos en forma explícita las ecuaciones de Bethe-Salpeter que satisfacen las amplitudes de scattering T . En particular podemos ver en la Figura (3.2) a las ecuaciones que satisfacen las amplitudes T_5 y T_8 . Estas ecuaciones representan a la suma de todos los diagramas tipo escalera y tipo arco iris que contribuyen a estas amplitudes. En estos diagramas aparecen en forma explícita los propagadores vestidos de los quarks, que se determinan en forma independiente por medio del uso de la ecuación de Schwinger-Dyson.

Como se puede notar de la Figura (3.2) las ecuaciones que describen a T_5 y T_8 están acopladas. Sin embargo si escribimos las ecuaciones de Bethe-Salpeter respecto de las amplitudes Δ , Λ , Θ y Ω definidas previamente en (3.5) y (3.6) notaremos que estas ecuaciones están desacopladas. Esta situación está en concordancia con el hecho de que los estados definidos en (3.3) y (3.4) no se mezclan. La demostración de que efectivamente las ecuaciones de Bethe-Salpeter para las amplitudes (3.3) y (3.4) están desacopladas esta desarrollada en extenso en el Apéndice B, donde también aparecen escritas en forma explícita dichas ecuaciones.

Luego la ecuación de Bethe-Salpeter que satisfacen las amplitudes de scattering $\Theta(q, q'; p)$ y $\Omega(q, q'; p)$ son las siguientes:

$$\begin{array}{c}
 q \qquad q' \\
 \Theta \qquad = \frac{1}{2} \qquad + \qquad \Theta \\
 p - q \qquad p - q'
 \end{array} \tag{3.11}$$

$$\begin{array}{c}
 q \qquad q' \\
 \Omega \qquad = \frac{1}{2} \qquad + \qquad \Omega \\
 p - q \qquad p - q'
 \end{array} \tag{3.12}$$

Podemos notar que estas ecuaciones son similares a la ecuación de Bethe-Salpeter que satisfacen las amplitudes de scattering en QCD_2 [31]. La única diferencia radica en los propagadores vestidos de los quarks que en principio son diferentes a los de QCD_2 debido a su dependencia en M^2 .

CAPÍTULO 3. MESONES

La ecuación de Bethe-Salpeter que satisface la amplitud de scattering $\Delta(q, q'; p)$ es la siguiente:

$$\begin{array}{c} q \qquad q' \\ \Delta \qquad = \frac{1}{2} \quad + \quad + \quad \Delta \quad + 2 \quad \Delta \end{array} \quad (3.13)$$

$$\begin{array}{c} p - q \qquad p - q' \end{array}$$

La ecuación de Bethe-Salpeter que satisface $\Lambda(q, q'; p)$ es:

$$\begin{array}{c} \gamma \quad q \qquad q' \quad \beta \\ \Lambda \qquad = \frac{1}{2} \quad - \quad + \quad \Lambda \quad - 2 \quad \Lambda \end{array} \quad (3.14)$$

$$\begin{array}{c} p - q \qquad p - q' \qquad p - k \qquad p - k \end{array}$$

Hemos escrito explícitamente los índices de espinoriales de $\Lambda(q, q'; p)$ de modo de hacer más clara la interpretación de la forma explícita de esta ecuación:

$$\begin{aligned} \Lambda^{\alpha\beta, \gamma\delta}(q, q'; p) &= -i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')^2_-} \gamma_-^{\alpha\delta} \gamma_-^{\beta\gamma} - i \frac{g^2}{N_c} \frac{\sigma_3^{\alpha\delta} \sigma_3^{\beta\gamma}}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} \quad (3.15) \\ &+ i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (ig \gamma_-^{\alpha\epsilon}) [S^{\epsilon\mu}_{(k-p)} \Lambda^{\mu\beta, \nu\delta}(k, q'; p) S^{\nu\lambda}_{(k)}] (ig \gamma_-^{\lambda\gamma}) \frac{\mathbf{P}}{(q - k)^2_-} \\ &- 2i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (g \sigma_3^{\alpha\epsilon}) \frac{[S^{\epsilon\mu}_{(k-p)} \Lambda^{\mu\beta, \nu\delta}(k, q'; p) S^{\nu\lambda}_{(k)}]}{[(q - k)^2 - M^2 + i\epsilon]} (g \sigma_3^{\lambda\gamma}). \end{aligned}$$

Podemos notar que la ecuación (3.15) es una generalización de la ecuación encontrada en [31] para el caso de QCD_2 .

Por el momento dejaremos el problema de resolver la ecuación inhomogénea de Bethe-Salpeter hasta este nivel y nos concentraremos en resolver la ecuación homogénea de Bethe-Salpeter. Para esto, primero debemos determinar el valor de los propagadores vestidos de los quarks lo que realizaremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Propagador Vestido de los Quarks

Como hemos mencionado en el capítulo anterior, parte de los diagramas que contribuyen a las matrices de scattering de nuestro interés, al ser sumados contribuyen a generar el propagador vestido de los quarks, de modo que para incluir estos diagramas en forma autoconsistente en la ecuación de Bethe-Salpeter debemos reemplazar los propagadores libres de los quarks por los propagadores vestidos de estos. Por esta razón en este capítulo encontraremos dichos propagadores mediante el uso de la ecuación de Schwinger-Dyson.

4.1. Autoenergía de los Quarks

Procederemos en esta sección a determinar el propagador vestido de los quarks por medio de la ecuación de Schwinger-Dyson. Con este objetivo escribiremos los propagadores vestidos en función de los diagramas de la auto-energía de los quarks $\chi(p)$ que son 1PI, ver Figura (4.1):

$$S(p) = \frac{i}{[\gamma_- p_+ + \gamma_+ p_- - m - i\chi(p)]} \delta_b^a \delta_{ij}. \quad (4.1)$$

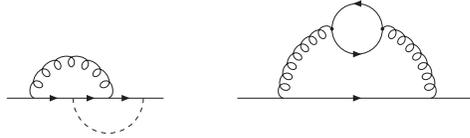
Para determinar $\chi(p)$ debemos, en principio, sumar todos los diagramas 1PI que contribuyen a la auto-energía de los quarks; sin embargo si trabajamos a primer orden en la expansión $1/N_c$ entonces sólo diagramas tipo arco iris y tipo arco iris con correcciones planares a los vértices y al propagador del gluón contribuyen.

CAPÍTULO 4. PROPAGADOR VESTIDO DE LOS QUARKS

$$= \quad + \quad \Sigma \quad + \quad \Sigma \quad \Sigma \quad + \dots$$

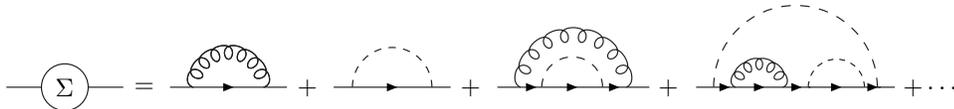
Figura 4.1: El propagador para los quarks escrito en función de los diagramas 1PI, donde se ha definido $\Sigma = i\chi$.

Diagramas como los que siguen no son de primer orden en la expansión $1/N_c$ y no serán considerados:

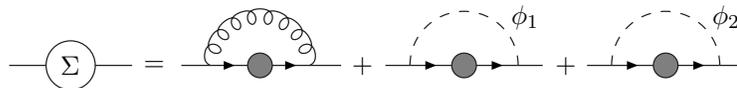


Los diagramas que contienen correcciones a los vértices o al propagador del gluón y que son planares necesariamente contiene intercambio de partículas ϕ_i y por lo tanto serían de orden mayor en la expansión en $1/M^2$. Las contribuciones de estos diagramas serán estimadas más adelante.

Luego los diagramas que contribuyen a la auto-energía de los quarks en nuestra aproximación son de la siguiente forma:



En virtud de considerar a estos diagramas es que podemos escribir una ecuación integral de autoconsistencia que satisface la auto-energía $\chi(p)$ (la ecuación de Schwinger-Dyson) y que mostramos en forma gráfica a continuación:



Para resolver esta ecuación integral primero descompondremos la estructura espinorial de $\chi(p)$ de la siguiente manera:

$$\chi = \chi_+ \gamma_- + \chi_- \gamma_+ + \chi_0 \mathbb{1}, \tag{4.2}$$

donde χ_+ , χ_- y χ_0 son funciones que pueden depender del momentum p .

4.2. SOLUCIÓN PERTURBATIVA DE $\chi(P)$

Entonces el propagador vestido en función de estas variables toma la siguiente forma:

$$S(p) = i \frac{\gamma_- (p - i\chi)_+ + \gamma_+ (p - i\chi)_- + m + i\chi_0}{[2(p - i\chi)_+(p - i\chi)_- - (m + i\chi_0)^2 + i\epsilon]} \quad (4.3)$$

Luego la ecuación integral que satisface $\chi(p)$ escrita en componentes (4.2) es:

$$\begin{aligned} \chi_+(p) &= 2g^2 \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{(q - i\chi)_-}{[2(q - i\chi)_+(q - i\chi)_- - (m + i\chi_0)^2 + i\epsilon]} \frac{\mathbf{P}}{(p - q)_-^2} \\ &+ 2g^2 \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{1}{[(p - q)^2 - M^2 + i\epsilon]} \frac{(q - i\chi)_+}{[2(q - i\chi)_+(q - i\chi)_- - (m + i\chi_0)^2 + i\epsilon]}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\chi_-(p) = 2g^2 \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{1}{[(p - q)^2 - M^2 + i\epsilon]} \frac{(q - i\chi)_-}{[2(q - i\chi)_+(q - i\chi)_- - (m + i\chi_0)^2 + i\epsilon]}. \quad (4.5)$$

$$\chi_0(p) = 2g^2 \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{-1}{[(p - q)^2 - M^2 + i\epsilon]} \frac{(m + i\chi_0)}{[2[q - i\chi]_+[q - i\chi]_- - (m + i\chi_0)^2 + i\epsilon]}. \quad (4.6)$$

Podemos notar que la ecuación de Schwinger-Dyson que satisface $\chi(p)$ corresponde a tres ecuaciones integrales acopladas respecto de las funciones definidas en (4.2). Procederemos a resolver estas ecuaciones considerando el límite $M^2 \rightarrow \infty$, esto es para $|p| \ll M$.

4.2. Solución Perturbativa de $\chi(p)$

En una primera aproximación al problema podemos notar que si tomamos estrictamente el límite $M \rightarrow \infty$ entonces obtenemos que:

$$\chi_-(p) = 0, \quad \chi_0(p) = 0, \quad (4.7)$$

y $\chi_+(p)$ satisface la siguiente ecuación:

$$\chi_+(p) = 2g^2 \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{q_-}{[2(q - i\chi)_+ q_- - m^2 + i\epsilon]} \frac{\mathbf{P}}{(p - q)_-^2}. \quad (4.8)$$

Integrando primero en la coordenada q_+ podemos resolver esta ecuación:

$$\chi_+(p) = -i\pi g^2 \int \frac{dq_-}{(2\pi)^2} \text{sgn}(q_-) \frac{\mathbf{P}}{(p-q)_-^2} = \frac{i}{2\pi} \frac{g^2}{p_-}. \quad (4.9)$$

Esta es la solución encontrada por 't Hooft en [30] para el caso de QCD_2 .

Luego el propagador vestido respecto a esta solución de $\chi(p)$ toma la siguiente forma:

$$S(p) = i \frac{\gamma_- \left[p_+ + \frac{g^2}{2\pi p_-} \right] + \gamma_+ p_- + m}{p^2 - m^2 + \frac{g^2}{\pi} + i\epsilon}. \quad (4.10)$$

Este es el propagador vestido de los quarks encontrado para QCD_2 en [31, 32, 52]. Podemos notar que si m es pequeña entonces el polo del propagador es negativo lo que implica que los quarks son taquiónicos.

Por otro lado si reemplazamos esta solución para el propagador vestido en las ecuaciones de Bethe-Salpeter que satisfacen las amplitudes Δ y Λ notaremos que ésta genera masas imaginarias para alguno de los estados ligados una vez que se considera la contribución de los campos escalares ϕ_i , como se demostrará más adelante. De hecho veremos que cualquier tipo de solución a $\chi(p)$ que sea perturbativa respecto de la expansión $1/M^2$, esto es, que tienda a la solución encontrada por 't Hooft para $\chi(p)$, (4.7) y (4.9), en el límite $M^2 \rightarrow \infty$ conducirá a un espectro de mesones que contenga, en el límite quiral, estados con masa imaginaria.

4.3. Solución No-Perturbativa de $\chi(p)$

En esta sección exploraremos la posibilidad de que exista una solución no-perturbativa, respecto de $1/M^2$ a la ecuación para $\chi(p)$. Con este objetivo comenzaremos constatando el hecho de que si examinamos la ecuación (4.6) es posible intuir que cuando $m = 0$ (límite quiral) una solución diferente de cero para $\Sigma_0 = i\chi_0$ puede existir, incluso en el caso en que consideramos el límite $M^2 \rightarrow \infty$.

Para explorar esta posibilidad resolveremos estas ecuaciones comenzando con la solución $\chi_- = 0$ y suponiendo una valor constante (independiente de p) pero no cero para χ_0 . Valor que será determinado a continuación al resolver las ecuaciones.

Para encontrar $\chi_+(p)$ resolvemos a orden cero en la expansión $1/M^2$ obteniendo la solución de 't Hooft:

$$\chi_+(p) = \frac{i}{2\pi} \frac{g^2}{p_-}. \quad (4.11)$$

Reemplazamos esta solución en la ecuación para χ_0 y resolvemos en el límite quiral.

4.3. SOLUCIÓN NO-PERTURBATIVA DE $\chi(P)$

Luego considerando el límite de momentum bajo ($M^2 \gg p^2$) obtenemos la siguiente ecuación que determina el valor χ_0 :

$$1 = 2g^2 \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{-i}{[q^2 - M^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[q^2 - m_d^2 + i\epsilon]} = \frac{g^2}{2\pi} \frac{1}{M^2 - m_d^2} \ln\left(\frac{M^2}{m_d^2}\right), \quad (4.12)$$

donde hemos definido $m_d^2 = \Sigma_0 - \frac{g^2}{\pi}$.

Si asumimos que $M^2 \gg m_d^2$ entonces es posible resolver analíticamente esta ecuación y encontrar Σ_0 :

$$\Sigma_0^2 \simeq \frac{g^2}{\pi} + M^2 \exp\left(-\frac{2\pi}{g^2} M^2\right) \simeq \frac{g^2}{\pi} + \frac{M^4}{\Lambda^2} \Big|_{\Lambda \rightarrow \infty} \longrightarrow \frac{g^2}{\pi}. \quad (4.13)$$

Podemos notar que en virtud de la ecuación (2.13) en este límite Σ_0 no tiende a cero sino a una constante $\frac{g^2}{\pi}$ la cual compensa completamente la contribución taquiónica a la masa de los quarks encontrada por 't Hooft [30]. También podemos notar que la solución Eq.(4.13) justifica plenamente el haber asumido que $M^2 \gg m_d^2$. Luego, en nuestra aproximación tenemos que $m_d^2 = 0$ en el límite quiral.

El propagador vestido de los quarks, toma la siguiente forma respecto a estas soluciones:

$$S(p) = i \frac{\gamma_- \left[p_+ + \frac{g^2}{2\pi p_-} \right] + \gamma_+ p_- + \Sigma_0}{p^2 - m_d^2 + i\epsilon}. \quad (4.14)$$

Notemos que la masa dinámica (polo del propagador) ahora es real. Nosotros no tenemos quarks taquiónicos como sucede en [30]. La existencia de masas taquionicas para los quarks fue interpretada como una señal de confinamiento, pero esto es incorrecto como ha sido señalado en [31, 32, 52].

CAPÍTULO 4. PROPAGADOR VESTIDO DE LOS QUARKS

Capítulo 5

Ecuación Homogénea de Bethe-Salpeter para $\Lambda(q; p)$

Una vez obtenido el propagador vestido de los quarks el primer paso que debemos realizar para poder resolver la ecuación de Bethe-Salpeter (3.15) y determinar la amplitud de scattering $\Lambda(q, q'; p)$ es solucionar la versión homogénea de esta ecuación. En este capítulo abordaremos este problema y resolveremos la ecuación homogénea de Bethe-Salpeter que satisface $\Lambda(q; p)$. También haremos notar que de esta ecuación es posible identificar lo que sería el vértice propio quark-antiquark-mesón, interpretación que será plenamente confirmada en el Capítulo 7 cuando resolvamos la ecuación inhomogénea de Bethe-Salpeter y determinemos la amplitud $\Lambda(q, q'; p)$.

También en este capítulo veremos que es posible transformar la ecuación homogénea de Bethe-Salpeter que satisface $\Lambda(q; p)$ en una ecuación integral, cuyos autovalores serán los polos en la amplitud de scattering $\Lambda(q, q'; p)$, es decir las masas de los estados ligados.

5.1. Ecuación de Bethe-Salpeter homogénea para Λ

Como ha sido señalado y es demostrado en el Apéndice B la amplitud $\Lambda(q; p)$ satisface la siguiente ecuación homogénea de Bethe-Salpeter:

$$\begin{aligned} \Lambda^{\alpha, \gamma}(q; p) &= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} (ig \gamma_-^{\alpha\epsilon}) [S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} \Lambda^{\mu, \nu}(k; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}] (ig \gamma_-^{\lambda\gamma}) \frac{\mathbf{P}}{(q-k)_-^2} \\ &- 2i \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} (g \sigma_3^{\alpha\epsilon}) \frac{[S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} \Lambda^{\mu, \nu}(k; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}]}{[(q-k)^2 - M^2 + i\epsilon]} (g \sigma_3^{\lambda\gamma}). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Esta ecuación se puede ver escrita en forma gráfica en la Figura (5.1).

CAPÍTULO 5. ECUACIÓN HOMOGÉNEA DE BETHE-SALPETER PARA $\Lambda(Q; P)$

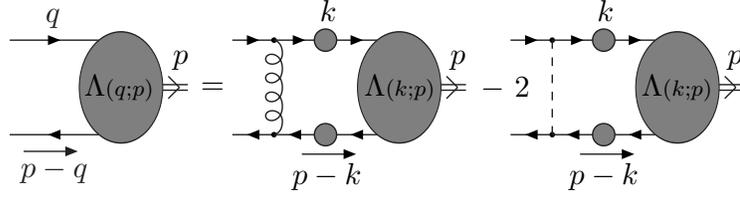


Figura 5.1: Ecuación para el vértice propio

La función $\Lambda(q; p)$ se puede identificar como el vértice propio que describe por ejemplo, ver Figura (5.1), la amplitud de encontrar un quark y un antiquark formando un estado $|S\rangle$ en un mesón *mass-shell*.

Definimos:

$$\bar{\Lambda}^{\alpha, \beta}(q; p) = [S^{\alpha\mu}_{(k-p)} \Lambda^{\mu, \nu}(k; p) S^{\nu\beta}_{(k)}] \quad (5.2)$$

Luego tenemos que:

$$\begin{aligned} \Lambda(q; p) &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (ig\gamma_-) \bar{\Lambda}(k; p) (ig\gamma_-) \frac{\mathbf{P}}{(q-k)_-^2} \\ &- 2i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(g\sigma_3) \bar{\Lambda}(k; p) (g\sigma_3)}{[(q-k)^2 - M^2 + i\epsilon]}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Si multiplicamos a la ecuación (5.3) por la izquierda por $S(q-p)$ y por la derecha por $S(q)$ obtenemos la siguiente ecuación integral matricial que satisface $\bar{\Lambda}(q; p)$:

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}(q; p) &= iS(q-p) (ig\gamma_-) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{\mathbf{P}}{(k-q)_-^2} \bar{\Lambda}(k; p) \right] (ig\gamma_-) S(q) \\ &- 2iS(q-p) (g\sigma_3) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{\bar{\Lambda}(k; p)}{[(k-q)^2 - M^2 + i\epsilon]} \right] (g\sigma_3) S(q). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Para solucionar esta ecuación descomponemos a la matriz $\Lambda(q; p)$ de la siguiente manera:

$$\bar{\Lambda}(q; p) = \bar{\Lambda}^+ \gamma_+ + \bar{\Lambda}^- \gamma_- + \bar{\Lambda}^{+-} \gamma_+ \gamma_- + \bar{\Lambda}^{-+} \gamma_- \gamma_+, \quad (5.5)$$

La ecuación homogénea entonces queda:

$$\bar{\Lambda}^+(q; p) = -\frac{4ig^2(p-q)_-q_-}{D[p-q]D[q]} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{\mathbf{P}}{(k-q)_-^2} \bar{\Lambda}^+(k; p) \right] \quad (5.6)$$

5.1. ECUACIÓN DE BETHE-SALPETER HOMOGÉNEA PARA Λ

$$\begin{aligned}
& + \frac{2ig^2}{D[p-q]D[q]} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{2(p-q)_- q_- \bar{\Lambda}^- + 2q_- \Sigma_0 \bar{\Lambda}^{+-} - 2\Sigma_0(p-q)_- \bar{\Lambda}^{-+} - \Sigma_0^2 \bar{\Lambda}^+}{[(k-q)^2 - M^2 + i\epsilon]} \right] \\
& \bar{\Lambda}^-(q;p) = + \frac{2ig^2 \Sigma_0^2}{D[p-q]D[q]} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{\mathbf{P}}{(k-q)_-^2} \bar{\Lambda}^+(k;p) \right] \tag{5.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2ig^2}{D[p-q]D[q]} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{2[p-q][q] \bar{\Lambda}^+ + 2[q] \Sigma_0 \bar{\Lambda}^{-+} - 2\Sigma_0[p-q] \bar{\Lambda}^{+-} - \Sigma_0^2 \bar{\Lambda}^-}{[(k-q)^2 - M^2 + i\epsilon]} \right] \\
& \bar{\Lambda}^{+-}(q;p) = - \frac{2ig^2 \Sigma_0(p-q)_-}{D[p-q]D[q]} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{\mathbf{P}}{(k-q)_-^2} \bar{\Lambda}^+(k;p) \right] \tag{5.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2ig^2}{D[p-q]D[q]} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{-2(p-q)_- [q] \bar{\Lambda}^{-+} - [q] \Sigma_0 \bar{\Lambda}^+ + \Sigma_0(p-q)_- \bar{\Lambda}^- + \Sigma_0^2 \bar{\Lambda}^{+-}}{[(k-q)^2 - M^2 + i\epsilon]} \right] \\
& \bar{\Lambda}^{-+}(q;p) = + \frac{2ig^2 \Sigma_0 q_-}{D[p-q]D[q]} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{\mathbf{P}}{(k-q)_-^2} \bar{\Lambda}^+(k;p) \right] \tag{5.9}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{2ig^2}{D[p-q]D[q]} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{-2[p-q] q_- \bar{\Lambda}^{+-} - q_- \Sigma_0 \bar{\Lambda}^- + \Sigma_0[p-q] \bar{\Lambda}^+ + \Sigma_0^2 \bar{\Lambda}^{-+}}{[(k-q)^2 - M^2 + i\epsilon]} \right],$$

donde hemos definido las siguientes cantidades:

$$D[q] = q^2 - m_d^2 + i\epsilon, \quad [q] = q_+ + \frac{g^2}{2\pi} \left(\frac{\mathbf{P}}{q_-} \right). \tag{5.10}$$

Con el objetivo de tener control en nuestra expansión en $1/M^2$ introducimos las siguientes variables:

$$\tilde{\Lambda}^-(q;p) = -2 \frac{(p-q)_- q_-}{\Sigma_0^2} \bar{\Lambda}^-(q;p) + \bar{\Lambda}^+(q;p), \tag{5.11}$$

$$\tilde{\Lambda}^{+-}(q;p) = -2 \frac{q_-}{\Sigma_0} \bar{\Lambda}^{+-}(q;p) + \bar{\Lambda}^+(q;p), \tag{5.12}$$

$$\tilde{\Lambda}^{-+}(q;p) = 2 \frac{(p-q)_-}{\Sigma_0} \bar{\Lambda}^{-+}(q;p) + \bar{\Lambda}^+(q;p). \tag{5.13}$$

Si escribimos las ecuaciones integrales respecto a estas variables, notaremos que en el límite M^2 grande las ecuaciones para estas nuevas variables sólo contienen términos superficialmente proporcionales a $1/M^2$. En cambio la ecuación para $\bar{\Lambda}^+(q;p)$ contiene al operador

CAPÍTULO 5. ECUACIÓN HOMOGÉNEA DE BETHE-SALPETER PARA $\Lambda(Q; P)$

de 't Hooft, que es de orden cero en $1/M^2$, junto con términos proporcionales a $1/M^2$ en los cuales las nuevas variables y $\bar{\Lambda}^+(q; p)$ aparecen. Como la idea es resolver estas ecuaciones a primer orden en $1/M^2$ entonces en la ecuación para $\bar{\Lambda}^+(q; p)$ sólo retendremos términos donde $\bar{\Lambda}^+(q; p)$ aparezca. Luego la ecuación que determina a $\bar{\Lambda}^+(q; p)$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}^+(q; p) = & 2ig^2 \frac{(p-q)_- q_-}{D[p-q] D[q]} \left[-2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\mathbf{P}}{(k-q)_-} \bar{\Lambda}^+(k; p) + \right. \\ & - \Sigma_0^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(p-k)_- k_-} \frac{\bar{\Lambda}^+(k; p)}{[(k-q)^2 - M^2 + i\epsilon]} - \frac{\Sigma_0^2}{(p-q)_- q_-} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\bar{\Lambda}^+(k; p)}{[(k-q)^2 - M^2 + i\epsilon]} \\ & \left. + \frac{\Sigma_0^2}{(p-q)_-} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k_-} \frac{\bar{\Lambda}^+(k; p)}{[(k-q)^2 - M^2 + i\epsilon]} + \frac{\Sigma_0^2}{q_-} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(p-k)_-} \frac{\bar{\Lambda}^+(k; p)}{[(k-q)^2 - M^2 + i\epsilon]} \right]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Como en el vértice propio la dependencia en $\bar{\Lambda}^-$, $\bar{\Lambda}^{+-}$ y $\bar{\Lambda}^{-+}$ es en un término que ya es superficialmente de orden $1/M^2$ es que consideraremos soluciones para $\bar{\Lambda}^-$, $\bar{\Lambda}^{+-}$ y $\bar{\Lambda}^{-+}$ de orden cero en la expansión $1/M^2$. A este orden estas funciones quedan determinadas exclusivamente por la solución de $\bar{\Lambda}^+$.

De modo que aproximaremos las ecuaciones que determinan a las funciones $\bar{\Lambda}^-$, $\bar{\Lambda}^{+-}$ y $\bar{\Lambda}^{-+}$, que no son relevantes a este orden en la determinación del espectro de masa, como sigue:

$$\bar{\Lambda}^-(q; p) \sim -\frac{\Sigma_0^2}{2(p-q)_- q_-} \bar{\Lambda}^+(q; p), \quad (5.15)$$

$$\bar{\Lambda}^{+-}(q; p) \sim +\frac{\Sigma_0}{2q_-} \bar{\Lambda}^+(q; p), \quad (5.16)$$

$$\bar{\Lambda}^{-+}(q; p) \sim -\frac{\Sigma_0}{2(p-q)_-} \bar{\Lambda}^+(q; p). \quad (5.17)$$

Ahora procederemos a solucionar la ecuación (5.14), para esto como es convencional definimos la función de onda:

$$\phi(q_-) = \int dq_+ \bar{\Lambda}^+(q; p), \quad (5.18)$$

luego en la región $(k-q)^2 \ll M^2$ podemos integrar respecto de q_+ a ambos lados de la ecuación (5.14) obteniendo la siguiente ecuación de autovalores que satisface la función de onda ϕ :

$$\begin{aligned}
\left[p^2 - \frac{m_d^2}{x} - \frac{m_d^2}{(1-x)} \right] \phi(x) &= -\frac{g^2}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \phi(y) \\
&- A \frac{\Sigma_0^2}{x^{1-\beta}} \int_0^1 dy \frac{\phi(y)}{(1-y)^{1-\beta}} - A \frac{\Sigma_0^2}{(1-x)^{1-\beta}} \int_0^1 dy \frac{\phi(y)}{y^{1-\beta}} \\
&+ A \frac{\Sigma_0^2}{[(1-x)x]^{1-\beta}} \int_0^1 dy \phi(y) + A \Sigma_0^2 \int_0^1 dy \frac{\phi(y)}{[(1-y)y]^{1-\beta}} .
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Donde hemos introducido las siguientes variables adimensionales:

$$q_- = xp_- , \quad k_- = yp_- , \tag{5.20}$$

junto con el parámetro de expansión $A = \frac{g^2}{2\pi} \frac{1}{M^2}$ definido previamente.

La ecuación integral (5.19) es una ecuación de autovalores cuyos autovalores p^2 , como veremos en el Capítulo 7, corresponden a las masas de los mesones, estados ligados $q\bar{q}$ con números cuánticos de $|S\rangle$ y las autofunciones corresponden a las funciones de onda de estos estados, donde x representa a la fracción del momentum total del mesón que es llevada por el quark. Esta ecuación posee un núcleo simétrico que garantiza que los autovalores sean reales. También es simétrica bajo la transformación $x \rightarrow (1-x)$ encontrada por 't Hooft en [30].

A primer orden en la expansión en A del cálculo directo desde (5.14) obtenemos $\beta = 0$ en (5.19), pero este núcleo genera una ecuación integral demasiado singular. Luego las singularidades que aparecen deben ser suavizadas mediante una resumación de la serie considerando singularidades similares, pero de orden superior en A , que aparecen del cálculo a ordenes siguientes. De manera de simular esta resumación es que hemos introducido la constante β que efectivamente regulariza la ecuación integral. El coeficiente β gobierna el comportamiento de las soluciones de (5.19) cerca de los puntos extremos (0 y 1). Fijaremos el valor de este coeficiente al imponer autoconsistencia de las soluciones cerca de los bordes. Se verá que el parámetro β es pequeño y de hecho desaparece cuando $A \rightarrow 0$. Su presencia garantiza que el espectro de (5.19) sea positivo, ver Capítulo 6.

En el siguiente capítulo trabajaremos en las soluciones de esta ecuación integral, que como veremos nos dará un espectro discreto de autovalores para p^2 . Por el momento supondremos que su solución es conocida y seguiremos trabajando en determinar el vértice propio.

5.2. El Vértice Propio

Una vez que se conoce la solución para $\phi(x)$ podemos determinar el valor del vértice propio en virtud de la ecuación (5.3). Usando las siguientes relaciones:

CAPÍTULO 5. ECUACIÓN HOMOGÉNEA DE BETHE-SALPETER PARA $\Lambda(Q; P)$

$$\gamma_- \cdot \bar{\Lambda}(q; p) \cdot \gamma_- = +2\gamma_- \bar{\Lambda}^+(q; p), \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 \cdot \bar{\Lambda}(q; p) \cdot \sigma_3 &= -\bar{\Lambda}^+(q; p) \gamma_+ - \bar{\Lambda}^-(q; p) \gamma_- + \bar{\Lambda}^{+-}(q; p) \gamma_+ \gamma_- \\ &\quad + \bar{\Lambda}^{-+}(q; p) \gamma_- \gamma_+, \end{aligned} \quad (5.22)$$

y considerando la región $(k - q)^2 \ll M^2$ podemos escribir:

$$\begin{aligned} \Lambda(q; p) &= -2ig^2 \gamma_- \left[\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\mathbf{P}}{(q-k)_-^2} \bar{\Lambda}^+(k; p) + \frac{1}{M^2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \bar{\Lambda}^-(k; p) \right] \\ &\quad + \frac{2ig^2}{M^2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[-\bar{\Lambda}^+(k; p) \gamma_+ + \bar{\Lambda}^{+-}(k; p) \gamma_+ \gamma_- + \bar{\Lambda}^{-+}(k; p) \gamma_- \gamma_+ \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Luego usando las ecuaciones (5.15), (5.16), (5.17) obtenemos el vértice propio en función de las autofunciones de (5.19):

$$\begin{aligned} \Lambda_n^{\alpha, \gamma}(x; p) &= -i \frac{g^2}{2p_- \pi^2} \left[\int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \phi_n(y) - A \int_0^1 dy \frac{\phi_n(y)}{(1-y)y} \right] \gamma_-^{\alpha\gamma} \\ &\quad - iA \frac{p_-}{\pi} \left[\int_0^1 dy \phi_n(y) \right] \gamma_+^{\alpha\gamma} + iA \frac{g}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \left[\int_0^1 dy \frac{\phi_n(y)}{y} \right] (\gamma_+ \gamma_-)^{\alpha\gamma} \\ &\quad - iA \frac{g}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \left[\int_0^1 dy \frac{\phi_n(y)}{(1-y)} \right] (\gamma_- \gamma_+)^{\alpha\gamma}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Capítulo 6

Ecuación de Autovalores Para

$$\phi(x)$$

En este capítulo se estudiará la ecuación integral de autovalores que satisface $\phi(x)$. Los autovalores de esta ecuación corresponden a las masas en unidades de $\frac{g^2}{\pi}$ de los estados ligados S , los polos en la matriz de scattering $\Lambda(q, q'; p)$.

Se encontrará una solución no-perturbativa de masa cero que como veremos en el Capítulo 8 corresponde al pión de nuestro modelo y el resto del espectro se estimará en forma perturbativa a partir de la solución de 't Hooft.

6.1. Funciones pares y Funciones Impares

En este capítulo se estudiará la ecuación integral de autovalores:

$$\begin{aligned} \left[p^2 - \frac{m_d^2}{x} - \frac{m_d^2}{(1-x)} \right] \phi(x) &= -\frac{g^2}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \phi(y) \\ &- A \frac{\Sigma_0^2}{x^{1-\beta}} \int_0^1 dy \frac{\phi(y)}{(1-y)^{1-\beta}} - A \frac{\Sigma_0^2}{(1-x)^{1-\beta}} \int_0^1 dy \frac{\phi(y)}{y^{1-\beta}} \\ &+ A \frac{\Sigma_0^2}{[(1-x)x]^{1-\beta}} \int_0^1 dy \phi(y) + A \Sigma_0^2 \int_0^1 dy \frac{\phi(y)}{[(1-y)y]^{1-\beta}}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Esta ecuación fue derivada a partir de la ecuación homogénea de Bethe-Salpeter que satisface $\Lambda(q; p)$. Exploraremos soluciones a esta ecuación considerando valores pequeños para el coeficiente de expansión A ; esto nos permitirá asumir que:

$$m_d^2 = 0, \quad \Sigma_0^2 = \frac{g^2}{\pi}. \quad (6.2)$$

CAPÍTULO 6. ECUACIÓN DE AUTOVALORES PARA $\phi(X)$

Antes de comenzar el estudio de la ecuación (6.1), esto es de las condiciones de borde que las soluciones de (6.1) deben satisfacer y del espectro de autovalores que la ecuación genera, realizaremos un desplazamiento de la variable x en $-\frac{1}{2}$ en orden de apreciar de una mejor manera las simetrías de la función de onda, que en estas nuevas variables corresponderán a realizar $x \rightarrow -x$. En virtud de esta simetría las autofunciones de la ecuación integral serán funciones pares o impares respecto del cambio de signo en x .

Luego si se escribe la ecuación (6.1) referida a las funciones pares $\phi(x) = \phi(-x)$ tenemos que esta corresponde a:

$$\begin{aligned} \mu^2 \phi(x) = & - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \phi(y) - \frac{8A}{(1-4x^2)^{1-\beta}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \frac{\phi(y)}{(1-4y^2)^{1-\beta}} \\ & + \frac{4A}{(1-4x^2)^{1-\beta}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \phi(y) + 4A \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \frac{\phi(y)}{(1-4y^2)^{1-\beta}}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Del mismo modo la ecuación (5.19) referida a las funciones impares $\phi(x) = -\phi(-x)$ corresponde a la ecuación:

$$\mu^2 \phi(x) = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \phi(y) + \frac{32Ax}{(1-4x^2)^{1-\beta}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \frac{y \phi(y)}{(1-4y^2)^{1-\beta}}. \quad (6.4)$$

Donde hemos introducido el autovalor adimensional $\mu^2 = \pi p^2/g^2$.

Siguiendo los trabajos de Harada [56] se consideran funciones pares de la siguiente forma:

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-4x^2)^{\alpha+n}, \quad (6.5)$$

y funciones impares de la siguiente forma:

$$\phi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x (1-4x^2)^{\alpha+j}. \quad (6.6)$$

6.2. Condiciones de Borde y Espectro Positivo

Comenzaremos esta sección estudiando las condiciones de borde que deben satisfacer las soluciones de (6.1). Estas condiciones se fijarán al imponer que las divergencias principales que aparecen cuando $x \rightarrow \pm\frac{1}{2}$ en (6.1) se cancelen. En este proceso también quedará determinado el valor del coeficiente β , coeficiente que como veremos en la segunda parte de esta sección garantiza que el espectro sea positivo definido. Para dar una idea de cual es el procedimiento consideraremos en forma explícita el caso de las funciones pares; para las funciones impares el procedimiento es similar y el resultado para β es el mismo.

Trabajando en el límite A pequeño consideraremos funciones que en los bordes se comporten de la siguiente forma $(1-4x^2)^\beta$. De manera que para fijar el valor de β reemplazaremos

6.2. CONDICIONES DE BORDE Y ESPECTRO POSITIVO

esta función (6.3) y fijaremos el coeficiente β al imponer que se cancelen las divergencias principales $(1 - 4x^2)^{\beta-1}$ que aparecen cuando x está cerca de los extremos. Si reemplazamos la función $(1 - 4x^2)^\beta$ en (6.3) obtendremos:

$$\begin{aligned} \mu^2(1 - 4x^2)^\beta = & + 4\sqrt{4} \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + \frac{1}{2})} F(1, \frac{1}{2} - \beta; \frac{1}{2}; 4x^2) - \frac{4\sqrt{\pi} A}{(1 - 4x^2)^{1-\beta}} \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\frac{1}{2} + 2\beta)} \\ & + \frac{2\sqrt{\pi} A}{(1 - 4x^2)^{1-\beta}} \frac{\Gamma(1 + \beta)}{\Gamma(\frac{3}{2} + \beta)} + 2\sqrt{\pi} A \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\frac{1}{2} + 2\beta)}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

La función $F(a, b; c; z)$ corresponde a la función hipergeométrica de Gauss [54]:

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} \quad (6.8)$$

En la deducción de (6.7) hemos utilizado los resultados de [55] para la integral en el núcleo de 't Hooft. Por el momento estamos interesados sólo en los términos de (6.7) que divergen cuando $x \rightarrow \pm \frac{1}{2}$. Luego los términos proporcionales a $(1 - 4x^2)^{\beta-1}$ en (6.7) son los siguientes:

$$0 = 4\pi \beta \cot[\pi \beta] - 4\sqrt{\pi} A \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\frac{1}{2} + 2\beta)} + 2\sqrt{\pi} A \frac{\Gamma(1 + \beta)}{\Gamma(\frac{3}{2} + \beta)}. \quad (6.9)$$

En el límite en que A y β son pequeños podemos aproximar esta ecuación obteniendo la siguiente expresión que relaciona a A y β :

$$0 = 4 - 2 \frac{A}{\beta} + \mathcal{O}(A, \beta) \quad (6.10)$$

Luego para eliminar las divergencias principales a orden cero en el límite $A \rightarrow 0$ tenemos que β debe ser igual a:

$$\beta = \frac{A}{2}. \quad (6.11)$$

Ahora procederemos a probar que el espectro de (6.1) es positivo definido. Para esto utilizaremos el hecho de que sabemos que el estado fundamental debe ser una función par. Además sabemos que para cualquier función que vaya a cero más rápido que $(1 - 4x^2)^{\frac{1}{2}}$ cuando $x \rightarrow \pm 1/2$ podemos considerar a los términos proporcionales a A en (6.3) como perturbaciones al término de 't Hooft, el cual es positivo definido. Luego sólo funciones de prueba que sean cercanas a funciones constantes podrán generar autovalores μ^2 negativos en (6.3). Exploraremos esta posibilidad considerando funciones de la siguiente forma:

$$f(x) = (1 - 4x^2)^\gamma, \quad (6.12)$$

donde γ es una constante de valor pequeño pero arbitrario. Luego multiplicamos a la ecuación (6.3) por $f(x)$ a ambos lados e integramos respecto de x . Obtenemos (ver apéndice de la referencia [56]):

$$\mu^2 \langle f(x)|f(x) \rangle = 2^{4\gamma-2} \gamma \frac{\Gamma[\gamma]^4}{\Gamma[2\gamma]^2} - 2A\pi \frac{\Gamma[\gamma + \beta]^2}{\Gamma[\frac{1}{2} + \gamma + \beta]^2} + 2A\pi \frac{\Gamma[\gamma + \beta] \Gamma[1 + \gamma]}{\Gamma[\frac{1}{2} + \gamma + \beta] \Gamma[\frac{3}{2} + \gamma]}. \quad (6.13)$$

Si asumimos que tanto A como $\gamma = \alpha A$ son coeficientes pequeños entonces tenemos que sólo los dos primeros términos de la parte derecha de la ecuación (6.13) serán relevantes. Luego la parte divergente de la ecuación (6.13) es:

$$\mu^2 \langle f(x)|f(x) \rangle \sim \frac{1}{\gamma} \left[1 - \frac{2A\gamma}{(\gamma + \beta)^2} \right] = \frac{1}{\gamma} \left[1 - \frac{2\alpha}{(\alpha + \frac{1}{2})^2} \right]. \quad (6.14)$$

Podemos ver que para cualquier valor del coeficiente α la expresión entre brackets es evidentemente positiva. Notemos que la existencia de un β no nulo garantiza que el espectro sea positivo cuando γ va a cero y A es pequeño pero no nulo.

6.3. El Espectro de Autovalores

Una vez que se ha determinado el coeficiente β procedemos a examinar el espectro de autovalores de las ecuaciones (6.3) y (6.4). El estado fundamental debe ser una función par, luego cuando examinamos la ecuación (6.3) considerando el comportamiento asintótico en los extremos obtenemos la siguiente función como estado fundamental en el límite $A \rightarrow 0$:

$$\phi_0(x) = (1 - 4x^2)^{\frac{A}{2}} - \frac{1}{\pi}(1 - 4x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (6.15)$$

Este es básicamente un resultado no-perturbativo que difiere de la solución de 't Hooft en el límite $A \rightarrow 0$ obteniendo $\mu = 0$, como nosotros esperábamos del rompimiento espontáneo de la simetría quiral en $4D$. Podemos notar que el segundo término en (6.15) es la contribución principal en la solución para el estado fundamental de la ecuación de 't Hooft para el caso en que $m^2 = \frac{g^2}{\pi}$ [30], y el primer término compensa potencias de A cuando insertamos a $\phi_0(x)$ en (6.3) y tomamos el límite $A \rightarrow 0$. El resultado final es un corrimiento del estado fundamental sin perturbar $\mu^2 = 7,25$ (autovalor del estado fundamental de 't Hooft cuando $m^2 = \frac{g^2}{\pi}$) hacia la solución no-perturbativa $\mu^2 = 0$ en el límite $A \rightarrow 0$.

Para los restantes estados masivos nos es imposible encontrar soluciones analíticas, como sucede también con la ecuación de 't Hooft. Sin embargo podemos estimar estas soluciones trabajando con los elementos de matriz del Hamiltoniano $\mu^2(\phi, \phi) = (\phi, H\phi)$ y usando teoría de perturbaciones usual, comenzando de las soluciones de 't Hooft (caso $A = 0$).

Con este objetivo escribimos la ecuación (6.3) de la siguiente manera:

$$\mu^2 \phi(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy H(x, y) \phi(y) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \left[H_0(x, y) + A H_1(x, y) \right] \phi(y) \quad (6.16)$$

Donde hemos definido:

6.3. EL ESPECTRO DE AUTOVALORES

$$H_0(x, y) = - \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \quad (6.17)$$

$$H_1(x, y) = - 8 \frac{1}{(1-4x^2)^{1-\beta}} \frac{1}{(1-4y^2)^{1-\beta}} \quad (6.18)$$

$$+ \frac{4}{(1-4x^2)^{1-\beta}} + \frac{4}{(1-4y^2)^{1-\beta}}$$

Seguindo los trabajos [55, 56] referidos a soluciones de la ecuación de 't Hooft, expandimos las funciones de onda pares e impares de la siguiente manera:

$$\phi(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^N a_n (1-4x^2)^{\frac{1}{2}+n} = \sum_{n=0}^N a_n f^n(x) \\ \sum_{n=0}^N b_n x (1-4x^2)^{\frac{1}{2}+n} = \sum_{n=0}^N b_n g^n(x) \end{cases} \quad (6.19)$$

La idea es considerar que $N \rightarrow \infty$ pero en términos prácticos no consideraremos valores de N mayores que 7, que por lo demás está en acuerdo con la precisión de este método (ver [55]).

Si multiplicamos a ambos lados de la ecuación (6.16) por $f^i(x)$ e integramos respecto de x obtenemos:

$$\mu^2 \hat{N} \vec{a} = \hat{H} \vec{a}, \quad \vec{a} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]^t. \quad (6.20)$$

Donde hemos definido:

$$\hat{H}^{ij} = \hat{H}_0^{ij} + A \hat{H}_1^{ij} \quad (6.21)$$

En virtud de los cálculos que aparecen en el apéndice de [56] tenemos que:

$$\begin{aligned} \hat{H}_0^{ij} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy f^i(x) H_0(x, y) f^j(y) \\ &= 2^{(1+i+j)} \frac{(\frac{1}{2}+j)(\frac{1}{2}+i)}{(1+i+j)} \frac{\Gamma^2(\frac{1}{2}+i) \Gamma^2(\frac{1}{2}+j)}{\Gamma(1+2i) \Gamma(1+2j)}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

además tenemos que:

$$\hat{N}^{ij} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy f^i(y) f^j(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(2+i+j)}{\Gamma(\frac{5}{2}+i+j)}. \quad (6.23)$$

Por otro lado los nuevos términos son:

$$\begin{aligned}\hat{H}_1^{ij} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy f^i(x) H_1(x, y) f^j(y) \\ &= -2\pi \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + i) \Gamma(\frac{1}{2} + j)}{\Gamma(1 + i) \Gamma(1 + j)} + \pi \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + i) \Gamma(\frac{3}{2} + j)}{\Gamma(1 + i) \Gamma(2 + j)} + \pi \frac{\Gamma(\frac{3}{2} + i) \Gamma(\frac{1}{2} + j)}{\Gamma(2 + i) \Gamma(1 + j)}.\end{aligned}\quad (6.24)$$

Estimaremos el espectro masivo en forma perturbativa a partir de la solución de 't Hooft $A = 0$. Para esto determinaremos en forma numérica dicha solución. El problema que debemos resolver es el siguiente:

$$\mu_0^2 \hat{N} \vec{a} = \hat{H}_0 \vec{a}.\quad (6.25)$$

La matriz de norma \hat{N} aparece debido a que la base de funciones que estamos utilizando no es ortonormal. Para transformar esta ecuación en una ecuación de autovalores normal seguimos el procedimiento descrito en [55, 56]. Luego debemos resolver el problema de autovalores de la matriz de norma antes de continuar:

$$\hat{N} \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i.\quad (6.26)$$

Una vez resuelto este problema introducimos la siguiente matriz de transformación:

$$\hat{W} = \left[\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\| \sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{\vec{v}_n}{\|\vec{v}_n\| \sqrt{\lambda_n}} \right].\quad (6.27)$$

Luego podemos transformar la ecuación (6.26) en un problema usual de autovalores:

$$\mu_0^2 \vec{b} = \hat{W}^t \hat{H}_0 \hat{W} \vec{b}, \quad \vec{a} = \hat{W} \vec{b}.\quad (6.28)$$

Resolvimos numéricamente esta ecuación considerando $n = 5$, los resultados para μ_0^2 aparecen el Cuadro 6.1.

Luego con los resultados de la ecuación de 't Hooft procedemos a evaluar las correcciones del espectro a orden A por medio del uso de la teoría de perturbaciones usual. Con este objetivo consideramos la siguiente expansión:

$$\mu^2 = \mu_0^2 + A \mu_1^2 + \dots,\quad (6.29)$$

luego tenemos que la corrección al autovalor μ^2 a orden A es:

$$\mu_1^2 = \frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \phi^0(x) H_1(x, y) \phi^0(y)}{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \phi^0(x) \phi^0(x)}.\quad (6.30)$$

Si escribimos las soluciones de la ecuación de 't Hooft respecto de la base (6.19):

6.4. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DEL ESPECTRO

't Hooft	Perturbación
μ_0^2	μ_1^2
17.30	18.20
27.12	-17.96
37.02	18.93
46.92	-20.14
56.93	21.84
71.05	-24.13
83.96	28.09

Cuadro 6.1: Espectro de masa y correcciones para los estados excitados de $\phi(x)$.

$$\phi^0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^0 f^n(x), \quad (6.31)$$

y usamos las definiciones que aparecen en (6.23), (6.24) y (6.28) obtenemos que:

$$\mu_1^2 = \frac{a_i^0 \hat{H}_1^{ij} a_j^0}{a_i^0 \hat{N}^{ij} a_j^0} \quad (6.32)$$

Se evaluaron estas correcciones para cada nivel, los resultados aparecen en el Cuadro 6.1 donde también se han incluido los resultados para las funciones impares. Las soluciones impares son obtenidas siguiendo un procedimiento similar al aquí expuesto para las funciones pares. El espectro de soluciones para $\phi(x)$ se compone de soluciones pares e impares intercaladas. Como en el Cuadro 6.1 el espectro de masas mostrado corresponde sólo al de las soluciones excitadas tenemos que el primer autovalor corresponde al de una solución impar, luego el siguiente corresponderá a una solución par y así en lo sucesivo.

6.4. Comportamiento Asintótico del Espectro

Terminaremos este capítulo describiendo algunas características generales del espectro de autovalores de (6.1), en particular su comportamiento asintótico. Con este objetivo consideraremos una aproximación algo simple para las autofunciones y autovalores pero que nos permitirá estimar el comportamiento del espectro de masa para valores grandes de estos. En este punto seguiremos el procedimiento utilizado por 't Hooft en [30].

CAPÍTULO 6. ECUACIÓN DE AUTOVALORES PARA $\phi(X)$

Comenzaremos con la ecuación para $\phi(x)$ como fue escrita en primera instancia, esto es definida en el intervalo $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} \left[p^2 - \frac{m_d^2}{x} - \frac{m_d^2}{(1-x)} \right] \phi(x) &= -\frac{g^2}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \phi(y) \\ &- A \frac{\bar{\Sigma}_0^2}{x^{1-\beta}} \int_0^1 dy \frac{\phi(y)}{(1-y)^{1-\beta}} - A \frac{\bar{\Sigma}_0^2}{(1-x)^{1-\beta}} \int_0^1 dy \frac{\phi(y)}{y^{1-\beta}} \\ &+ A \frac{\bar{\Sigma}_0^2}{[(1-x)x]^{1-\beta}} \int_0^1 dy \phi(y) + A \bar{\Sigma}_0^2 \int_0^1 dy \frac{\phi(y)}{[(1-y)y]^{1-\beta}}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Luego siguiendo [30] consideramos soluciones que sean periódicas y que se anulen en los bordes. Para el término de 't Hooft obtenemos:

$$-\int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} e^{iwy} = \pi |w| e^{iwx}, \quad (6.34)$$

donde hemos considerado que la integral (6.34) recibe su mayor contribución cuando y es cercano a x . Considerando la expresión anterior para $\phi(x)$ reemplazamos a esta en los restantes términos y consideramos su parte imaginaria. Luego en el límite en que w es grande obtenemos:

$$Im \left\{ -A \frac{\bar{\Sigma}_0^2}{(1-x)^{1-\beta}} \int_0^1 dy \frac{e^{iwy}}{y^{1-\beta}} \right\} = -\frac{A \bar{\Sigma}_0^2}{(1-x)^{1-\beta}} \frac{\pi}{2} w^{-\beta}, \quad (6.35)$$

$$Im \left\{ -A \frac{\bar{\Sigma}_0^2}{x^{1-\beta}} \int_0^1 dy \frac{e^{iwy}}{(1-y)^{1-\beta}} \right\} = -\frac{A \bar{\Sigma}_0^2}{x^{1-\beta}} \frac{\pi}{2} w^{-\beta}, \quad (6.36)$$

$$Im \left\{ +A \frac{\bar{\Sigma}_0^2}{[(1-x)x]^{1-\beta}} \int_0^1 dy e^{iwy} \right\} = +A \frac{\bar{\Sigma}_0^2}{[(1-x)x]^{1-\beta}} \frac{-i}{w} \cos w, \quad (6.37)$$

$$Im \left\{ +A \bar{\Sigma}_0^2 \int_0^1 dy \frac{e^{iwy}}{(1-y)y} \right\} = +A \bar{\Sigma}_0^2 \pi w^{-\beta}. \quad (6.38)$$

Podemos apreciar que al igual que en QCD_2 si w es grande y $A \sim 0$ tenemos que las autofunciones pueden aproximarse por:

$$\phi_n(x) \simeq \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (6.39)$$

con autovalores:

$$\mu_n^2 \simeq \pi^2 n. \quad (6.40)$$

Esto es una trayectoria de Regge recta sin estados continuos, tal y como sucede en QCD_2 . Dado que las aproximaciones que se han realizado son válidas para valores grandes de n ,

6.4. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DEL ESPECTRO

tenemos que la ecuación (6.40) determina la forma asintótica del espectro de autovalores, en particular determina la forma asintótica de la trayectoria de Regge. Desviaciones de esta trayectoria son esperados para autovalores más pequeños debido a los términos que se han despreciado.

Capítulo 7

Matrices de Scattering

En este capítulo se resolverán las ecuaciones inhomogéneas de Bethe-Salpeter a partir de las soluciones conocidas de las ecuaciones homogéneas. Con este resultado se determinarán los valores de las matrices de scattering. Veremos como éstas pueden ser descritas en función de los vértices propios, previamente definidos y determinados en el Capítulo 5 y su Apéndice C. Se podrá apreciar que los autovalores de las ecuaciones para las funciones de onda definidas en el Capítulo 5 y su Apéndice C corresponden a los polos de las matrices de scattering. En este capítulo mostraremos el cálculo explícito para el caso de la amplitud de scattering $\Lambda(q, q'; p)$ y se darán los resultados para las demás amplitudes.

7.1. Ecuación de Bethe-Salpeter inhomogénea para Λ

En esta sección se resolverá la ecuación de Bethe-Salpeter inhomogénea para $\Lambda(q, q'; p)$. De los resultados obtenidos en el Capítulo 3 y su apéndice B tenemos que la amplitud de scattering $\Lambda(q, q'; p)$ satisface la siguiente ecuación integral:

$$\begin{aligned}
 \Lambda^{\alpha\beta, \gamma\delta}(q, q'; p) &= -i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')^2_-} \gamma_-^{\alpha\delta} \gamma_-^{\beta\gamma} - i \frac{g^2}{N_c} \frac{\sigma_3^{\alpha\delta} \sigma_3^{\beta\gamma}}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} \quad (7.1) \\
 &+ i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (ig \gamma_-^{\alpha\epsilon}) [S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} \Lambda^{\mu\beta, \nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}] (ig \gamma_-^{\lambda\gamma}) \frac{\mathbf{P}}{(q - k)^2_-} \\
 &- 2i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (g \sigma_3^{\alpha\epsilon}) \frac{[S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} \Lambda^{\mu\beta, \nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}]}{[(q - k)^2 - M^2 + i\epsilon]} (g \sigma_3^{\lambda\gamma})
 \end{aligned}$$

Como hemos mencionado esta ecuación es una generalización de las ecuaciones que satisfacen las amplitudes de scattering en QCD_2 . Sin embargo a diferencia de lo que sucede allí la estructura espinorial de nuestra ecuación no es trivial, de modo que no es posible factorizar

CAPÍTULO 7. MATRICES DE SCATTERING

la dependencia espinorial de (7.1) como sucede en QCD_2 donde todo finalmente resulta ser proporcional a $\gamma_-^{\alpha\gamma} \gamma_-^{\beta\delta}$ [31]. En nuestro caso esto no es así y debemos trabajar un poco más con la estructura espinorial de la ecuación antes de poder resolverla. Usando las relaciones que aparecen en el Apéndice E (E.17) y (E.20) podemos reescribir la ecuación (7.1) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\alpha\beta,\gamma\delta}(q, q'; p) = & - i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')_-^2} \gamma_-^{\alpha\gamma} \gamma_-^{\beta\delta} \\
& - i \frac{g^2}{4N_c} \frac{(\gamma_+ \gamma_-)^{\alpha\gamma} (\gamma_+ \gamma_-)^{\beta\delta} + (\gamma_- \gamma_+)^{\alpha\gamma} (\gamma_- \gamma_+)^{\beta\delta} - 2\gamma_+^{\alpha\gamma} \gamma_-^{\beta\delta} - 2\gamma_-^{\alpha\gamma} \gamma_+^{\beta\delta}}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} \\
& + i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (ig \gamma_-^{\alpha\epsilon}) [S^{\epsilon\mu}_{(k-p)} \Lambda^{\mu\beta,\nu\delta}(k, q'; p) S^{\nu\lambda}_{(k)}] (ig \gamma_-^{\lambda\gamma}) \frac{\mathbf{P}}{(q - k)_-^2} \\
& - 2i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (g \sigma_3^{\alpha\epsilon}) \frac{[S^{\epsilon\mu}_{(k-p)} \Lambda^{\mu\beta,\nu\delta}(k, q'; p) S^{\nu\lambda}_{(k)}]}{[(q - k)^2 - M^2 + i\epsilon]} (g \sigma_3^{\lambda\gamma}). \tag{7.2}
\end{aligned}$$

Luego si escribimos la dependencia en los índices espinoriales de $\Lambda(q, q'; p)$ como sigue:

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\alpha\beta,\gamma\delta}(q, q'; p) = & \Lambda_1^{\alpha\gamma}(q, q'; p) \gamma_-^{\beta\delta} + \Lambda_2^{\alpha\gamma}(q, q'; p) \gamma_+^{\beta\delta} \\
& + \Lambda_3^{\alpha\gamma}(q, q'; p) (\gamma_+ \gamma_-)^{\beta\delta} + \Lambda_4^{\alpha\gamma}(q, q'; p) (\gamma_- \gamma_+)^{\beta\delta}, \tag{7.3}
\end{aligned}$$

obtenemos estructuras espinoriales similares en (7.2) tanto para los términos que dependen de $\Lambda(q, q'; p)$ como para los otros dos términos haciendo más fácil trabajar con la ecuación. De esta manera la ecuación (7.2) aunque menos compacta resulta de utilidad en el momento de ser resuelta por medio de utilizar la solución de la ecuación homogénea.

En principio para obtener la matriz de scattering $\Lambda(q, q'; p)$ debemos determinar todas las componentes de ella definidas en (7.3), sin embargo notaremos que basta con conocer $\Lambda_1^{\alpha\gamma}$ para fijar las restantes componentes.

La ecuación inhomogénea que satisface $\Lambda_1^{\alpha\gamma}$ es:

$$\Lambda_1^{\alpha\gamma}(q, q'; p) = - i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')_-^2} \gamma_-^{\alpha\gamma} + i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\gamma_+^{\alpha\gamma}}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned}
& + \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (ig \gamma_-^{\alpha\epsilon}) [S^{\epsilon\mu}_{(k-p)} \Lambda_1^{\mu\nu}(k, q'; p) S^{\nu\lambda}_{(k)}] (ig \gamma_-^{\lambda\gamma}) \frac{\mathbf{P}}{(q - k)_-^2} \\
& - 2i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (g \sigma_3^{\alpha\epsilon}) \frac{[S^{\epsilon\mu}_{(k-p)} \Lambda_1^{\mu\nu}(k, q'; p) S^{\nu\lambda}_{(k)}]}{[(q - k)^2 - M^2 + i\epsilon]} (g \sigma_3^{\lambda\gamma}). \tag{7.5}
\end{aligned}$$

Siguiendo el procedimiento estándar definimos:

7.1. ECUACIÓN DE BETHE-SALPETER INHOMOGÉNEA PARA Λ

$$\bar{\Lambda}_1^{\epsilon\lambda}(q, q'; p) = [S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} \Lambda_1^{\mu\nu}(q, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}] \quad (7.6)$$

Luego podemos escribir la componente de la amplitud de scattering $\Lambda_1(q, q'; p)$ en función de la nueva variable $\bar{\Lambda}_1(q, q'; p)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Lambda_1(q, q'; p) = & - i \frac{g^2 \gamma_-}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')_-^2} + i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\gamma_+}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} \quad (7.7) \\ & + \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (ig \gamma_-) \bar{\Lambda}_1(k, q'; p) (ig \gamma_-) \frac{\mathbf{P}}{(q - k)_-^2} \\ & - 2i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(g \sigma_3) \bar{\Lambda}_1(k, q'; p) (g \sigma_3)}{[(q - k)^2 - M^2 + i\epsilon]} . \end{aligned}$$

Multiplicamos la ecuación (7.7) por la izquierda por $S(q - p)$ y por la derecha por $S(q)$ de modo de obtener la siguiente ecuación inhomogénea que satisface la matriz $\bar{\Lambda}_1(q, q'; p)$:

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_1(q, q'; p) = & - i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')_-^2} S(q - p) \gamma_- S(q) + i \frac{g^2}{2N_c} \frac{S(q - p) \gamma_+ S(q)}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} \\ & + S(q - p) (ig \gamma_-) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{\mathbf{P}}{(q - k)_-^2} \bar{\Lambda}_1(k, q'; p) \right] (ig \gamma_-) S(q) \quad (7.8) \\ & - 2i S(q - p) (g \sigma_3) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\bar{\Lambda}_1(k, q'; p)}{[(q - k)^2 - M^2 + i\epsilon]} (g \sigma_3) S(q) . \end{aligned}$$

Para resolver esta ecuación descomponemos a la matriz $\bar{\Lambda}_1(q, q'; p)$ de la siguiente manera:

$$\bar{\Lambda}_1(q, q'; p) = \bar{\Lambda}_1^+ \gamma_+ + \bar{\Lambda}_1^- \gamma_- + \bar{\Lambda}_1^{+-} \gamma_+ \gamma_- + \bar{\Lambda}_1^{-+} \gamma_- \gamma_+ . \quad (7.9)$$

Trabajando a primer orden en la expansión $1/M^2$ se resolvieron las ecuaciones integrales acopladas que satisfacen las componentes de $\bar{\Lambda}_1(q, q'; p)$ definidas en (7.9). Estos cálculos se encuentran resumidos en el Apéndice D. Con estos resultados se determinó $\Lambda_1(q, q'; p)$ hasta orden $1/M^2$ por medio del uso de la ecuación (7.7). El resultado se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Lambda_1(q, q'; p) = & - i \frac{g^2 \gamma_-}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')_-^2} + i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\gamma_+}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} \quad (7.10) \\ & + \sum_n \frac{i}{(p^2 - \bar{\mu}_n^2)} \left[\Lambda_n^+(x, p) \gamma_+ + \Lambda_n^-(x, p) \gamma_- + \right. \\ & \left. + \Lambda_n^{+-}(x, p) \gamma_+ \gamma_- + \Lambda_n^{-+}(x, p) \gamma_- \gamma_+ \right] \Lambda_n^-(x', p) . \end{aligned}$$

CAPÍTULO 7. MATRICES DE SCATTERING

Donde hemos introducido las variables adimensionales:

$$q_- = xp_-, \quad k_- = yp_-, \quad (7.11)$$

$$q'_- = x'p_-, \quad (7.12)$$

y hemos hecho uso de las definiciones que aparecen en el Apéndice D:

$$\Lambda_n^-(x, p) = \frac{g^2}{\sqrt{2\pi N_c} p_-} \left[\int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \phi_n(y) - A \int_0^1 dy \frac{\phi_n(y)}{[(1-y)y]^{1-\beta}} \right], \quad (7.13)$$

$$\Lambda_n^+(x, p) = A \sqrt{\frac{2\pi}{N_c}} p_- \int_0^1 dy \phi_n(y), \quad (7.14)$$

$$\Lambda_n^{+-}(x, p) = -A \frac{g}{2N_c} \int_0^1 dy \frac{\phi_n(y)}{y^{1-\beta}}, \quad (7.15)$$

$$\Lambda_n^{-+}(x, p) = A \frac{g}{2N_c} \int_0^1 dy \frac{\phi_n(y)}{(1-y)^{1-\beta}}, \quad (7.16)$$

$$\bar{\mu}_n^2 = \frac{g^2}{\pi} \mu_n^2. \quad (7.17)$$

Podemos notar que la expresión definida en (7.17) posee unidades de masa y que corresponde precisamente a la masa del estado ligado generado en el scattering Λ , esto es a un estado ligado con números cuánticos de $|P\rangle$.

Una vez determinada $\Lambda_1(q, q'; p)$ de la ecuación (7.3) recordamos que esta matriz corresponde a una de las componentes de la amplitud de scattering $\Lambda(q, q'; p)$; en particular a la componente proporcional a $\gamma_-^{\beta\delta}$ luego es posible percatarse de que lo que vemos en $\Lambda_1(q, q'; p)$ es uno de los términos que resulta del producto de dos vértices propios de la forma:

$$\begin{aligned} \Lambda_n^{\alpha, \gamma}(x; p) &= \frac{g^2}{\sqrt{2\pi N_c}} \frac{1}{p_-} \left[\int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \phi_n(y) - A \int_0^1 dy \frac{\phi_n(y)}{[(1-y)y]^{1-\beta}} \right] \gamma_-^{\alpha\gamma} \quad (7.18) \\ &+ A \sqrt{\frac{2\pi}{N_c}} p_- \left[\int_0^1 dy \phi_n(y) \right] \gamma_+^{\alpha\gamma} - A \frac{g}{\sqrt{2N_c}} \left[\int_0^1 dy \frac{\phi_n(y)}{y^{1-\beta}} \right] (\gamma_+ \gamma_-)^{\alpha\gamma} \\ &+ A \frac{g}{\sqrt{2N_c}} \left[\int_0^1 dy \frac{\phi_n(y)}{(1-y)^{1-\beta}} \right] (\gamma_- \gamma_+)^{\alpha\gamma}, \end{aligned}$$

cuando retenemos términos hasta orden $1/M^2$ en este producto. Notemos que este vértice corresponde, salvo una constante global:

$$C = i \sqrt{\frac{2}{N_c}} \pi^{\frac{3}{2}}, \quad (7.19)$$

7.2. AMPLITUDES DE SCATTERING Δ , Θ Y Ω

al vértice encontrado al resolver la ecuación homogénea de Bethe-Salpeter que satisface $\Lambda(q; p)$.

Escribiendo en forma explícita el resultado para la amplitud de scattering $\Lambda(q, q'; p)$ podemos notar que efectivamente los autovalores de la ecuación (5.19) corresponde a los polos de esta amplitud de scattering:

$$\begin{aligned} \Lambda^{\alpha\beta, \gamma\delta}(q, q'; p) &= -i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')^2_-} \gamma_-^{\alpha\delta} \gamma_-^{\beta\gamma} - i \frac{g^2}{N_c} \frac{\sigma_3^{\alpha\delta} \sigma_3^{\beta\gamma}}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} \\ &+ \sum_n \frac{i}{(p^2 - \tilde{\mu}_n^2)} \Lambda_n^{\alpha, \gamma}(q_-; p) \Lambda_n^{\beta, \delta}(q'_-; p) \quad . \end{aligned} \quad (7.20)$$

Esta ecuación se puede interpretar como el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{cc} q & q' \\ \Lambda & \\ p - q & p - q' \end{array} & = \frac{1}{2} - & + \begin{array}{ccc} q & & q' \\ & \Lambda_n & \overset{n}{\Lambda_n} \\ p - q & & p - q' \end{array} \end{array} \quad (7.21)$$

Donde la suma sobre el índice n esta implícita en el diagrama.

7.2. Amplitudes de Scattering Δ , Θ y Ω

El cálculo de las amplitudes de scattering restantes es similar al aquí desarrollado para $\Lambda(q, q'; p)$ y en esta sección nos limitaremos sólo a dar los resultados de estos.

Para la amplitud de scattering $\Delta(q, q'; p)$ obtenemos:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{cc} q & q' \\ \Delta & \\ p - q & p - q' \end{array} & = \frac{1}{2} + & + \begin{array}{ccc} q & & q' \\ & \Delta_n & \overset{n}{\Delta_n} \\ p - q & & p - q' \end{array} \end{array} \quad (7.22)$$

Donde el diagrama (7.22) representa a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \Delta^{\alpha\beta, \gamma\delta}(q, q'; p) &= -i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')^2_-} \gamma_-^{\alpha\delta} \gamma_-^{\beta\gamma} + i \frac{g^2}{N_c} \frac{\sigma_3^{\alpha\delta} \sigma_3^{\beta\gamma}}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} \\ &+ \sum_n \frac{i}{(p^2 - \tilde{\mu}_n^2)} \Delta_n^{\alpha, \gamma}(q_-; p) \Delta_n^{\beta, \delta}(q'_-; p) \quad . \end{aligned} \quad (7.23)$$

CAPÍTULO 7. MATRICES DE SCATTERING

El vértice propio $\Delta_n(q_-; p)$ y las masas de los estados ligados que se propagan $\tilde{\mu}_n$ están determinados en el Apéndice B en las ecuaciones (C.9) y (C.8) respectivamente. Notemos que el estado ligado que se propaga en (7.22) y que posee masa $\tilde{\mu}_n$ tiene números cuánticos asociados al estado $|S\rangle$, ver (3.3).

Para la amplitud de scattering $\Theta(q, q'; p)$ obtenemos:

$$\begin{array}{ccc} q & q' & q & q' \\ \Theta & = \frac{1}{2} & + & \Theta_n^n \Theta_n \\ p-q & p-q' & p-q & p-q' \end{array} \quad (7.24)$$

Donde el diagrama corresponde a la ecuación:

$$\Theta^{\alpha\beta, \gamma\delta}(q, q'; p) = -i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q-q')_-^2} \gamma_-^{\alpha\delta} \gamma_-^{\beta\gamma} + \sum_n \frac{i}{(p^2 - \bar{\omega}_n^2)} \Theta_n^{\alpha, \gamma}(q_-; p) \Theta_n^{\beta, \delta}(q'_-; p) . \quad (7.25)$$

El vértice propio $\Theta_n(q_-; p)$ y los masas de los estados ligados que se propagan en este caso corresponden a los valores de QCD_2 y están determinados por las ecuaciones (C.3) y (C.2) respectivamente. En este caso el estado ligado que se propaga en (7.24) de masa \bar{w}_n tiene números cuánticos asociados al estado $|V\rangle$, ver (3.4).

La amplitud de scattering $\Omega(q, q'; p)$ queda determinada por la siguiente expresión:

$$\begin{array}{ccc} q & q' & q & q' \\ \Omega & = \frac{1}{2} & + & \Omega_n^n \Omega_n \\ p-q & p-q' & p-q & p-q' \end{array} \quad (7.26)$$

Donde el diagrama corresponde a la siguiente ecuación:

$$\Omega^{\alpha\beta, \gamma\delta}(q, q'; p) = -i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q-q')_-^2} \gamma_-^{\alpha\delta} \gamma_-^{\beta\gamma} + \sum_n \frac{i}{(p^2 - \bar{\omega}_n^2)} \Omega_n^{\alpha, \gamma}(q_-; p) \Omega_n^{\beta, \delta}(q'_-; p) . \quad (7.27)$$

Al igual que en el caso de $\Theta(q, q'; p)$ los vértices propios (C.5) y las masas de los estados ligados (C.6) corresponde a los valores que se obtienen de QCD_2 . Luego los polos para las amplitudes de scattering $\Theta(q, q'; p)$ y $\Omega(q, q'; p)$ son iguales y además coinciden con los que se obtienen de QCD_2 cuando la masa de los quark en el Lagrangiano de QCD_2 es $m^2 = \frac{g^2}{\pi}$. En este caso el estado ligado que se propaga en (7.26) y cuya masa es \bar{w}_n tiene números cuánticos asociados al estado $|A\rangle$, ver (3.3).

7.3. Amplitudes de Scattering T

Una vez que se han determinado todas las amplitudes de scattering que satisfacen ecuaciones desacopladas de Bethe-Salpeter podemos volver a las amplitudes originales por medio del uso de las ecuaciones (3.5) y (3.6). De este modo obtenemos los siguientes resultados:

Soluciones Amplitudes T_1 y T_4

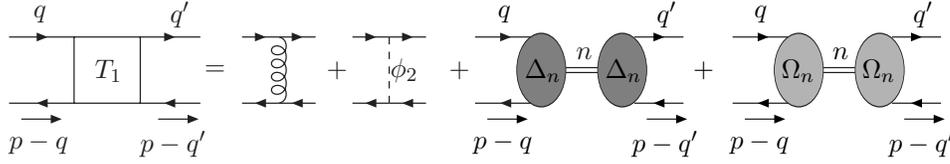


Figura 7.1: Solución para la amplitud de scattering T_1 .

$$\begin{aligned}
 T_1^{\alpha\beta,\gamma\delta}(q, q'; p) &= -i \frac{g^2}{N_c} \frac{\gamma_-^{\alpha\delta} \gamma_-^{\beta\gamma}}{(q - q')_-^2} + i \frac{g^2}{N_c} \frac{\sigma_3^{\alpha\gamma} \sigma_3^{\beta\delta}}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} + \\
 &+ \sum_n \frac{i}{(p^2 - \tilde{\mu}_n^2)} \Delta_n^{\alpha,\gamma}(q_-; p) \Delta_n^{\beta,\delta}(q'_-; p) + \sum_n \frac{i}{(p^2 - \bar{\omega}_n^2)} \Omega_n^{\alpha,\gamma}(q_-; p) \Omega_n^{\beta,\delta}(q'_-; p) .
 \end{aligned} \tag{7.28}$$

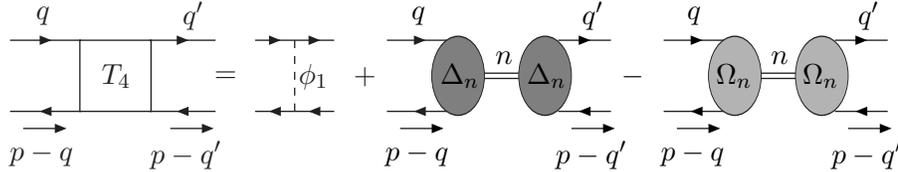
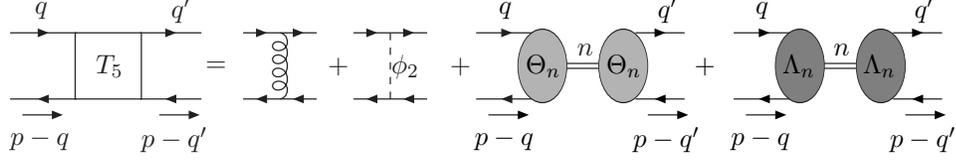


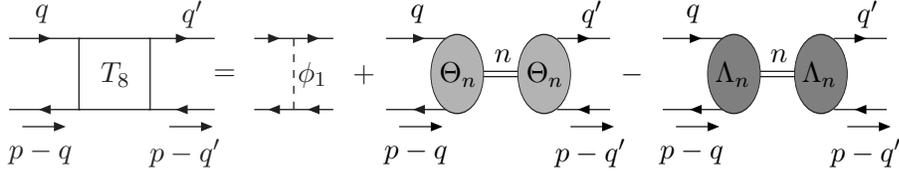
Figura 7.2: Solución para la amplitud de scattering T_4 .

$$\begin{aligned}
 T_4^{\alpha\beta,\gamma\delta}(q, q'; p) &= i \frac{g^2}{N_c} \frac{\sigma_3^{\alpha\gamma} \sigma_3^{\beta\delta}}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} + \\
 &+ \sum_n \frac{i}{(p^2 - \tilde{\mu}_n^2)} \Delta_n^{\alpha,\gamma}(q_-; p) \Delta_n^{\beta,\delta}(q'_-; p) - \sum_n \frac{i}{(p^2 - \bar{\omega}_n^2)} \Omega_n^{\alpha,\gamma}(q_-; p) \Omega_n^{\beta,\delta}(q'_-; p) .
 \end{aligned} \tag{7.29}$$

Podemos notar que no hay estados continuos en la amplitud de scattering quark-antiquark, sólo estados ligados en $p^2 = \tilde{\mu}_n^2$ y $p^2 = \bar{\omega}_n^2$, cuyos residuos determinan las funciones de onda $\Delta_n(q, p)$ y $\Omega_n(q, p)$. Como se ha mencionado y se demostrará en el siguiente capítulo alguno de los estados ligados poseen una interpretación directa en términos de los bilineales de Dirac de QCD_4 . En particular veremos que los estados ligados definidos por $\Delta_n(q, p)$ están relacionados con los estados ligados escalares de QCD en $4D$.

Soluciones Amplitudes T_5 y T_8

 Figura 7.3: Solución para la amplitud de scattering T_5 .

$$\begin{aligned}
 T_5^{\alpha\beta,\gamma\delta}(q, q'; p) &= -i \frac{g^2}{N_c} \frac{\gamma_-^{\alpha\delta} \gamma_-^{\beta\gamma}}{(q - q')_-^2} - i \frac{g^2}{N_c} \frac{\sigma_3^{\alpha\gamma} \sigma_3^{\beta\delta}}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} + \\
 &+ \sum_n \frac{i}{(p^2 - \bar{\omega}_n^2)} \Theta_n^{\alpha,\gamma}(q_-; p) \Theta_n^{\beta,\delta}(q'_-; p) + \sum_n \frac{i}{(p^2 - \bar{\mu}_n^2)} \Lambda_n^{\alpha,\gamma}(q_-; p) \Lambda_n^{\beta,\delta}(q'_-; p) .
 \end{aligned} \tag{7.30}$$


 Figura 7.4: Solución para la amplitud de scattering T_8 .

$$\begin{aligned}
 T_8^{\alpha\beta,\gamma\delta}(q, q'; p) &= i \frac{g^2}{N_c} \frac{\sigma_3^{\alpha\gamma} \sigma_3^{\beta\delta}}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} + \\
 &+ \sum_n \frac{i}{(p^2 - \bar{\omega}_n^2)} \Theta_n^{\alpha,\gamma}(q_-; p) \Theta_n^{\beta,\delta}(q'_-; p) - \sum_n \frac{i}{(p^2 - \bar{\mu}_n^2)} \Lambda_n^{\alpha,\gamma}(q_-; p) \Lambda_n^{\beta,\delta}(q'_-; p) .
 \end{aligned} \tag{7.31}$$

De igual modo como sucede con T_1 y T_4 podemos notar que en estas amplitudes de scattering no hay estados continuos, sino sólo estados ligados en $p^2 = \bar{\mu}_n^2$ y $p^2 = \bar{\omega}_n^2$, cuyos residuos determinan las funciones de onda $\Lambda_n(q, p)$ y $\Theta_n(q, p)$. Como se ha mencionado los estados ligados definidos por $\Lambda_n(q, p)$ están relacionados con los estados pseudoescalares de QCD en $4D$.

Capítulo 8

Resultados e Interpretación del Modelo

En este capítulo se hará una recapitulación de los principales resultados obtenidos al estudiar el modelo extendido de QCD_2 y se dará una prescripción para interpretar estos resultados respecto de la física de los hadrones en $4D$.

8.1. Estados Ligados $2D$

En esta tesis se ha probado que en el modelo extendido de QCD_2 (1.20) existen cuatro clases de estados ligados $q\bar{q}$ (mesones) con contenidos de quarks determinados por las ecuaciones (3.3) y (3.4). Estos son los mesones tipos S :

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2). \quad (8.1)$$

Las masas de estos mesones están determinadas por la ecuación:

$$\begin{aligned} \left[\tilde{\mu}^2 - \frac{m_d^2}{x} - \frac{m_d^2}{(1-x)} \right] \tilde{\phi}(x) &= -\frac{g^2}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \tilde{\phi}(y) \\ &- A \frac{\Sigma_0^2}{x^{1-\beta}} \int_0^1 dy \frac{\tilde{\phi}(y)}{(1-y)^{1-\beta}} - A \frac{\Sigma_0^2}{(1-x)^{1-\beta}} \int_0^1 dy \frac{\tilde{\phi}(y)}{y^{1-\beta}} \\ &+ A \frac{\Sigma_0^2}{[(1-x)x]^{1-\beta}} \int_0^1 dy \tilde{\phi}(y) + A \Sigma_0^2 \int_0^1 dy \frac{\tilde{\phi}(y)}{[(1-y)y]^{1-\beta}}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Como ha sido mencionado en el apéndice C esta ecuación es similar a (5.19) siendo la única diferencia el cambio en el signo en los términos proporcionales a A . Sin embargo esta ecuación a diferencia de (5.19) no admite soluciones no-perturbativas. Se estimó el espectro

CAPÍTULO 8. RESULTADOS E INTERPRETACIÓN DEL MODELO

Mesones S :		Mesones A y V :	Mesones P :	
$\tilde{\mu}_0^2$	$\tilde{\mu}_1^2$	$\bar{\omega}^2$	μ_0^2	μ_1^2
7.27	10.60	7.27	0	-
17.30	-18.20	17.30	17.30	18.20
27.12	17.96	27.12	27.12	-17.96
37.02	-18.93	37.02	37.02	18.93
46.92	20.14	46.92	46.92	-20.14
56.93	-21.84	56.93	56.93	21.84
71.05	24.13	71.01	71.05	-24.13
83.96	-28.09	83.96	83.96	28.09

Cuadro 8.1: Espectro de masas y correcciones para los diferentes mesones $2D$ en unidades de g^2/π .

de (8.2) usando teoría de perturbaciones usual siguiendo el esquema que fue utilizado en el Capítulo 5 para determinar los estados excitados de (5.19). En el Cuadro 8.1 son mostrados los resultados para el espectro de masas de esta ecuación.

También tenemos los mesones tipos A :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_1 \psi_1 - \bar{\psi}_2 \psi_2). \quad (8.3)$$

Las masas de estos mesones están determinadas por la ecuación:

$$\left[\bar{\omega}^2 - \frac{m_d^2}{x} - \frac{m_d^2}{(1-x)} \right] \omega(x) = -\frac{g^2}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \omega(y). \quad (8.4)$$

Podemos notar que la ecuación que determina la función de onda y el espectro de estos mesones corresponde a la ecuación de 't Hooft que se obtiene del estudio de los estados ligados de QCD_2 cuando la masa de los quarks en el Lagrangiano de QCD_2 es $m^2 = g^2/\pi$. El espectro de masas de estos mesones es mostrada en el Cuadro 8.1.

Tenemos los mesones tipo V :

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_1 \psi_2 + \bar{\psi}_2 \psi_1). \quad (8.5)$$

Las masas de estos mesones están determinadas por la ecuación:

$$\left[\bar{\omega}^2 - \frac{m_d^2}{x} - \frac{m_d^2}{(1-x)} \right] \theta(x) = -\frac{g^2}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \theta(y). \quad (8.6)$$

Estos mesones poseen el mismo espectro y función de onda que los mesones A .

Los mesones tipo P están definidos de la siguiente forma:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1). \quad (8.7)$$

8.2. INTERPRETACIÓN DEL MODELO

La ecuación que determina la función de onda y el espectro de este mesón es la que hemos desarrollado con más detalle en esta tesis ya que este estado ha sido tomado como ejemplo al resolver las ecuaciones de Bethe-Salpeter. La ecuación es:

$$\begin{aligned}
 \left[\bar{\mu}^2 - \frac{m_d^2}{x} - \frac{m_d^2}{(1-x)} \right] \phi(x) &= -\frac{g^2}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \phi(y) \\
 &- A \frac{\Sigma_0^2}{x^{1-\beta}} \int_0^1 dy \frac{\phi(y)}{(1-y)^{1-\beta}} - A \frac{\Sigma_0^2}{(1-x)^{1-\beta}} \int_0^1 dy \frac{\phi(y)}{y^{1-\beta}} \\
 &+ A \frac{\Sigma_0^2}{[(1-x)x]^{1-\beta}} \int_0^1 dy \phi(y) + A \Sigma_0^2 \int_0^1 dy \frac{\phi(y)}{[(1-y)y]^{1-\beta}}.
 \end{aligned} \tag{8.8}$$

En el Cuadro 8.1 aparece el espectro de masas de esta ecuación donde se ha incluido la solución no-perturbativa de masa cero, que corresponde al estado fundamental de (8.8).

8.2. Interpretación del Modelo

Como hemos mencionado en los capítulos anteriores los estados S y P soportan una interpretación respecto de la teoría en $4D$, esto debido a que las densidades bilineales escalares y pseudoescalares en $4D$ corresponden precisamente al tipo de combinaciones entre quarks ψ_1 y ψ_2 en $2D$ que definen a los estados S y P .

La densidad escalar en $4D$ viene dada por:

$$S = \bar{\Psi} \Psi, \tag{8.9}$$

donde Ψ es el espinor en $4D$. Esta cantidad se puede escribir respecto de las variables en $2D$ como sigue:

$$\bar{\Psi} \Psi = \bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2, \tag{8.10}$$

luego la densidad escalar en $4D$ corresponde a una densidad escalar en $2D$ con números de simetría internos asociados a un estado $|S\rangle$, ver (3.3).

Del mismo modo el bilineal de pseudoescalar de Dirac en $4D$ es:

$$P = \bar{\Psi} \gamma_5^{(4)} \Psi. \tag{8.11}$$

Esta expresión escrita respecto a las variables en $2D$ queda:

$$\bar{\Psi} \gamma_5^{(4)} \Psi = i(\bar{\psi}_1 \gamma_5^{(2)} \psi_2 - \bar{\psi}_2 \gamma_5^{(2)} \psi_1). \tag{8.12}$$

Podemos notar que la densidad pseudoescalar en $4D$ corresponde a una densidad pseudoescalar en $2D$ con números de simetría internos de un estado $|P\rangle$, ver (3.4).

CAPÍTULO 8. RESULTADOS E INTERPRETACIÓN DEL MODELO

Pseudoescalar	Escalar
0	974
1286	1531
1741	1929
2166	2356

Cuadro 8.2: Algunos valores para las masas de los mesones en $[MeV]$, donde hemos considerado $g^2/\sqrt{\pi} = 267[MeV]$ y $A = 0,22$.

De este modo tenemos que los estados ligados $q\bar{q}$ pseudoescalares en $4D$, esto es los mesones pseudoescalares en $4D$, corresponden a los mesones del tipo P pseudoescalares de nuestro modelo en $2D$. Estos últimos definidos por las soluciones pares de $\phi(x)$ en (8.8). Del mismo modo los mesones escalares en $4D$ corresponden a los mesones del tipo S escalares de nuestro modelo, estos definidos por las soluciones impares de $\tilde{\phi}(x)$ en (8.1).

Podemos notar que los espectros de masas predichos por nuestro modelo avalan esta interpretación ya que como vemos el espectro de los mesones pseudoescalares $4D$ predicho por él posee un estado con masa cero que corresponde al pión de nuestro modelo, el cual al estar trabajado en el límite quiral debe ser con masa cero debido al rompimiento espontáneo de la simetría quiral, como fue comentado en el Capítulo 1. Por otro lado el espectro de los mesones escalares en $4D$ predicho por el modelo es un espectro masivo en concordancia con lo que se espera de QCD en $4D$ y de lo que se observa en la naturaleza.

En el Cuadro 8.2 son mostrados algunos valores del espectro predicho por el modelo para las masas de los escalares y pseudoescalares, donde hemos considerado $g^2/\sqrt{\pi} = 267[MeV]$ y $A = 0,22$.

Capítulo 9

Conclusiones

En esta tesis se abordó el problema de estudiar la estructura de los hadrones desde sus grados de libertad fundamentales, quarks y gluones. Con este objetivo se estudió un modelo efectivo de QCD en $2D$, modelo que es obtenido de QCD en $4D$ al compactificar dos dimensiones espaciales en un 2-Toro y despreciar los modos masivos de K-K. Se ha estimado que este modelo en $2D$ es más realista que sólo considerar QCD_2 debido a que el modelo incluye de una manera no trivial los grados de libertad físicos (transversales) de los gluones en $4D$ que están ausentes en QCD_2 .

Se trató este modelo trabajando en el esquema de cuantización a tiempos iguales usando ecuaciones de Schwinger-Dyson en vez de usar cuantización Hamiltoniana. Se demostró que los campos escalares en la representación adjunta del grupo $SU(N_c)$ del modelo en $2D$, que representan a los grados de libertad físicos de los gluones en $4D$ adquieren en forma dinámica un valor para sus masas diferente de cero y que estas crecen cuando el radio de compactificación se hace pequeño. Se realizó un análisis explícito de los estados ligados $q\bar{q}$ del modelo por medio del uso de la ecuación de Bethe-Salpeter que fue resuelta para los diferentes canales en la aproximación en que las masas de los campos escalares es grande. También se encontró una prescripción para interpretar estos estados ligados en $2D$ respecto de los estados ligados de QCD en $4D$.

Se encontró que el modelo posee dos regímenes clasificados por las soluciones a la autoenergía de los quarks. En uno de ellos, el perturbativo, tenemos quarks con propiedades taquiónicas en el límite quiral tal y como sucede en QCD_2 [30]. Luego nuestro modelo puede ser interpretado como una perturbación de los que sería QCD_2 en el límite quiral. Sin embargo no es posible considerar esta posibilidad debido a que en este régimen el espectro de masa para los estados $q\bar{q}$ posee estados con masas imaginarias. Esto significa que la solución quiral de 't Hooft no es una correcta solución para comenzar una perturbación a QCD_2 que incluya grados de libertad transversales. También se puede notar que en este régimen las ecuaciones que describen el espectro de masa de los estados escalares y pseudoescalares

CAPÍTULO 9. CONCLUSIONES

respecto de $4D$ son iguales, lo que es una clara señal de que se está perdiendo información. Por otro lado la solución no-perturbativa a la autoenergía de los quarks soporta en forma consistente quarks no taquiónicos cuyas masas dinámicas en el límite quiral van a cero y un espectro con masas reales para los mesones.

Se focalizó el trabajo en el estudio de estados ligados quark-antiquark con este objetivo se estudiaron las amplitudes de scattering $q\bar{q}$ para los diferentes canales. Estas amplitudes fueron determinadas al solucionar las ecuaciones de Bethe-Salpeter que ellas satisfacen. De este modo se determinó que el modelo en $2D$ posee cuatro clases de estados ligados. Para cada uno de estos estados ligados se determinó su espectro de masa al transformar la ecuación homogénea de Bethe-Salpeter que cada amplitud satisface en una ecuación de autovalores. Se demostró que estos autovalores corresponden a los polos de las amplitudes de scattering probando de este modo que los autovalores corresponden a las masas de los estados ligados $q\bar{q}$. Durante este proceso también se determinaron los vértices propios quark-antiquark-mesón y las funciones de onda de estos estados ligados.

Se demostró que dos de las clases de estados ligados del modelo en $2D$ poseen una interpretación respecto de sus propiedades bajo transformaciones de Lorentz inherentes de $4D$. En particular se identificaron dichos estados con los mesones escalares y pseudoescalares de la teoría en $4D$. Se identificaron los espectros de masa referentes a estos estados comprobándose que el estado fundamental pseudoescalar (respecto de $4D$) es de masa cero, luego este estado fue identificado como el pión del modelo. Para los estados escalares (respecto de $4D$) se encontró un espectro masivo.

Respecto al pión de nuestro modelo esperamos que éste retenga más propiedades físicas de la teoría en $4D$ que la solución pseudoescalar de masa cero que es obtenida de QCD_2 , el cual como ha sido probado [46] se encuentra completamente desacoplado del resto de los estados. Esto último debido a que la corriente vectorial $U(1)$ $J^\mu = \bar{\psi}^a \gamma^\mu \psi^a + \bar{\psi}^b \gamma^\mu \psi^b$ en QCD_2 es conservada, luego podemos escribir $J^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x)$. Debido a la relación $\gamma_\mu \gamma_5 = \epsilon_{\mu\nu} \gamma^\nu$ que se satisface en $2D$ tenemos que podemos escribir la corriente $U(1)$ axial de la siguiente manera $J_\mu^5 = \partial_\mu \phi(x)$, luego si la corriente axial es también conservada tenemos que se cumple $\partial^\mu \partial_\mu \phi = 0$. Este resultado, desde el punto de vista de la versión bosonizada de QCD_2 , implica la existencia de un campo escalar de masa cero y desacoplado de la teoría. Este estado es identificado con la solución pseudoescalar de masa cero $\phi_0(x) = 1$ obtenida por 't Hooft para QCD_2 [30].

En nuestro modelo la situación es diferente debido a que la simetría $U(1)$ axial está explícitamente rota debido a los términos de interacción entre los espinores y los campos escalares, como fue señalado en el Capítulo 1. Pero nuestro modelo posee otra simetría interna $O(2)$, que como fue explicado en el Capítulo 1, corresponde a la proyección de la simetría de Lorentz en $4D$ $SO(1,3)$ a la simetría $SO(1,1) \times O(2)$ en $2D$. Las corrientes vectoriales y axiales de la simetría $O(2)$ son conservadas en nuestro modelo. La simetría axial $O(2)$ en $2D$

corresponde precisamente a la proyección de la simetría axial $U(1)$ de QCD_4 (en el límite quiral) a nuestro modelo en $2D$. Nuestro mesón pseudoescalar con masa cero está relacionado con las corrientes $O(2)$ luego podemos esperar un comportamiento diferente para él respecto del pión de 't Hooft, en particular se espera que nuestro pión esté acoplado al resto de los estados debido a que no existe una restricción para que esto ocurra. Con la ayuda de los vértices propios determinados en esta tesis se está trabajando sobre este punto.

CAPÍTULO 9. CONCLUSIONES

Apéndice A

Reglas de Feynman

A.1. Reglas de Feynman en Notación Doble Línea

Propagador de los campos de gauge

$$A_+^a \quad q \quad A_+^c \quad d = i \frac{\mathbf{P}}{q_-^2} \left[\delta_d^a \delta_b^c - \frac{1}{N_c} \delta_b^a \delta_d^c \right]. \quad (\text{A.1})$$

La prescripción del valor principal para el propagador del A_+ aparece debido a que estamos utilizando el cutoff regular para el campo de gauge [32, 52].

Propagador de los campos escalares

$$\phi_i^a \quad q \quad \phi_j^c \quad d = \frac{i \delta_{ij}}{[q^2 - M^2 + i\epsilon]} \left[\delta_d^a \delta_b^c - \frac{1}{N_c} \delta_b^a \delta_d^c \right]. \quad (\text{A.2})$$

El índice $i = 1, 2$ identifica a los dos tipos de campos escalares del modelo.

Propagador de los fermiones

$$\langle \psi_i^a \bar{\psi}_j^b \rangle = \quad q \quad = \frac{i (\gamma_- p_+ + \gamma_+ p_- + m)}{[p^2 - m + i\epsilon]} \delta_b^a \delta_{ij}. \quad (\text{A.3})$$

El índice $i = 1, 2$ identifica a las dos variedades de espinores que el modelo en $2D$ posee. Se ha omitido escribir explícitamente los índices espinoriales inherentes de las matrices γ .

Vértice $(\bar{\psi} \mathbf{A}_\mu \psi)$:

$$\bar{\psi}_i^a \quad A_+^b \quad c = i \frac{g}{\sqrt{N_c}} \gamma_- \left[\delta_b^a \delta_d^c - \frac{1}{N_c} \delta_d^a \delta_b^c \right] \delta_{ij}. \quad (\text{A.4})$$

$$\psi_j^d$$

APÉNDICE A. REGLAS DE FEYNMAN

Este vértice es el usual de QCD_2 en el gauge cono de luz y fue el que utilizó 't Hooft en [30]. Debido a que en QCD_2 éste es el único vértice resulta que la estructura de Lorenz es trivial ya que todos los diagramas son proporcionales a γ_- de este modo es posible olvidarse de la estructura espinorial en QCD_2 . Esto no ocurre en nuestro modelo donde la estructura espinorial es relevante.

Vértice $(\bar{\psi} \phi_1 \psi)$:

$$\bar{\psi}_{1a}$$

$$\phi_1^b{}_c = -\frac{g}{\sqrt{N_c}} \sigma_3 \left[\delta_b^a \delta_d^c - \frac{1}{N_c} \delta_d^a \delta_b^c \right]. \quad (\text{A.5})$$

$$\psi_2^d$$

Podemos notar que este vértice produce el intercambio entre las dos variedades de espinores en $2D$.

Vértice $(\bar{\psi} \phi_2 \psi)$:

$$\bar{\psi}_{1a}$$

$$\phi_2^b{}_c = \mp \frac{g}{\sqrt{N_c}} \sigma_3 \left[\delta_b^a \delta_d^c - \frac{1}{N_c} \delta_d^a \delta_b^c \right]. \quad (\text{A.6})$$

$$\psi_2^d$$

Este vértice es similar al anterior, pero no mezcla a las dos variedades de espinores.

Vértice $(\mathbf{A}_\mu \phi_i \phi_j)$:

$$\phi_i^a{}_b \quad r$$

$$A_+^c{}_d = i \frac{g}{\sqrt{N_c}} (q-r)_- \left[\delta_f^a \delta_b^c \delta_d^e + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N_c}\right) \right] \delta_{ij}, \quad (\text{A.7})$$

$$\phi_j^e{}_f \quad q$$

A diferencia de QCD_2 el campo de gauge no sólo interactúa con los espinores sino también con los campos escalares, como se ve de este vértice.

Vértice $(\phi_1 \phi_2)^2$:

$$\phi_2^e{}_f$$

$$\phi_2^g{}_h$$

$$= i \frac{g^2}{N_c} \left[\delta_h^a \delta_b^c \delta_d^e \delta_f^g - \delta_f^a \delta_b^c \delta_d^g \delta_h^e + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N_c}\right) \right]. \quad (\text{A.8})$$

$$\phi_1^a{}_b$$

$$\phi_1^c{}_d$$

A.2. REGLAS DE FEYNMAN EN NOTACIÓN ADJUNTA NORMAL

A diferencia del campo de gauge los campos escalares pueden auto-interactuar.

Los términos $1/N_c$ de los últimos dos vértices han sido omitidos debido a que no serán necesarios en nuestros cálculos debido a que trabajaremos siempre al mayor orden posible en la expansión $1/N_c$. De igual modo los términos $1/N_c$ de los propagadores y vértices restantes también no serán relevantes en nuestros cálculos y han sido incluidos sólo como una referencia.

A.2. Reglas de Feynman en Notación Adjunta Normal

Propagador de los campos de gauge

$$\begin{array}{c} q \\ A_+^A \end{array} \quad A_+^B = i \frac{\mathbf{P}}{q_-^2} \delta^{AB}. \quad (\text{A.9})$$

Propagador de los campos escalares

$$\begin{array}{c} q \\ \phi_i^A \end{array} \quad \phi_j^B = \frac{i \delta_{ij}}{[q^2 - M^2 + i\epsilon]} \delta^{AB}. \quad (\text{A.10})$$

Vértice ($\bar{\psi} \mathbf{A}_\mu \psi$):

$$\begin{array}{c} \bar{\psi}_i \\ \psi_j \end{array} \quad A_+^A = i \frac{g}{\sqrt{N_c}} \delta_{ij} \gamma_- T^A. \quad (\text{A.11})$$

Vértice ($\bar{\psi} \phi_1 \psi$):

$$\begin{array}{c} \bar{\psi}_1 \\ \psi_2 \end{array} \quad \phi_1^A = - \frac{g}{\sqrt{N_c}} \sigma_3 T^A. \quad (\text{A.12})$$

Vértice ($\bar{\psi} \phi_2 \psi$):

$$\begin{array}{c} \bar{\psi}_1 \\ \psi_2 \end{array} \quad \phi_2^A = \mp \frac{g}{\sqrt{N_c}} \sigma_3 T^A. \quad (\text{A.13})$$

APÉNDICE A. REGLAS DE FEYNMAN

Vértice ($A_\mu \phi_i \phi_j$):

$$\begin{array}{ccc}
 \phi_i^B & r & \\
 & & A_+^A = -\frac{g}{\sqrt{N_c}} \frac{C^{ABC}}{2} (q-r)_- \delta_{ij}, \quad (\text{A.14}) \\
 \phi_j^C & q &
 \end{array}$$

Vértice $(\phi_1 \phi_2)^2$:

$$\begin{array}{ccc}
 \phi_2^{B'} & \phi_2^{B'} & \\
 & & = -i \frac{g^2}{N_c} C^{ABC} C^{A'B'C}. \quad (\text{A.15}) \\
 \phi_1^{A'} & \phi_1^{A'} &
 \end{array}$$

Apéndice B

Notas del Capítulo 3

En este apéndice trabajaremos en más detalle las ecuaciones de Bethe-Salpeter que satisfacen las amplitudes de scattering T . Se verá que efectivamente estas ecuaciones están acopladas. Demostraremos que definiendo nuevas amplitudes de scattering es posible desacoplar estas ecuaciones.

B.1. Ecuación de Bethe-Salpeter Amplitudes T_1 y T_4

Comenzaremos estudiando las amplitudes de scattering T_1 y T_4 . Estas amplitudes satisfacen las siguientes relaciones (ver Figura (3.14) respecto de la notación):

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{q} \\
 \xrightarrow{1} \quad \xrightarrow{1} \\
 | \quad | \\
 \boxed{T_1} \\
 | \quad | \\
 \xleftarrow{1} \quad \xleftarrow{1} \\
 \xleftarrow{p-q} \quad \xleftarrow{p-q'}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{1} \quad \xrightarrow{1} \\
 | \quad | \\
 \boxed{\phi_1} \\
 | \quad | \\
 \xleftarrow{1} \quad \xleftarrow{1} \\
 \xleftarrow{1} \quad \xleftarrow{1}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{1} \quad \xrightarrow{1} \\
 | \quad | \\
 \boxed{\phi_2} \\
 | \quad | \\
 \xleftarrow{1} \quad \xleftarrow{1} \\
 \xleftarrow{1} \quad \xleftarrow{1}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{1} \quad \xrightarrow{1} \\
 | \quad | \\
 \boxed{\phi_1} \\
 | \quad | \\
 \xleftarrow{1} \quad \xleftarrow{1} \\
 \xleftarrow{1} \quad \xleftarrow{1}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{1} \quad \xrightarrow{1} \\
 | \quad | \\
 \boxed{\phi_2} \\
 | \quad | \\
 \xleftarrow{1} \quad \xleftarrow{1} \\
 \xleftarrow{1} \quad \xleftarrow{1}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{1} \quad \xrightarrow{1} \\
 | \quad | \\
 \boxed{\phi_1} \\
 | \quad | \\
 \xleftarrow{1} \quad \xleftarrow{1} \\
 \xleftarrow{1} \quad \xleftarrow{1}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{q} \\
 \xrightarrow{2} \quad \xrightarrow{1} \\
 | \quad | \\
 \boxed{T_4} \\
 | \quad | \\
 \xleftarrow{2} \quad \xleftarrow{1} \\
 \xleftarrow{p-q} \quad \xleftarrow{p-q'}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{2} \quad \xrightarrow{1} \\
 | \quad | \\
 \boxed{\phi_1} \\
 | \quad | \\
 \xleftarrow{2} \quad \xleftarrow{1} \\
 \xleftarrow{2} \quad \xleftarrow{1}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{2} \quad \xrightarrow{1} \\
 | \quad | \\
 \boxed{\phi_2} \\
 | \quad | \\
 \xleftarrow{2} \quad \xleftarrow{1} \\
 \xleftarrow{2} \quad \xleftarrow{1}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{2} \quad \xrightarrow{1} \\
 | \quad | \\
 \boxed{\phi_1} \\
 | \quad | \\
 \xleftarrow{2} \quad \xleftarrow{1} \\
 \xleftarrow{2} \quad \xleftarrow{1}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{2} \quad \xrightarrow{1} \\
 | \quad | \\
 \boxed{\phi_2} \\
 | \quad | \\
 \xleftarrow{2} \quad \xleftarrow{1} \\
 \xleftarrow{2} \quad \xleftarrow{1}
 \end{array}$$

Que representan a las siguientes ecuaciones inhomogéneas de Bethe-Salpeter:

$$\begin{aligned}
 T_1^{\alpha\beta,\gamma\delta}(q, q'; p) &= -i \frac{g^2}{N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')_-^2} \gamma_-^{\alpha\delta} \gamma_-^{\beta\gamma} + i \frac{g^2}{N_c} \frac{\sigma_3^{\alpha\delta} \sigma_3^{\beta\gamma}}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} \quad (\text{B.1}) \\
 &+ i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (ig \gamma_-^{\alpha\epsilon}) [S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} T_1^{\mu\beta,\nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}] (ig \gamma_-^{\lambda\gamma}) \frac{\mathbf{P}}{(q - k)_-^2} \\
 &+ i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (g \sigma_3^{\alpha\epsilon}) \frac{[S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} T_1^{\mu\beta,\nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}]}{[(q - k)^2 - M^2 + i\epsilon]} (g \sigma_3^{\lambda\gamma}) \\
 &+ i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (g \sigma_3^{\alpha\epsilon}) \frac{[S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} T_4^{\mu\beta,\nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}]}{[(q - k)^2 - M^2 + i\epsilon]} (g \sigma_3^{\lambda\gamma}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_4^{\alpha\beta,\gamma\delta}(q, q'; p) &= +i \frac{g^2}{N_c} \frac{\sigma_3^{\alpha\delta} \sigma_3^{\beta\gamma}}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} \quad (\text{B.2}) \\
 &+ i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (ig \gamma_-^{\alpha\epsilon}) [S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} T_4^{\mu\beta,\nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}] (ig \gamma_-^{\lambda\gamma}) \frac{\mathbf{P}}{(q - k)_-^2} \\
 &+ i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (g \sigma_3^{\alpha\epsilon}) \frac{[S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} T_4^{\mu\beta,\nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}]}{[(q - k)^2 - M^2 + i\epsilon]} (g \sigma_3^{\lambda\gamma}) \\
 &+ i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (g \sigma_3^{\alpha\epsilon}) \frac{[S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} T_1^{\mu\beta,\nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}]}{[(q - k)^2 - M^2 + i\epsilon]} (g \sigma_3^{\lambda\gamma}).
 \end{aligned}$$

Podemos notar que las ecuaciones de Bethe-Salpeter para estas amplitudes están acopladas. Podemos desacoplar las ecuaciones definiendo las siguientes amplitudes:

$$\Delta = \frac{1}{2} (T_1 + T_4), \quad \Omega = \frac{1}{2} (T_1 - T_4). \quad (\text{B.3})$$

Luego tenemos que las nuevas amplitudes satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \Delta^{\alpha\beta,\gamma\delta}(q, q'; p) &= -i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')_-^2} \gamma_-^{\alpha\delta} \gamma_-^{\beta\gamma} + i \frac{g^2}{N_c} \frac{\sigma_3^{\alpha\delta} \sigma_3^{\beta\gamma}}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} \quad (\text{B.4}) \\
 &+ i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (ig \gamma_-^{\alpha\epsilon}) [S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} \Delta^{\mu\beta,\nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}] (ig \gamma_-^{\lambda\gamma}) \frac{\mathbf{P}}{(q - k)_-^2} \\
 &+ 2i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (g \sigma_3^{\alpha\epsilon}) \frac{[S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} \Delta^{\mu\beta,\nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}]}{[(q - k)^2 - M^2 + i\epsilon]} (g \sigma_3^{\lambda\gamma}).
 \end{aligned}$$

B.2. ECUACIÓN DE BETHE-SALPETER AMPLITUDES T_5 Y T_8

$$\begin{aligned} \Omega^{\alpha\beta,\gamma\delta}(q, q'; p) &= -i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')_-^2} \gamma_-^{\alpha\delta} \gamma_-^{\beta\gamma} \\ &+ i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (ig \gamma_-^{\alpha\epsilon}) [S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} \Omega^{\mu\beta,\nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}] (ig \gamma_-^{\lambda\gamma}) \frac{\mathbf{P}}{(q - k)_-^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Que como hemos mencionado en el capítulo 3 representan a los siguientes diagramas:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} q \qquad q' \\ \Delta \end{array} &= \frac{1}{2} \quad + \quad + \quad \Delta \quad + 2 \quad \Delta \\ \begin{array}{c} p - q \qquad p - q' \end{array} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} q \qquad q' \\ \Omega \end{array} &= \frac{1}{2} \quad + \quad \Omega \\ \begin{array}{c} p - q \qquad p - q' \end{array} & \end{aligned}$$

B.2. Ecuación de Bethe-Salpeter Amplitudes T_5 y T_8

Las amplitudes T_5 y T_8 satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} q \qquad q' \\ \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ T_5 \\ \overleftarrow{2} \quad \overrightarrow{2} \\ p - q \qquad p - q' \end{array} &= \begin{array}{c} \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \phi_2 \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ T_5 \\ \overleftarrow{2} \quad \overrightarrow{2} \end{array} + \begin{array}{c} \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \phi_2 \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ T_5 \\ \overleftarrow{2} \quad \overrightarrow{2} \end{array} + \begin{array}{c} \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \phi_2 \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ T_5 \\ \overleftarrow{2} \quad \overrightarrow{2} \end{array} + \begin{array}{c} \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \phi_2 \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ T_5 \\ \overleftarrow{2} \quad \overrightarrow{2} \end{array} + \begin{array}{c} \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \phi_1 \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ T_8 \\ \overleftarrow{2} \quad \overrightarrow{2} \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} q \qquad q' \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ T_8 \\ \overleftarrow{1} \quad \overrightarrow{1} \\ p - q \qquad p - q' \end{array} &= \begin{array}{c} \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \phi_1 \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ T_8 \\ \overleftarrow{1} \quad \overrightarrow{1} \end{array} + \begin{array}{c} \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \phi_2 \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ T_8 \\ \overleftarrow{1} \quad \overrightarrow{1} \end{array} + \begin{array}{c} \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \phi_2 \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ T_8 \\ \overleftarrow{1} \quad \overrightarrow{1} \end{array} + \begin{array}{c} \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \phi_1 \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ \overrightarrow{1} \quad \overleftarrow{1} \\ \overrightarrow{2} \quad \overleftarrow{2} \\ T_5 \\ \overleftarrow{1} \quad \overrightarrow{1} \end{array} \end{aligned}$$

Que representan a las siguientes ecuaciones integrales:

$$\begin{aligned}
 T_5^{\alpha\beta,\gamma\delta}(q, q'; p) &= -i \frac{g^2}{N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')_-^2} \gamma_-^{\alpha\delta} \gamma_-^{\beta\gamma} - i \frac{g^2}{N_c} \frac{\sigma_3^{\alpha\delta} \sigma_3^{\beta\gamma}}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} \quad (\text{B.6}) \\
 &+ i \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} (ig \gamma_-^{\alpha\epsilon}) [S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} T_5^{\mu\beta,\nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}] (ig \gamma_-^{\lambda\gamma}) \frac{\mathbf{P}}{(q - k)_-^2} \\
 &- i \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} (g \sigma_3^{\alpha\epsilon}) \frac{[S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} T_5^{\mu\beta,\nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}]}{[(q - k)^2 - M^2 + i\epsilon]} (g \sigma_3^{\lambda\gamma}) \\
 &+ i \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} (g \sigma_3^{\alpha\epsilon}) \frac{[S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} T_8^{\mu\beta,\nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}]}{[(q - k)^2 - M^2 + i\epsilon]} (g \sigma_3^{\lambda\gamma}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_8^{\alpha\beta,\gamma\delta}(q, q'; p) &= + i \frac{g^2}{N_c} \frac{\sigma_3^{\alpha\delta} \sigma_3^{\beta\gamma}}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} \quad (\text{B.7}) \\
 &+ i \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} (ig \gamma_-^{\alpha\epsilon}) [S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} T_8^{\mu\beta,\nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}] (ig \gamma_-^{\lambda\gamma}) \frac{\mathbf{P}}{(q - k)_-^2} \\
 &- i \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} (g \sigma_3^{\alpha\epsilon}) \frac{[S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} T_8^{\mu\beta,\nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}]}{[(q - k)^2 - M^2 + i\epsilon]} (g \sigma_3^{\lambda\gamma}) \\
 &+ i \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} (g \sigma_3^{\alpha\epsilon}) \frac{[S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} T_5^{\mu\beta,\nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}]}{[(q - k)^2 - M^2 + i\epsilon]} (g \sigma_3^{\lambda\gamma}).
 \end{aligned}$$

Para desacoplar estas ecuaciones definimos las siguientes amplitudes:

$$\Theta = \frac{1}{2} (T_5 + T_8), \quad \Lambda = \frac{1}{2} (T_5 - T_8). \quad (\text{B.8})$$

Estas amplitudes satisfacen las siguientes ecuaciones integrales:

$$\begin{aligned}
 \Lambda^{\alpha\beta,\gamma\delta}(q, q'; p) &= -i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')_-^2} \gamma_-^{\alpha\delta} \gamma_-^{\beta\gamma} - i \frac{g^2}{N_c} \frac{\sigma_3^{\alpha\delta} \sigma_3^{\beta\gamma}}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} \quad (\text{B.9}) \\
 &+ i \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} (ig \gamma_-^{\alpha\epsilon}) [S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} \Lambda^{\mu\beta,\nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}] (ig \gamma_-^{\lambda\gamma}) \frac{\mathbf{P}}{(q - k)_-^2} \\
 &- 2i \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} (g \sigma_3^{\alpha\epsilon}) \frac{[S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} \Lambda^{\mu\beta,\nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}]}{[(q - k)^2 - M^2 + i\epsilon]} (g \sigma_3^{\lambda\gamma})
 \end{aligned}$$

B.2. ECUACIÓN DE BETHE-SALPETER AMPLITUDES T_5 Y T_8

$$\begin{aligned}
 \Theta^{\alpha\beta,\gamma\delta}(q, q'; p) &= -i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')_-^2} \gamma_-^{\alpha\delta} \gamma_-^{\beta\gamma} \\
 &+ i \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} (ig \gamma_-^{\alpha\epsilon}) [S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} \Theta^{\mu\beta,\nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}] (ig \gamma_-^{\lambda\gamma}) \frac{\mathbf{P}}{(q - k)_-^2}.
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Estas ecuaciones corresponden a los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \gamma & q & & q' & \beta & & k & & k \\
 & & \Lambda & & \delta = \frac{1}{2} & - & + & \Lambda & -2 & \Lambda \\
 \alpha & & & & & & & & & \\
 p - q & & p - q' & & & & p - k & & p - k \\
 & & & & q & & q' & & \\
 & & & & \Theta & = & \frac{1}{2} & + & \Theta \\
 & & p - q & & p - q' & & & &
 \end{array}$$

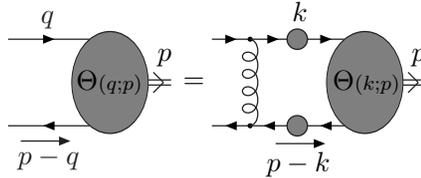
Apéndice C

Notas Capítulo 5

En el capítulo 5 se desarrolló la ecuación homogénea de Bethe-Salpeter que satisface $\Lambda(q;p)$. En este apéndice trabajaremos con las restantes ecuaciones homogéneas que satisfacen los vértices propios $\Theta(q;p)$, $\Omega(q;p)$ y $\Delta(q;p)$.

C.1. Vértice Propio $\Theta(q, p)$

Consideramos la ecuación homogénea que satisface Θ :



Que representa a la ecuación para el vértice propio quark-antiquark -Mesón en un estado $|V\rangle$. La forma explícita de esta ecuación es la siguiente:

$$\Theta^{\alpha, \gamma}(q; p) = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} (ig \gamma_-^{\alpha\epsilon}) [S^{\epsilon\mu}_{(k-p)} \Theta^{\mu, \nu}(k; p) S^{\nu\lambda}_{(k)}] (ig \gamma_-^{\lambda\gamma}) \frac{\mathbf{P}}{(q-k)_-^2} \quad (\text{C.1})$$

Podemos notar que esta ecuación es similar a la ecuación que satisface el vértice propio en QCD_2 , luego y siguiendo el mismo procedimiento que en QCD_2 podemos obtener la ecuación de autovalores que determina al espectro de masas de los estados ligados $|V\rangle$:

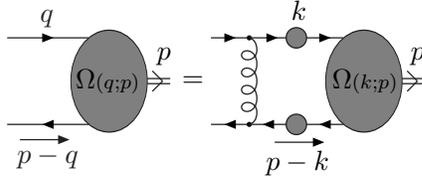
$$\left[p^2 - \frac{m_d^2}{x} - \frac{m_d^2}{(1-x)} \right] \theta(x) = -\frac{g^2}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \theta(y), \quad (\text{C.2})$$

donde la única dependencia en M^2 se encuentra en la solución para el propagador vestido de los quarks que en esta ecuación se refleja en el valor de m_d^2 . El vértice propio queda entonces determinado en función de $\theta(x)$ de la siguiente manera:

$$\Theta_n^{\alpha,\gamma}(x; p) = -i \frac{g^2}{2p_- \pi^2} \int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \theta_n(y) \gamma_-^{\alpha\gamma} \quad (\text{C.3})$$

C.2. Vértice Propio $\Omega(q, p)$

La ecuación homogénea que satisface $\Omega(q, p)$ es similar a la ecuación para $\Theta(q, p)$:



$$\Omega^{\alpha,\gamma}(q; p) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (ig \gamma_-^{\alpha\epsilon}) [S^{\epsilon\mu}(k-p) \Omega^{\mu,\nu}(k; p) S^{\nu\lambda}(k)] (ig \gamma_-^{\lambda\gamma}) \frac{\mathbf{P}}{(q-k)_-^2}. \quad (\text{C.4})$$

Luego la ecuación de autovalores que determina las masas de los mesones $|A\rangle$ es:

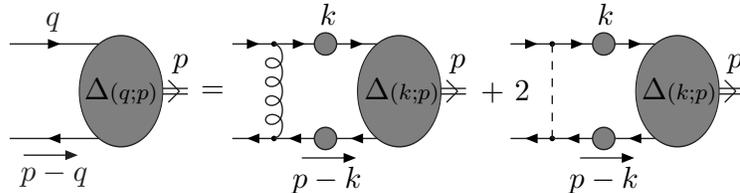
$$\left[p^2 - \frac{m_d^2}{x} - \frac{m_d^2}{(1-x)} \right] \omega(x) = -\frac{g^2}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \omega(y). \quad (\text{C.5})$$

El vértice propio queda determinado en función de $\omega(x)$ como sigue:

$$\Omega_n^{\alpha,\gamma}(x; p) = -i \frac{g^2}{2p_- \pi^2} \int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \omega_n(y) \gamma_-^{\alpha\gamma} \quad (\text{C.6})$$

C.3. Vértice propio $\Delta(q, p)$

Consideramos al vértice propio $\Delta(p, q)$, que satisface la siguiente ecuación homogénea de Bethe-Salpeter:



La forma explícita de la ecuación es la siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta^{\alpha, \gamma}(q; p) &= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} (ig \gamma_-^{\alpha\epsilon}) [S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} \Delta^{\mu, \nu}(k; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}] (ig \gamma_-^{\lambda\gamma}) \frac{\mathbf{P}}{(q-k)_-^2} \\ &+ 2i \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} (g \sigma_3^{\alpha\epsilon}) \frac{[S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} \Delta^{\mu, \nu}(k; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}]}{[(q-k)^2 - M^2 + i\epsilon]} (g \sigma_3^{\lambda\gamma}). \end{aligned} \quad (C.7)$$

Podemos notar que esta ecuación es similar a la ecuación que satisface $\Lambda(q; p)$ siendo la única diferencia el signo del término que contiene al propagador del campo escalar. De similar manera que $\Lambda(q; p)$ la expresión $\Delta(q, p)$ corresponde al vértice propio quark-antiquark-mesón en el estado $|S\rangle$.

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso del vértice propio $\Lambda(q; p)$ podemos encontrar la siguiente ecuación de autovalores que determina las masas de los mesones $|S\rangle$:

$$\begin{aligned} \left[p^2 - \frac{m_d^2}{x} - \frac{m_d^2}{(1-x)} \right] \tilde{\phi}(x) &= -\frac{g^2}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \tilde{\phi}(y) \\ &- A \frac{\Sigma_0^2}{x^{1-\beta}} \int_0^1 dy \frac{\tilde{\phi}(y)}{(1-y)^{1-\beta}} - A \frac{\Sigma_0^2}{(1-x)^{1-\beta}} \int_0^1 dy \frac{\tilde{\phi}(y)}{y^{1-\beta}} \\ &+ A \frac{\Sigma_0^2}{[(1-x)x]^{1-\beta}} \int_0^1 dy \tilde{\phi}(y) + A \Sigma_0^2 \int_0^1 dy \frac{\tilde{\phi}(y)}{[(1-y)y]^{1-\beta}}. \end{aligned} \quad (C.8)$$

Notamos que ésta es una ecuación similar a (5.19) salvo por el cambio de signo en el término perturbativo (i.e. $A \rightarrow -A$), sin embargo a diferencia de ésta la ecuación (C.8) no admite una solución no-perturbativas al estilo de (6.15). Solucionamos esta ecuación en forma perturbativa, obteniendo un espectro masivo para estos estados que es mostrado en el Capítulo 6.

Una vez determinado $\tilde{\phi}(x)$ tenemos que el vértice propio es:

$$\begin{aligned} \Delta_n^{\alpha, \gamma}(x; p) &= -i \frac{g^2}{2p_- \pi^2} \left[\int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \tilde{\phi}_n(y) + A \int_0^1 dy \frac{\tilde{\phi}_n(y)}{(1-y)y} \right] \gamma_-^{\alpha\gamma} \\ &+ iA \frac{p_-}{\pi} \left[\int_0^1 dy \tilde{\phi}(y) \right] \gamma_+^{\alpha\gamma} - iA \frac{g}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \left[\int_0^1 dy \frac{\tilde{\phi}(y)}{y} \right] (\gamma_+ \gamma_-)^{\alpha\gamma} \\ &+ iA \frac{g}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \left[\int_0^1 dy \frac{\tilde{\phi}(y)}{(1-y)} \right] (\gamma_- \gamma_+)^{\alpha\gamma}. \end{aligned} \quad (C.9)$$

Apéndice D

Notas del Capítulo 7

En este apéndice se desarrollará en extenso la solución a la ecuación inhomogénea que satisface la componente de la amplitud de scattering $\Lambda_1(q, q'; p)$ y cuyos resultados fueron utilizados en el Capítulo 7, para determinar tanto al vértice propio $\Lambda(q; p)$ como a la amplitud de scattering $\Lambda(q, q'; p)$.

D.1. Solución Ecuación Inhomogénea para $\Lambda_1(q, q'; p)$

Comenzaremos con la ecuación inhomogénea de Bethe-Salpeter que satisface la amplitud de scattering $\Lambda(q, q'; p)$:

$$\begin{aligned}
 \Lambda^{\alpha\beta, \gamma\delta}(q, q'; p) = & - i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')_-^2} \gamma_-^{\alpha\gamma} \gamma_-^{\beta\delta} \\
 & - i \frac{g^2}{4N_c} \frac{(\gamma_+ \gamma_-)^{\alpha\gamma} (\gamma_+ \gamma_-)^{\beta\delta} + (\gamma_- \gamma_+)^{\alpha\gamma} (\gamma_- \gamma_+)^{\beta\delta} - 2\gamma_+^{\alpha\gamma} \gamma_-^{\beta\delta} - 2\gamma_-^{\alpha\gamma} \gamma_+^{\beta\delta}}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} \\
 & + i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (ig \gamma_-^{\alpha\epsilon}) [S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} \Lambda^{\mu\beta, \nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}] (ig \gamma_-^{\lambda\gamma}) \frac{\mathbf{P}}{(q - k)_-^2} \quad (D.1) \\
 & - 2i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (g \sigma_3^{\alpha\epsilon}) \frac{[S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} \Lambda^{\mu\beta, \nu\delta}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}]}{[(q - k)^2 - M^2 + i\epsilon]} (g \sigma_3^{\lambda\gamma}) .
 \end{aligned}$$

Donde ya hemos utilizado las relaciones (E.17) y (E.20) para separar las matrices γ . Siguiendo el procedimiento del Capítulo 7 expandimos la amplitud $\Lambda(q, q'; p)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Lambda^{\alpha\beta,\gamma\delta}(q, q'; p) &= \Lambda_1^{\alpha\gamma}(q, q'; p) \gamma_-^{\beta\delta} + \Lambda_2^{\alpha\gamma}(q, q'; p) \gamma_+^{\beta\delta} \\ &+ \Lambda_3^{\alpha\gamma}(q, q'; p) (\gamma_+ \gamma_-)^{\beta\delta} + \Lambda_4^{\alpha\gamma}(q, q'; p) (\gamma_- \gamma_+)^{\beta\delta}, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

luego al reemplazar (D.2) en (D.1) obtenemos estructuras espinoriales similares en (D.1) tanto para los términos que dependen de $\Lambda(q, q'; p)$ como para los otros dos términos haciendo más fácil trabajar con la ecuación. De esta manera la ecuación (D.1) aunque menos compacta resulta de utilidad en el momento de ser resuelta por medio de utilizar la solución de la ecuación homogénea.

En principio para obtener la matriz de scattering $\Lambda(q, q'; p)$ debemos determinar todas las componentes de ella definidas en (D.2), sin embargo notaremos que basta con conocer $\Lambda_1^{\alpha\gamma}$ para fijar las restantes componentes.

La ecuación inhomogénea que satisface $\Lambda_1^{\alpha\gamma}$ es:

$$\Lambda_1^{\alpha\gamma}(q, q'; p) = - i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')_-^2} \gamma_-^{\alpha\gamma} + i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\gamma_+^{\alpha\gamma}}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{aligned} &+ \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (ig \gamma_-^{\alpha\epsilon}) [S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} \Lambda_1^{\mu\nu}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}] (ig \gamma_-^{\lambda\gamma}) \frac{\mathbf{P}}{(q - k)_-^2} \\ &- 2i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (g \sigma_3^{\alpha\epsilon}) \frac{[S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} \Lambda_1^{\mu\nu}(k, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}]}{[(q - k)^2 - M^2 + i\epsilon]} (g \sigma_3^{\lambda\gamma}). \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Siguiendo el procedimiento estándar definimos:

$$\bar{\Lambda}_1^{\epsilon\lambda}(q, q'; p) = [S_{(k-p)}^{\epsilon\mu} \Lambda_1^{\mu\nu}(q, q'; p) S_{(k)}^{\nu\lambda}] \quad (\text{D.5})$$

Luego podemos escribir la componente de la amplitud de scattering $\Lambda_1(q, q'; p)$ en función de la nueva variable $\bar{\Lambda}_1(q, q'; p)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Lambda_1(q, q'; p) &= - i \frac{g^2 \gamma_-}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')_-^2} + i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\gamma_+}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} \\ &+ \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (ig \gamma_-) \bar{\Lambda}_1(k, q'; p) (ig \gamma_-) \frac{\mathbf{P}}{(q - k)_-^2} \\ &- 2i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(g \sigma_3) \bar{\Lambda}_1(k, q'; p) (g \sigma_3)}{[(q - k)^2 - M^2 + i\epsilon]}. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Multiplicamos la ecuación (D.6) por la izquierda por $S(q - p)$ y por la derecha por $S(q)$ de modo de obtener la siguiente ecuación inhomogénea que satisface la matriz $\bar{\Lambda}_1(q, q'; p)$:

D.1. SOLUCIÓN ECUACIÓN INHOMOGÉNEA PARA $\Lambda_1(Q, Q'; P)$

$$\begin{aligned}
\bar{\Lambda}_1(q, q'; p) = & - i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')^2_-} S(q - p) \gamma_- S(q) + i \frac{g^2}{2N_c} \frac{S(q - p) \gamma_+ S(q)}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} \\
& + S(q - p) (ig \gamma_-) \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left[\frac{\mathbf{P}}{(q - k)^2_-} \bar{\Lambda}_1(k, q'; p) \right] (ig \gamma_-) S(q) \quad (D.7) \\
& - 2i S(q - p) (g \sigma_3) \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{\bar{\Lambda}_1(k, q'; p)}{[(q - k)^2 - M^2 + i\epsilon]} (g \sigma_3) S(q) .
\end{aligned}$$

Para resolver esta ecuación descomponemos a la matriz $\bar{\Lambda}_1(q, q'; p)$ de la siguiente manera:

$$\bar{\Lambda}_1(q, q'; p) = \bar{\Lambda}_1^+ \gamma_+ + \bar{\Lambda}_1^- \gamma_- + \bar{\Lambda}_1^{+-} \gamma_+ \gamma_- + \bar{\Lambda}_1^{-+} \gamma_- \gamma_+ . \quad (D.8)$$

Luego la ecuación (D.7) escrita en componentes (D.8) corresponde al siguiente conjunto de ecuaciones integrales acopladas:

$$\begin{aligned}
\bar{\Lambda}_1^+(q, q'; p) = & -i \frac{g^2}{N_c} \frac{(p - q)_- q_-}{D[p - q] D[q]} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')^2_-} + \quad (D.9) \\
& -i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\Sigma_0^2}{D[p - q] D[q]} \frac{1}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} - \frac{4ig^2(p - q)_- q_-}{D[p - q] D[q]} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left[\frac{\mathbf{P}}{(k - q)^2_-} \bar{\Lambda}_1^+(k, q'; p) \right] \\
& + \frac{2ig^2}{D[p - q] D[q]} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left[\frac{2(p - q)_- q_- \bar{\Lambda}_1^- + 2q_- \Sigma_0 \bar{\Lambda}_1^{+-} - 2\Sigma_0(p - q)_- \bar{\Lambda}_1^{-+} - \Sigma_0^2 \bar{\Lambda}_1^+}{[(k - q)^2 - M^2 + i\epsilon]} \right] .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Lambda}_1^-(q, q'; p) = & +i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\Sigma_0^2}{D[p - q] D[q]} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')^2_-} + \quad (D.10) \\
& -i \frac{g^2}{N_c} \frac{1}{D[p - q] D[q]} \frac{[p - q] [-q]}{[(q - q')^2 - M^2 + i\epsilon]} + \frac{2ig^2 \Sigma_0^2}{D[p - q] D[q]} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left[\frac{\mathbf{P}}{(k - q)^2_-} \bar{\Lambda}_1^-(k, q'; p) \right] \\
& + \frac{2ig^2}{D[p - q] D[q]} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left[\frac{2[p - q][q] \bar{\Lambda}_1^+ + 2[q] \Sigma_0 \bar{\Lambda}_1^{-+} - 2\Sigma_0[p - q] \bar{\Lambda}_1^{+-} - \Sigma_0^2 \bar{\Lambda}_1^-}{[(k - q)^2 - M^2 + i\epsilon]} \right] .
\end{aligned}$$

$$\bar{\Lambda}_1^{+-}(q, q'; p) = -i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\Sigma_0 (p - q)_-}{D[p - q] D[q]} \frac{\mathbf{P}}{(q - q')^2_-} + \quad (D.11)$$

$$\begin{aligned}
 & -i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\Sigma_0}{D[p-q]D[q]} \frac{[-q]}{[(q-q')^2 - M^2 + i\epsilon]} - \frac{2ig^2 \Sigma_0 (p-q)_-}{D[p-q]D[q]} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{\mathbf{P}}{(k-q)_-^2} \bar{\Lambda}_1^+(k, q'; p) \right] \\
 & + \frac{2ig^2}{D[p-q]D[q]} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{-2(p-q)_- [q] \bar{\Lambda}_1^{-+} - [q] \Sigma_0 \bar{\Lambda}_1^+ + \Sigma_0 (p-q)_- \bar{\Lambda}_1^- + \Sigma_0^2 \bar{\Lambda}_1^{+-}}{[(k-q)^2 - M^2 + i\epsilon]} \right].
 \end{aligned}$$

$$\bar{\Lambda}_1^{-+}(q, q'; p) = +i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\Sigma_0 q_-}{D[p-q]D[q]} \frac{\mathbf{P}}{(q-q')_-^2} + \quad (\text{D.12})$$

$$\begin{aligned}
 & +i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\Sigma_0}{D[p-q]D[q]} \frac{[p-q]}{[(q-q')^2 - M^2 + i\epsilon]} + \frac{2ig^2 \Sigma_0 q_-}{D[p-q]D[q]} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{\mathbf{P}}{(k-q)_-^2} \bar{\Lambda}_1^+(k, q'; p) \right] \\
 & + \frac{2ig^2}{D[p-q]D[q]} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left[\frac{-2[p-q] q_- \bar{\Lambda}_1^{+-} - q_- \Sigma_0 \bar{\Lambda}_1^- + \Sigma_0 [p-q] \bar{\Lambda}_1^+ + \Sigma_0^2 \bar{\Lambda}_1^{-+}}{[(k-q)^2 - M^2 + i\epsilon]} \right].
 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son las versiones inhomogéneas de las ecuaciones que satisfacen las componentes de $\bar{\Lambda}(q; p)$ estudiadas en el Capítulo 5.

Debido a que en la amplitud de scattering $\Lambda_1(q, q'; p)$ la dependencia en las componentes $\bar{\Lambda}_1^-(q, q'; p)$, $\bar{\Lambda}_1^{+-}(q, q'; p)$ y $\bar{\Lambda}_1^{-+}(q, q'; p)$ es ya de orden $1/M^2$ es que consideraremos soluciones sólo a orden cero en la expansión $1/M^2$ para estas componentes. Respecto a la componente $\bar{\Lambda}_1^+(q, q'; p)$ consideraremos soluciones hasta primer orden en la expansión $1/M^2$.

Luego siguiendo un procedimiento similar al utilizado en el Capítulo 5 para determinar $\bar{\Lambda}^+$ obtenemos la siguiente ecuación que determina a $\bar{\Lambda}_1^+(q, q'; p)$

$$\begin{aligned}
 \bar{\Lambda}_1^+(q, q'; p) &= 2ig^2 \frac{(p-q)_- q_-}{D[p-q]D[q]} \left[-\frac{1}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(k-q)_-^2} + \right. \quad (\text{D.13}) \\
 & - \frac{\Sigma_0^2}{4N_c} \frac{1}{(p-q)_- q_-} \frac{1}{[(q-q')^2 - M^2 + i\epsilon]} - 2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\mathbf{P}}{(k-q)_-^2} \bar{\Lambda}_1^+(k, q'; p) + \\
 & - \Sigma_0^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(p-k)_- k_-} \frac{\bar{\Lambda}_1^+(k, q'; p)}{[(k-q)^2 - M^2 + i\epsilon]} - \frac{\Sigma_0^2}{(p-q)_- q_-} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\bar{\Lambda}_1^+(k, q'; p)}{[(k-q)^2 - M^2 + i\epsilon]} \\
 & \left. + \frac{\Sigma_0^2}{(p-q)_-} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k_-} \frac{\bar{\Lambda}_1^+(k, q'; p)}{[(k-q)^2 - M^2 + i\epsilon]} + \frac{\Sigma_0^2}{q_-} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(p-k)_-} \frac{\bar{\Lambda}_1^+(k, q'; p)}{[(k-q)^2 - M^2 + i\epsilon]} \right].
 \end{aligned}$$

D.1. SOLUCIÓN ECUACIÓN INHOMOGÉNEA PARA $\Lambda_1(Q, Q'; P)$

Definimos:

$$\Phi_1^+ = \int dq_+ \bar{\Lambda}_1^+(q, q'; p). \quad (\text{D.14})$$

Luego en la región donde se cumple que $(q - q')^2 \ll M^2$ y $(k - q)^2 \ll M^2$ podemos integrar respecto de q_+ a ambos lados de la ecuación (D.13) obteniendo la siguiente ecuación que satisface Φ_1^+ :

$$\begin{aligned} p^2 \Phi_1^+(x, x'; p) &= + \frac{m_d^2}{(1-x)x} \Phi_1^+(x, x'; p) - \frac{g^2 \pi}{p_- N_c} \frac{\mathbf{P}}{(x-x')^2} \\ &+ A \frac{g^2 \pi}{p_- N_c} \frac{1}{[(1-x)x]^{1-\beta}} - \frac{g^2}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \Phi_1^+(y) \\ &- A \frac{\Sigma_0^2}{x^{1-\beta}} \int_0^1 dy \frac{\Phi_1^+(y)}{(1-y)^{1-\beta}} - A \frac{\Sigma_0^2}{(1-x)^{1-\beta}} \int_0^1 dy \frac{\Phi_1^+(y)}{y^{1-\beta}} \\ &+ A \frac{\Sigma_0^2}{[(1-x)x]^{1-\beta}} \int_0^1 dy \Phi_1^+(y) + A \Sigma_0^2 \int_0^1 dy \frac{\Phi_1^+(y)}{[(1-y)y]^{1-\beta}}. \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Donde hemos introducido el coeficiente β definido en el Capítulo 5 y las siguientes variables adimensionales:

$$q_- = xp_-, \quad k_- = yp_-, \quad (\text{D.16})$$

$$q'_- = x'p_-. \quad (\text{D.17})$$

Podemos notar que la ecuación (D.15) es la versión inhomogénea de la ecuación (5.19), luego podemos resolverla en función de las soluciones de la ecuación homogénea obteniendo:

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(x, x'; p) &= - \sum_n \frac{g^2 \pi}{(p^2 - \bar{\mu}_n^2)} \frac{1}{N_c p_-} \int_0^1 dy \phi_n(x) \phi_n^*(y) \times \\ &\times \left[\frac{\mathbf{P}}{(y-x')^2} - \frac{A}{[(1-y)y]^{1-\beta}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Donde se ha utilizado la relación:

$$\sum_n \phi_n(x) \phi_n^*(y) = \delta(x-y), \quad (\text{D.19})$$

y se han definido lo que serán las masas de los estados ligados en función de los autovalores de (5.19):

$$\bar{\mu}_n^2 = \frac{g^2}{\pi} \mu_n^2. \quad (\text{D.20})$$

APÉNDICE D. NOTAS DEL CAPÍTULO 7

Las restantes componentes de $\bar{\Lambda}_1$ son trabajadas a cero orden en la expansión $1/M^2$, luego estas quedan completamente determinadas en función de la solución para $\bar{\Lambda}_1^+$. Por ejemplo la componente $\bar{\Lambda}_1^-$ satisface:

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_1^-(q, q'; p) = & - \frac{\Sigma_0^2}{2(p-q)_- q_-} \left[- \frac{ig^2}{N_c} \frac{(p-q)_- q_-}{D[p-q] D[q]} \frac{\mathbf{P}}{(k-q)_-^2} + \right. \\ & \left. - 4ig^2 \frac{(p-q)_- q_-}{D[p-q] D[q]} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\mathbf{P}}{(k-q)_-^2} \bar{\Lambda}_1^+(k, q'; p) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

Definimos la siguiente expresión que será de utilidad en el momento de determinar la amplitud de scattering $\Lambda(q, q'; p)$

$$\Phi_1^- = \int dq_+ \bar{\Lambda}_1^-(q, q'; p). \quad (\text{D.22})$$

En virtud de (D.21) tenemos que:

$$\Phi_1^-(x, x'; p) = - \frac{\Sigma_0^2}{2(1-x)x p_-^2} \Phi_1^{+(0)}(x, x'; p). \quad (\text{D.23})$$

Donde hemos definido:

$$\Phi_1^{+(0)}(x, x'; p) = - \sum_n \frac{g^2 \pi}{(p^2 - \bar{\mu}_n^2)} \frac{1}{N_c p_-} \int_0^1 dy \phi_n(x) \phi_n^*(y) \frac{\mathbf{P}}{(y-x')^2}. \quad (\text{D.24})$$

Procediendo de manera similar obtenemos para las restantes componentes de $\bar{\Lambda}_1$:

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_1^{+-}(q, q'; p) = & + \frac{\Sigma_0}{2q_-} \left[- \frac{ig^2}{N_c} \frac{(p-q)_- q_-}{D[p-q] D[q]} \frac{\mathbf{P}}{(k-q)_-^2} + \right. \\ & \left. - 4ig^2 \frac{(p-q)_- q_-}{D[p-q] D[q]} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\mathbf{P}}{(k-q)_-^2} \bar{\Lambda}_1^+(k, q'; p) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

Luego tenemos que:

$$\Phi_1^{+-}(x, x'; p) = \frac{\Sigma_0}{2x p_-} \Phi_1^{+(0)}(x, x'; p), \quad (\text{D.26})$$

donde se ha definido:

$$\Phi_1^{+-} = \int dq_+ \bar{\Lambda}_1^{+-}(q, q'; p). \quad (\text{D.27})$$

D.1. SOLUCIÓN ECUACIÓN INHOMOGÉNEA PARA $\Lambda_1(Q, Q'; P)$

La componente $\bar{\Lambda}_1^{-+}$ satisface:

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_1^{-+}(q, q'; p) = & - \frac{\Sigma_0}{2(p-q)_-} \left[- \frac{ig^2}{N_c} \frac{(p-q)_- q_-}{D[p-q] D[q]} \frac{\mathbf{P}}{(k-q)_-^2} + \right. \\ & \left. - 4ig^2 \frac{(p-q)_- q_-}{D[p-q] D[q]} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{\mathbf{P}}{(k-q)_-^2} \bar{\Lambda}_1^+(k, q'; p) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

Luego tenemos que:

$$\Phi_1^{-+}(x, x'; p) = - \frac{\Sigma_0}{2(1-x)p_-} \Phi_1^{+(0)}(x, x'; p). \quad (\text{D.29})$$

Ahora debemos reemplazar estas soluciones en la ecuación (D.6) y determinar $\Lambda_1(q, q'; p)$. Para dar una idea de cual es el procedimiento consideraremos el cálculo explícito de la componente de $\Lambda_1(q, q'; p)$ que es proporcional a γ_- . Esta componente queda determinada por la siguiente ecuación, en la región $(k-q)^2 \ll M^2$:

$$\begin{aligned} \Lambda_1^-(q, q'; p) = & - i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q-q')_-^2} - \frac{ig^2}{2\pi^2 p_-} \int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \Phi_1^+(y, x'; p) \\ & - i \frac{Ap_-}{\pi} \int_0^1 dy \Phi_1^-(y, x'; p), \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

donde hemos usado las variables adimensionales definidas en (D.16) y (D.17). Notemos que si bien las funciones $\Phi_1^+(x, x'; p)$ y $\Phi_1^-(y, x'; p)$ sólo están definidas cuando se satisface que $x \in [0, 1]$ la amplitud $\Lambda_1^-(x, x'; p)$ no está sometida a este requerimiento por lo que en (D.30) x y x' pueden no pertenecer a $[0, 1]$. Si reemplazamos las soluciones de las ecuaciones inhomogéneas en (D.30) obtenemos:

$$\Lambda_1^-(q, q'; p) = -i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q-q')_-^2} \quad (\text{D.31})$$

$$\begin{aligned} + \frac{g^4}{2\pi N_c p_-^2} \int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(y'-x')^2} \phi_n(y) \sum_n \frac{i}{(p^2 - \bar{\mu}_n^2)} \int_0^1 dy' \left[\frac{\mathbf{P}}{(y'-x')^2} - \frac{A}{[(1-y')y']^{1-\beta}} \right] \phi_n^*(y') \\ - \frac{g^4}{2\pi N_c p_-^2 p_-} \int_0^1 dy \frac{\phi_n(y)}{[(1-y)y]^{1-\beta}} \sum_n \frac{i}{(p^2 - \bar{\mu}_n^2)} \int_0^1 dy' \frac{\mathbf{P}}{(y'-x')^2} \phi_n^*(y'). \end{aligned}$$

Luego podemos escribir a $\Lambda_1^-(q, q'; p)$ de la siguiente manera:

$$\Lambda_1^-(q, q'; p) = -i \frac{g^2}{2N_c} \frac{\mathbf{P}}{(q-q')^2} + \sum_n \Lambda_n^-(x) \frac{i}{(p^2 - \bar{\mu}_n^2)} \Lambda_n^-(x') + \mathcal{O}(A^2). \quad (\text{D.32})$$

APÉNDICE D. NOTAS DEL CAPÍTULO 7

Donde hemos definido:

$$\Lambda_n^-(x) = \frac{g^2}{\sqrt{2\pi} N_c p_-} \left[\int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \phi_n(y) - A \int_0^1 dy \frac{\phi_n(y)}{[(1-y')y']^{1-\beta}} \right], \quad (\text{D.33})$$

que como veremos es una de las componentes del vértice propio.

Si repetimos este procedimiento para las restantes componentes de $\Lambda_1(q, q'; p)$ obtenemos para la componente proporcional a γ_+ :

$$\Lambda_1^+(q, q'; p) = +i \frac{g^2}{2N_c} \frac{1}{[(q-q')^2 - M^2 + i\epsilon]} + \sum_n \Lambda_n^+(x) \frac{i}{(p^2 - \bar{\mu}_n^2)} \Lambda_n^-(x'). \quad (\text{D.34})$$

Donde hemos definido:

$$\Lambda_n^+(x) = A \sqrt{\frac{2\pi}{N_c}} p_- \int_0^1 dy \phi_n(y), \quad (\text{D.35})$$

que es la componente proporcional a γ_+ del vértice propio. Para la componente proporcional a $\gamma_+ \gamma_-$ de $\Lambda_1(q, q'; p)$ obtenemos:

$$\Lambda_1^{+-}(q, q'; p) = + \sum_n \Lambda_n^{+-}(x) \frac{i}{(p^2 - \bar{\mu}_n^2)} \Lambda_n^-(x'). \quad (\text{D.36})$$

Donde se ha definido:

$$\Lambda_n^{+-}(x) = -A \frac{g}{2N_c} p_- \int_0^1 dy \frac{\phi_n(y)}{y^{1-\beta}}, \quad (\text{D.37})$$

que corresponde a la componente $\gamma_+ \gamma_-$ del vértice propio. La componente proporcional a $\gamma_- \gamma_+$ de $\Lambda_1(q, q'; p)$ queda determinada por la siguiente expresión:

$$\Lambda_1^{-+}(q, q'; p) = + \sum_n \Lambda_n^{-+}(x) \frac{i}{(p^2 - \bar{\mu}_n^2)} \Lambda_n^-(x'). \quad (\text{D.38})$$

Donde hemos definido:

$$\Lambda_n^{-+}(x) = A \frac{g}{2N_c} p_- \int_0^1 dy \frac{\phi_n(y)}{(1-y)^{1-\beta}}. \quad (\text{D.39})$$

D.1. SOLUCIÓN ECUACIÓN INHOMOGÉNEA PARA $\Lambda_1(Q, Q'; P)$

De este modo y siguiendo el procedimiento descrito en el Capítulo 7 podemos leer las distintas componentes del vértice propio que será:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_n^{\alpha, \gamma}(x; p) &= \frac{g^2}{\sqrt{2\pi N_c}} \frac{1}{p_-} \left[\int_0^1 dy \frac{\mathbf{P}}{(x-y)^2} \phi_n(y) - A \int_0^1 dy \frac{\phi_n(y)}{(1-y)y} \right] \gamma_-^{\alpha\gamma} \quad (\text{D.40}) \\
 &+ A \sqrt{\frac{2\pi}{N_c}} p_- \left[\int_0^1 dy \phi_n(y) \right] \gamma_+^{\alpha\gamma} - A \frac{g}{\sqrt{2N_c}} p_- \left[\int_0^1 dy \frac{\phi_n(y)}{y} \right] (\gamma_+ \gamma_-)^{\alpha\gamma} \\
 &+ A \frac{g}{\sqrt{2N_c}} p_- \left[\int_0^1 dy \frac{\phi(y)}{(1-y)} \right] (\gamma_- \gamma_+)^{\alpha\gamma}.
 \end{aligned}$$

Apéndice E

Notación y convenciones

E.1. Relaciones Útiles

$$[T^A, T^B] = i C_C^{AB} T^C, \quad (\text{E.1})$$

donde $A = 1, \dots, N_c^2 - 1$.

Normalización:

$$\text{tr}(T^A T^B) = \delta^{AB}, \quad (\text{E.2})$$

Las matrices de Pauli son:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.3})$$

La función hipergeométrica de Gauss:

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} \quad (\text{E.4})$$

$$F(a, b; c; z) = + \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b; a+b-c+1; 1-z) \quad (\text{E.5})$$

$$+ (1-z)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z)$$

La función $\Gamma(z)$ satisface:

$$\Gamma(Z) \sim \frac{1}{Z} - \gamma_E + \left(\frac{\pi^2}{12} + \frac{\gamma_E^2}{2}\right)Z + \mathcal{O}(Z^2). \quad (\text{E.6})$$

E.2. Notación y Convenciones en 4D

Un vector en el espacio-tiempo 4D tiene componentes (x^0, x^1, x^2, x^3) donde la métrica del espacio tiempo es $g_{\mu\nu} = \{+, -, -, -\}$.

Representación para las matrices γ de Dirac:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_3 &= \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & -i\sigma_3 \end{pmatrix}, \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

donde σ^1, σ^2 y σ^3 son las matrices de Pauli.

Las matrices γ satisfacen:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (\text{E.8})$$

E.3. Notación y Convenciones en 2D

Un vector en el espacio-tiempo 2D tiene componentes (x^0, x^1) donde la métrica del espacio-tiempo es $g_{\mu\nu} = \{+, -\}$.

Representación de la matrices γ en 2D:

$$\gamma^0 = \sigma^1, \gamma^1 = i\sigma^2, \gamma^5 = -\sigma^3. \quad (\text{E.9})$$

E.4. Coordenadas Cono de Luz

$$x^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm x^1). \quad (\text{E.10})$$

El tensor métrico:

$$g_{+-} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.11})$$

En virtud de este tensor métrico las coordenadas cono de luz satisfacen que $x^+ = x_-$ y $x^- = x_+$. El producto punto entre dos vectores en estas coordenadas es:

$$x^\mu y_\mu = x^+ y_+ + x^- y_- = x_- y_+ + x_+ y_- . \quad (\text{E.12})$$

La norma al cuadrado de un vector arbitrario \vec{V} en coordenadas cono de luz es:

E.4. COORDENADAS CONO DE LUZ

$$V^\mu V_\mu = 2V_+ V_- = 2V^+ V^- . \quad (\text{E.13})$$

Matrices γ en coordenadas cono de luz:

$$\gamma^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma^0 \pm \gamma^1) . \quad (\text{E.14})$$

Las matrices γ en coordenadas cono de luz satisfacen:

$$\{\gamma^+, \gamma^-\} = 2 \quad (\text{E.15})$$

$$(\gamma^+)^2 = (\gamma^-)^2 = 0 . \quad (\text{E.16})$$

Las siguientes relaciones que satisfacen las matrices γ nos serán de utilidad en el tratamiento de las ecuaciones de Bethe-Salpeter:

$$\gamma_-^{\alpha\delta} \gamma_-^{\beta\gamma} = \gamma_-^{\alpha\gamma} \gamma_-^{\beta\delta} , \quad (\text{E.17})$$

$$\begin{aligned} (\gamma_+ \gamma_-)^{\alpha\delta} (\gamma_+ \gamma_-)^{\beta\gamma} &= (\gamma_+ \gamma_-)^{\alpha\gamma} (\gamma_+ \gamma_-)^{\beta\delta} , \\ (\gamma_- \gamma_+)^{\alpha\delta} (\gamma_- \gamma_+)^{\beta\gamma} &= (\gamma_- \gamma_+)^{\alpha\gamma} (\gamma_- \gamma_+)^{\beta\delta} , \\ (\gamma_+ \gamma_-)^{\alpha\delta} (\gamma_- \gamma_+)^{\beta\gamma} &= 2 \gamma_+^{\alpha\gamma} \gamma_-^{\beta\delta} , \\ (\gamma_- \gamma_+)^{\alpha\delta} (\gamma_+ \gamma_-)^{\beta\gamma} &= 2 \gamma_-^{\alpha\gamma} \gamma_+^{\beta\delta} . \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

$$\sigma_3^{\alpha\delta} \sigma_3^{\beta\gamma} = \frac{1}{4} [(\gamma_+ \gamma_-)^{\alpha\delta} - (\gamma_- \gamma_+)^{\alpha\delta}] [(\gamma_+ \gamma_-)^{\beta\gamma} - (\gamma_- \gamma_+)^{\beta\gamma}] \quad (\text{E.19})$$

Usando las identidades (E.18) podemos escribir a (E.19) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma_3^{\alpha\delta} \sigma_3^{\beta\gamma} &= \frac{1}{4} [(\gamma_+ \gamma_-)^{\alpha\gamma} (\gamma_+ \gamma_-)^{\beta\delta} + (\gamma_- \gamma_+)^{\alpha\gamma} (\gamma_- \gamma_+)^{\beta\delta} \\ &\quad - 2 \gamma_+^{\alpha\gamma} \gamma_-^{\beta\delta} - 2 \gamma_-^{\alpha\gamma} \gamma_+^{\beta\delta}] . \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

APÉNDICE E. NOTACIÓN Y CONVENCIONES

Bibliografía

- [1] M. Gell-Mann, Phys. Rev. **125** (1962) 1067.
- [2] Y. Ne'eman, Nucl. Phys. **26** (1961) 222.
- [3] M. Gell-Mann and Y. Ne'eman, Eightfold Way (1964), Reading W. Benjamin.
- [4] V. E. Barnes *et al.*, Phys. Rev. Lett. **12** (1964) 204.
- [5] D. Gromes, Nucl. Phys. **B 131** (1977) 80.
- [6] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 598.
- [7] T. Muta, Fundation of Quantum Chromodynamics, World Scientific, Singapore, 1987.
- [8] E. Salpeter and H. Bethe, Phys. Rev. **84** (1951) 1232.
- [9] N. Seto, Prog. Theor. Phys. Suppl. **95**, 25 (1988).
- [10] P. Maris and P. C. Tandy, Phys. Rev. C **60**, (1999) 055214;
- [11] P. Jain and H. J. Munczek, Phys. Rev. D **48**, (1993) 5403;
- [12] H. J. Munczek and P. Jain, Phys. Rev. D **46**, (1992) 438;
- [13] A.Ñ. Mitra, Z. Phys. C **8**, (1981) 25;
- [14] P. Maris and C. D. Roberts, Phys. Rev. C **56**, (1997) 3369;
- [15] J. Fleischer and J. A. Tjon, Phys. Rev. D **21**, (1980) 87;
- [16] M. J. Zuilhof and J. A. Tjon, Phys. Rev. C **22**, (1980) 2369;
- [17] J. Fleischer and J. A. Tjon, Phys. Rev. D **15**, (1977) 2537;
- [18] R. Barbieri and E. Remiddi, Nucl. Phys. B **141**, (1978) 413;
- [19] W. E. Caswell and G. P. Lepage, Phys. Rev. A **18**, (1978) 810;
- [20] D. E. Soper, Phys. Rev. D **15**, (1977) 1141;

BIBLIOGRAFÍA

- [21] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. Suppl. **43**, (1969) 1
- [22] G. C. Wick, Phys. Rev. **96**, (1954) 1124;
- [23] S. Mandelstam, Proc. Roy. Soc. Lond. A **233**, (1955) 248;
- [24] R. E. Cutkosky, Phys. Rev. **96**, (1954) 1135;
- [25] W. Lucha, F. F. Schoberl and D. Gromes, Phys. Rept. **200**, 127 (1991).
- [26] A. V. Manohar, Large N QCD, hep-ph/9802419.
- [27] S. Coleman and E. Witten, Phys. Rev. Lett. **45**(1980) 100.
- [28] S. Coleman, $\frac{1}{N}$, in Aspect of Symmetry, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [29] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B72** (1974) 461.
- [30] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B75** (1974) 461.
- [31] C. Callan, Jr., N. Coote and D. Gross, Phys. Rev. **D13** (1976) 1649.
- [32] M. Einhorn, Phys. Rev. **D14** (1976) 3451;
M. Einhorn, S. Nussinov and E. Rabinovici, Phys. Rev. **D15** (1977) 2282;
M. Bishary, Ann. Phys. (N.Y.) **129** (1980) 435.
- [33] R. Brower, J. Ellis, M. Schmidt and J. Weis, Nucl. Phys. **B128** (1977) 131.
- [34] C. Callan, R. Dashen, D. Gross, Phys. Rev. **D16** (1977) 2526;
J. Ellis, Y. Frishman, A. Hanany and M. Karliner, Nucl. Phys. **B382** (1992) 189.
- [35] A. Bassetto, L. Griguolo and F. Vian, Nucl. Phys. **B559** (1999) 563.
- [36] D. Gepner, Nucl. Phys. **B252** (1985) 481;
G. Date, Y. Frishman and J. Sonnenschein, Nucl. Phys. **B283** (1987) 365.
- [37] A. Zhitnitsky, Phys. Lett. **B165** (1985) 405;
B. Chibisov and A. Zhitnitsky, Phys. Lett. **b362** (1995) 105;
A. Zhitnitsky, Phys. Rev. **D53** (1996) 5821.
- [38] I. Bigi, M. Shifman, N. Uraltsev and A. Vainshtein, Phys. Rev. **D59** (1999) 054011.
- [39] P. Steinhardt, Nucl. Phys. **B176** (1980) 100.
- [40] I. Affleck, Nucl. Phys. **B265** (1985) 448.

-
- [41] A. Ferrando and V. Vento, Phys. Lett. **B256** (1991) 503;
A. Ferrando and V. Vento, Phys. Lett. **B265** (1991) 153.
- [42] A. Ferrando and V. Vento, Z. Phys. **C58** (1993) 133.
- [43] D. Gross, Nucl. Phys. **D400** (1993) 161;
D. Gross and W. Taylor, Nucl. Phys. **D400** (1993) 181;
M.R. Douglas and V.A. Kazakov, Phys. Lett. **B319** (1993) 219.
- [44] E. Abdalla and M. Abdalla, Phys. Rept. 265 (1996) 253.
- [45] E. Abdalla, M. Abdalla and K. Rothe, Non-Perturbative Methods in Two Dimensional Quantum Field Theory, World Scientific, Singapore, 1991.
- [46] W. Krauth and M. Staudacher, Phys. Lett. **B388** (1996) 808.
- [47] S. Dalley and I.R. Klebanov, Rhys. Rev. **D47** (1993) 2517;
S. Dalley and I.R. Klebanov, Phys. Lett. **B298** (1993) 79.
- [48] H.-C. Pauli and S.J. Brodsky, Rhys. Rev. **D32** (1985) 1993 and 2001;
F. Antonuccio and S. Dalley, Phys. Lett. **B376** (1996) 154.
- [49] A similar particle content in $2D$ was set in the extended QCD_2 model treated under the light-cone quantization [48]. However this quantization leads to the trivial QCD vacuum and has difficulties to describe such crucial nonperturbative phenomena as infrared mass generation for transverse gluons and the spontaneous chiral symmetry breaking.
- [50] Th. Kaluza, Sitz. Preuss. Akad. Wiss **K1** (1921) 966;
O. Klein, Z. Phys. **37** (1926) 895.
- [51] S. Coleman, Comm. Math. Phys. **31** (1973) 461.
- [52] S. Coleman, $\frac{1}{N}$, in Aspect of Symmetry, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [53] M. Burkardt, Phys. Rev. **D56** (1997) 7105.
- [54] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover, New York, 1972.
- [55] Y. Mo and R. Perry, J. Comp. Phys. **108** (1993) 159;
O. Abe, Phys. Rev. **D60** (1999) 105040.
- [56] K. Harada, T. Sugihara, M. Taniguchi and M. Yahiro, Phys. Rev. **D49** (1994) 4226.
- [57] E. Witten, Nucl. Phys. **B145** (1978) 110.

BIBLIOGRAFÍA

- [58] M. Faber and A. Ivanov, Eur. Phys. J. **C24** (2002) 653.
- [59] J. Gasser and H. Leutwyler, Annals Phys. 142 (1984) 142;