Métodos Variacionales en el Límite de N Grande

Ricardo Andrés Avila Vivero

29 de agosto de 2008

DEDICATORIA

A Dios quien se ha convertido en pieza sustancial de mi existencia, gracias por haberme mostrado Tu rostro.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer al Dr. Jorge Alfaro por su conducción durante esta práctica, así como también por su tiempo y paciencia.

Quisiera agradecer también a todos los miembros de la Facultad de Física de la Universidad Católica, por el trabajo que realizan en el desarrollo de la ciencia y por la formación académica que he recibido.

Quiero agradecer a la Universidad por haber confiado en mí y brindarme todo tipo de herramientas y facilidades con las que fui capaz de desarrollar y finalizar en buen término mis estudios.

Finalmente, agradezco a mi familia porque sin ellos nada de esto hubiese sido posible.

Índice

Resumen

Se crea un método variacional como un método alternativo a los previamente usados que permite reobtener las ecuaciones de dos modelos matemáticos llamados MSV1 para modelo sencillo vectorial uno y MV2 para modelo vectorial dos, que constituyen simplificaciones de cierto tipo más general de modelos físicos encontrados en el contexto de la física nuclear (QCD)[1], de partículas (QFT)[2] y gravitación (QG2d)[3], específicamente en lo que se conoce como límite de N grande. Estas ecuaciones determinan las propiedades de los sistemas. Para esto se inventa un producto punto en el espacio de estados abstracto de Dirac, lo que significa que se encuentra una base $|\vec{x},\vec{\psi}>=|\vec{x}>\otimes|\vec{\psi}>$ donde, $\vec{x}$ es un vector real y $\vec{\psi}$ un vector de Grassmann complejo, su correspondiente relación de completitud y las proyecciones $<\vec{x},\vec{\psi}\,|\,G>$ que deben satisfacer los ket $|\,G>$ de este espacio, de tal manera que $<G|G>\geq 0$. Este producto punto permite la construcción de un "bracketçorrespondiente al funcional que se quiere extremizar. Siendo el funcional $\widetilde{S}=<G|Q|G>$ donde, Q denota el operador carga BRST, se extremiza de tal manera que $\delta\widetilde{S}=0$ contenga las ecuaciones buscadas.[4]

Se determina la relación de completitud que define la base sobre la cual es posible construir el producto punto, ésta corresponde a:

$$\int(\prod_{l=1}^{N}dx_l d\bar{\psi}_l d\psi_l)e^{-\sum_i(\bar{\psi}_i\psi_i)}|\,\vec{x},\vec{\psi}><\vec{x},\vec{\psi}|=1$$

Se determina que para obtener las ecuaciones buscadas y por ende para que el método variacional funcione, las proyecciones del ket $|G>$ cuando éste representa un estado físico son

para MSV1:

$$<\vec{x},\vec{\psi}\,|\,G> \;=\; G(r,\chi)=G_0(r)+G_1\chi$$

donde $r=|\vec{x}|,\ \chi=\vec{x}\cdot\vec{\bar{\psi}}$ y donde G_0 es una función arbitraria de r mientras que G_1 debe ser una constante,

para MV2:

$$\begin{aligned}<\vec{x},\vec{y},\vec{\psi},\vec{\eta}|G> &= G(r_1,r_2,r_3,\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4)\\ &= G_0(r_1,r_2,r_3)+G_1\chi_1+G_2\chi_2+G_3\chi_3+G_4\chi_4\\ &\quad +G_5\chi_1\chi_2+G_6\chi_1\chi_4+G_7\chi_2\chi_3+G_8\chi_3\chi_4\end{aligned}$$

[1]QCD=cromodinámica cuántica.
[2]QFT=teoría cuántica de campos.
[3]QG2d=gravedad cuántica en 2-dimensiones.
[4]La sigla BRST denota las iniciales de quienes fueron los primeros en introducir este tipo de transformaciones, Becchi, Rouet y Stora [9] .

donde $r_1 = |\vec{x}|$, $\chi_1 = \vec{x} \cdot \vec{\vec{\psi}}$, $\chi_2 = \vec{x} \cdot \vec{\vec{\eta}}$, $\chi_3 = \vec{y} \cdot \vec{\vec{\psi}}$, $\chi_4 = \vec{y} \cdot \vec{\vec{\eta}}$ y donde G_0 es una función arbitraria de r_1, r_2, r_3 mientras que los $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8$ deben ser constantes en analogía con MSV1.

1. Introducción

El límite de N grande se refiere a un formalismo que aplicado a ciertos modelos de la física, permite mejorar la comprensión de éstos, facilitando cálculos que posibilitan probar el grado predictivo de las teorías a un nivel más profundo. Este es el caso de la cromodinámica cuántica, la cual es una teoría de Yang-Mills en cuatro dimensiones, pero que debido a su complejidad ha sido muy difícil explorar para lo que se refiere a ofrecer una explicación del confinamiento de quarks. Es por esto que se ha simplificado el problema estudiando modelos de Yang-Mills en dos dimensiones que ofrecen características positivas en esta materia pero que aún así son altamente complicadas al momento de calcular correcciones en forma perturbativa. Es justamente en esto que el límite de N grande facilita el trabajo pues por medio de una redefinición del lagrangiano involucrado (básicamente una redefinición de la(s) constante(s) de acoplamiento y variables presente(s) en éste) se han podido obtener (resolver)(calcular) en forma explícita expansiones perturbativas en potencias de $(1/N)$. De esta misma forma el límite de N grande ha sido aplicado a la Teoría cuántica de campos y a modelos matriciales que pretenden ofrecer una descripción de gravitación cuántica en dos dimensiones.
Lo interesante de estas expansiones en potencias de $(1/N)$, tanto para la cromodinámica cuántica como para la gravedad cuántica en dos dimensiones, ambas que utilizan un álgebra no abeliana[5] (matrices en ambos casos), es que <u>todos</u> los diagramas de Feynmann conocidos como planares[6] son de orden $(1/N)$ mientras que los otros términos (los no planares) son de orden $(1/N^2)$ o menor [7]. De esta forma en ambas teorías el término dominante para N grande involucra en sí una suma de infinitos diagramas planares, cuestión que permanece como un problema abierto hasta el presente. Estas razones son más que suficientes para que el límite de N grande sea ampliamente estudiado.

En este trabajo estudiamos un método variacional para el límite de N grande aplicado a dos modelos matemáticos que constituyen simplificaciones de los modelos presentes en las teorías anteriormente referidas pero que retienen las características esenciales comunes a todos ellos. Esperamos que el método variacional permita reobtener las ecuaciones 'master field' que denotaremos de aquí en adelante como *MFE*, las cuales determinan gran parte de las propiedades de los sistemas (para ser más específicos, permiten el cálculo de cualquier correlación de una cantidad física).

El método variacional consiste en extremizar un funcional $\widetilde{S}$ tal que $\delta\widetilde{S} = 0$ implique *MFE*. Para esto se inventa un producto punto en el espacio de estados abstracto de Dirac, lo que significa que se encuentra una base $|\vec{x},\vec{\eta}> = |\vec{x}> \otimes |\vec{\eta}>$ donde, $\vec{x}$ es un vector real y $\vec{\eta}$ un vector de Grassmann, que posibilite la cons-

[5] Abeliana se refiere a que conmuta y por lo tanto un álgebra no abeliana corresponde a un álgebra no conmutativa.

[6] Planares significa que el diagrama, i.e. todas sus líneas están contenidas en un mismo plano.

trucción del funcional por medio de un bracket.
Se propone $< G|Q|G >$ para el funcional a extremizar, donde Q corresponde al operador carga BRST y $|G>$ es un ket del espacio. Investigando las variaciones de $\widetilde{S}$ se determina si el método variacional funciona e información adicional sobre las proyecciones $< \vec{x}, \vec{\eta} \,|\, G >$ para que así sea.
En el proceso de la búsqueda de un producto punto, se construyen dos propiamente tal, uno que parece incluir al otro optándose por trabajar con el más simple.

Los contenidos del presente informe se han estructurado en seis capitulos. En el capítulo 2 se repasan las propiedades básicas del álgebra de Grassmann que son ampliamente utilizadas en los cálculos. El capítulo 3 parte con una breve referencia a las integrales funcionales, fundamentales a la descripción de los modelos para luego presentar un caso particular de las transformaciones BRST y el relacionado operador carga BRST Q. Luego se presenta la metodología general, aplicado eso si a un caso particular, el de un campo escalar, para hacer una extensión BRST de un modelo resaltando la invarianza resultante de la nueva acción frente a las transformaciones BRST.
El capítulo 4 presenta los dos modelos matemáticos estudiados y dos métodos previos para obtener *MFE* en el límite de N grande, el último de estos basado en las transformaciones BRST, para llegar a las ecuaciones buscadas. En el capítulo 5 se construyen dos tipos de productos puntos, se desarrolla el método variacional y se aplica a los dos modelos matemáticos, reobteniéndose las ecuaciones buscadas. En el capítulo 6 se presentan las conclusiones del trabajo.

2. Álgebra de Grassmann

El álgebra de Grassmann ha sido utilizada para describir sistemas fermiónicos en los cuales a partir del principio de exclusión de Pauli y la introducción de la segunda cuantización de Dirac, aparecen en forma natural operadores con propiedades anticonmutantes. Recordando que la cuantización de un sistema consiste en promover las variables clásicas que lo describen a observables (i.e. operadores), es lógico buscar variables asociadas a éstos nuevos operadores anticonmutativos. El álgebra de Grassmann responde a ésta necesidad de nuevas variables y por consiguiente se basa en la anticonmutación de sus elementos. A los elementos pertenecientes al álgebra de Grassmann se les denomina 'variables de Grassmann'.

2.1. Definición y Propiedades

2.1.1. Anticonmutación

Sea $\{\eta_a\}$, $a = 1, ...N$, un set de variables de Grassmann, entonces éstas variables cumplen por definición con la siguiente relación de anticonmutación

$$\eta_a \eta_b + \eta_b \eta_a = 0 \tag{1}$$

lo que trae como consecuencia inmediata el que ${\eta_a}^2 = 0$. Además es importante señalar que un número par de variables de Grassmann multiplicadas entre sí se comportan como un número conmutativo cualquiera (igual que un número real o complejo) con la particularidad de que al elevarlo a una potencia se anula. A su vez un número impar de variables de Grassmann multiplicadas se comportan como una nueva variable de Grassmann anticonmutante.
Para el caso particular de un espacio N dimensional se tiene

$$\eta_{a1} \eta_{a2} \cdots \eta_{aN} = \varepsilon^{a1a2 \cdots aN} \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_N \tag{2}$$

donde $\varepsilon^{a1a2 \cdots aN}$ corresponde al tensor de Levi-Civita generalizado a dimensión N.

2.1.2. Variables de Grassmann complejas

Una variable de Grassmann η se dice real frente a la acción de tomar el complejo conjugado, si

$$\bar{\eta} = \eta \tag{3}$$

de esta manera se pueden definir variables de Grassmann complejas ψ, usando variables de Grassmann reales η

$$\begin{aligned} \psi &= \eta_1 + i\eta_2 \\ \bar{\psi} &= \eta_1 - i\eta_2 \end{aligned} \tag{4}$$

La regla para conjugar productos de variables de Grassmann complejas es

$$\overline{(\psi_1 \psi_2)} = \bar{\psi}_2 \bar{\psi}_1 \tag{5}$$

hecho que implica que la cantidad $\bar{\psi}\psi$ sea real.

2.1.3. Funciones de Grassmann

En vista de (1), una función de la variable de Grassmann η, posee la siguiente expresión general

$$f(\eta) = f_0 \ + \ f_1\eta \tag{6}$$

de la misma forma

$$f(\vec{x}, \eta) = f_0(\vec{x}) \ + \ f_1(\vec{x})\eta \qquad\qquad \vec{x} \in \Re^n \tag{7}$$

por último para vectores de Grassmann $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_N)$ La expresión análoga correspondiente es

$$f(\vec{x}, \vec{\eta}) = f_0(\vec{x}) \ + \ f_i(\vec{x})\eta_i \ + \ f_{ij}(\vec{x})\eta_i\eta_j \ + \cdots + f_{1\ldots N}(\vec{x})\eta_1\eta_2\cdots\eta_N \tag{8}$$

donde los f son completamente antisimétricos bajo permutación de índices y se ha utilizado la convención de Einstein para la suma de índices repetidos.
Esta última expresión cuenta con 2^N términos de los cuales 2^{N-1} corresponden a números pares de variables de Grassmann multiplicadas y 2^{N-1} a números impares, dando pie así a que a éstas funciones se les llame *Funciones Supersimétricas* debido a la igualdad en la cantidad de términos conmutativos o bosónicos y anticonmutativos o fermiónicos.

2.1.4. Derivación e Integración

En el álgebra de Grassmann como hemos visto sólo aparecen expresiones lineales de las variables de Grassmann. En consecuencia la derivación queda definida, por la izquierda y por la derecha como

$$\frac{\partial\eta_a}{\partial\eta_b} = \delta_{ab} = -\eta_a\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\eta_b} \tag{9}$$

y nos encontramos con una regla anti-Leibnitz para la diferenciación de un producto.

$$\frac{\partial(\eta_b\eta_c)}{\partial\eta_a} = \delta_{ab}\eta_c - \delta_{ac}\eta_b \tag{10}$$

esta anti-regla se debe a que el signo del producto a diferenciar, depende del orden de las variables.

La generalización de (10) esta dada por

$$\frac{\partial}{\partial\eta_b}(\eta_a\cdots\eta_b\cdots\eta_c) = (-1)^p(\eta_a\cdots\eta_c) \tag{11}$$

donde p denota la posición de η_b en el producto, siendo $p = 0$ la posición de la primera variable de la izquierda en el producto, en este caso la posición de η_a.

También es importante referirse al diferencial de una variable de Grassmann $d\eta$, antes de referirnos a la integración de dichas variables.
El operador diferencial se define de la misma manera que para los números conmutativos, especificamente

$$d = d\eta_j \frac{\partial}{\partial \eta_j} \tag{12}$$

lo que trae como consecuencia inmediata

$$\begin{aligned} d(\eta_a \eta_b) &= d\eta_j \frac{\partial}{\partial \eta_j}(\eta_a \eta_b) \\ &= d\eta_j [\delta_{aj}\eta_b - \delta_{jb}\eta_a] = d\eta_a \eta_b - d\eta_b \eta_a \end{aligned} \tag{13}$$

por otra parte el diferencial de un producto se fuerza a satisfacer la propiedad de Leibnitz, es decir

$$d(\eta_a \eta_b) = d\eta_a \eta_b + \eta_a d\eta_b \tag{14}$$

finalmente observamos que al restar (13) de (14) obtenemos

$$\eta_a d\eta_b + d\eta_b \eta_a = 0 \tag{15}$$

resultado que nos indica que $d\eta$ es en sí una variable de Grassmann.

De esta forma en el álgebra de Grassmann sólo existen dos tipos de integrales no triviales que listamos a continuación

$$\int d\eta \qquad\qquad \int d\eta \eta$$

para su evaluación se impone invarianza de las integrales frente a traslaciones, así, frente a $\eta' = \eta + \xi$ con $d\xi = 0$ tedremos

$$\int d\eta' = \int d\eta$$

$$\int d\eta' \eta' = \int d\eta(\eta + \xi) = \int d\eta \eta - \xi \int d\eta$$

la última línea implica que

$$\int d\eta = 0 \tag{16}$$

este resultado es consistente ya que lo que se integra ($d\eta$) es una variable de Grassmann y lo que se obtiene también (el cero es un número conmutativo y anticonmutativo a la vez), por otro lado $\int d\eta\eta$ es la integración de un número par de variables de Grassmann por lo que debiésemos esperar un número conmutativo (c-number), entonces como normalización se le asigna el valor 1, así

$$\int d\eta \eta = 1 \tag{17}$$

3. Formalismo BRST

3.1. Integrales de camino ≡ Integrales funcionales

La integral de camino corresponde a un concepto desarrollado por Richard P. Feynmann, para expresar de un modo distinto, una amplitud de probabilidad cuántica. Lo interesante del método es que en una cantidad propiamente cuántica, aparece una cantidad clásica, correspondiente a la acción del sistema en cuestión. En su forma más simple se tiene

$$< q, t \mid q', t' >= \int [Dq][Dp]\, e^{iS(q,p)} \tag{18}$$

donde S es la acción del sistema, $\mid q, t >$ una base en la representación de coordenadas en el cuadro de Heisenberg y donde las medidas de integración se definen como

$$[Dq] = \lim_{n\to\infty} \prod_{n=1}^{N} dq_n$$

$$[Dp] = \lim_{n\to\infty} \prod_{n=1}^{N} dp_n$$

Dependiendo de la forma de S, a veces, es posible llevar a cabo la integración sobre los momentum (dp_n) para quedarnos solamente con la medida $[Dq]$. Lo atractivo de la integral de camino, a veces mejor conocida como integral funcional, es que nos permite describir todas las propiedades de un sistema. Esto porque si en (18) forzamos $q = q'$ y llevamos el tiempo a una variable imaginaria[3] por medio de la transformación $\tau = it$, se puede establecer una directa relación entre la integral funcional y la función de partición mecánico estadística, que describe todas las propiedades de un sistema en equilibrio térmico. De esta forma la integral funcional adquiere un sentido probabilístico con e^{-S} cumpliendo el rol de una densidad de probabilidad, que permite calcular cualquier correlación de las cantidades físicas.

3.2. La Transformación BRST

Las transformaciones BRST constituyen un grupo dentro del cuál existen varios tipos [6]. Para los efectos de este trabajo nosotros nos avocaremos sólo al caso en que la transformación corresponda a una traslación. Para este caso la transformación BRST consiste en escribir la variación de la variable en cuestión, e.g. campo de gauge, campo escalar etc. como un producto de dos números de Grassmann. De esta forma si λ es un número de Grassmann (cte.) se tiene para el caso de un campo escalar ϕ y para el caso de un campo de gauge A_μ

$$\delta\phi(x) = c(x) = \lambda\psi(x) \tag{19}$$

$$\delta A_\mu(x) = \epsilon_\mu(x) = \lambda\psi_\mu(x) \tag{20}$$

en donde x es un punto del espacio-tiempo y $\psi(x)$, $\psi_\mu(x)$ son un campo y un cuadrivector de Grassmann respectivamente. A estos campos se les denomina fantasmas y a sus complejos conjugados anti-fantasmas.

3.2.1. Variación BRST

En base a esto se define la variación BRST $\bar{\delta}$ como aquella parte de la variación total que excluye al parámetro λ, en concordancia se tiene

$$\bar{\delta}\phi = \psi(x) \tag{21}$$

$$\bar{\delta}A_\mu(x) = \psi_\mu(x) \tag{22}$$

Un hecho importante sobre la variación BRST es su nilpotencia, lo que significa que $\bar{\delta}^2 = 0$. Esto es un postulado.
Lo que implica que

$$\bar{\delta}^2\phi = 0 = \bar{\delta}\psi \tag{23}$$

la variación BRST de los campos anti-fantasmas se define como

$$\bar{\delta}\bar{\psi}(x) \equiv ib(x) \tag{24}$$

donde b es un campo conmutativo. De la misma manera en el caso vectorial

$$\bar{\delta}_\mu\bar{\psi}(x) \equiv ib_\mu(x) \tag{25}$$

la nilpotencia de $\bar{\delta}$ implica en ambos casos

$$\bar{\delta}b = 0 \qquad \text{y} \qquad \bar{\delta}b_\mu = 0 \tag{26}$$

3.2.2. La carga BRST

En este contexto se define el operador carga BRST Q como aquel que aplicado a una función produce una variación de la función y rescata aquella parte de la variación que excluye al parámetro grassmaniano λ.
De esta manera, la ecuación que la define es

$$\delta F = \lambda Q F \tag{27}$$

así la carga BRST tiene una estricta relación con la variación BRST, hecho que produce que esta última también sea nilpotente, es decir, $Q^2 = 0$.

3.3. Invarianza de la nueva acción en la extensión BRST

Punto clave del trabajo que aquí se presenta es el hecho que se puede construir una nueva acción a partir de la original, incluyendo los fantasmas, que resulta ser invariante frente a las transformaciones BRST.
A continuación se muestra el procedimiento general para encontrar la nueva acción, aplicado al caso del campo escalar [3].

Considérese un sistema descrito por un campo escalar ϕ y la siguiente integral funcional

$$Z = \int [D\phi] e^{-S(\phi)} \tag{28}$$

la medida de integración $[D\phi]$ es invariante frente a (19), pero la acción que es un funcional de ϕ no lo es. Para hacerla invariante se introduce un nuevo campo escalar $B(x)$ tal que $\delta B = \delta\phi$ y se modifica la acción

$$S(\phi) \longrightarrow S(\phi - B)$$

naturalmente que al introducir una nueva variable, el campo B, este debe aparecer integrado en Z, así la nueva integral funcional es

$$Z = \int [D\phi][DB] e^{-S(\phi - B)}$$

Para obtener el gauge, es decir, la condición en que $B(x) = 0$, se le agrega a la acción (para ser más exacto a la densidad lagrangiana) un término $\bar{\delta}(\bar{\psi}B)$ que es en sí una variación BRST y que equivale a sumar un cero a la integral (apéndice A), justificándose así el hecho de poder incorporarlo de esta manera en el exponente.
Ahora de (21) y (24)

$$\bar{\delta}(\bar{\psi}B) = ibB + \bar{\psi}\psi$$

nuevamente la introducción de nuevas variables, los campos b, $\bar{\psi}$, ψ, implica el que deben aparecer integrados en Z. De esta manera la integral funcional adquiere el siguiente aspecto

$$Z = \int [D\phi][DB][Db][D\bar{\psi}][D\psi] e^{-(S(\phi - B) + \int dx\, (ibB + \bar{\psi}\psi))}$$

se reconoce a la parte

$$\int [Db] e^{-i \int dx bB}$$

dentro de la integral anterior, como la generalización de la delta de Dirac al caso continuo. Luego, al integrar sobre el campo b, se obtiene la delta de Dirac $\delta(B)$ que al integrar, nuevamente, sobre B da $B(x) = 0$.
De esta forma la integral funcional se reduce a

$$Z = \int [D\phi][D\bar{\psi}][D\psi] e^{-(S(\phi) + \int dx\, \bar{\psi}\psi)} \tag{29}$$

la nueva acción es

$$\bar{S}(\phi, \psi, \bar{\psi}) = S(\phi) + \int dx\, \bar{\psi}\psi \tag{30}$$

y su variación

$$\delta\bar{S} = \int dx \frac{\delta S}{\delta\phi} \delta\phi + \int dx\, (\delta\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}\delta\psi)$$

la que en consideración de (19) y (23) se escribe como

$$\begin{aligned}\delta\bar{S} &= \int dx\,[\frac{\delta S}{\delta\phi}\lambda\psi + \delta\bar{\psi}\psi] \\ &= \int dx\,[\frac{\delta S}{\delta\phi}\lambda + \delta\bar{\psi}]\psi \qquad (31)\end{aligned}$$

entonces la forma que adopta la trasformación BRST para el anti-fantasma en orden de hacer invariante la nueva acción $\bar{S}$ en virtud de (31) es

$$\bar{\delta}\bar{\psi} = -\frac{\delta S}{\delta\phi} \qquad (32)$$

luego, bajo las transformaciones

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \lambda\psi \\ \delta\psi &= 0 \\ \delta\bar{\psi} &= -\frac{\delta S}{\delta\phi}\lambda \qquad (33)\end{aligned}$$

la acción $S(\phi,\psi,\bar{\psi}) = S(\phi) + \int dx\,\bar{\psi}\psi$ es invariante.[7] La forma de proceder para otro tipo de variables como campos de gauge, etc, es completamente análogo obteniéndose un resultado similar. En general consiste en que por cada variable contenida en el modelo original, se debe agregar a la acción un par de variables fantasma - antifantasma; esto no es sino hacer una extensión del modelo original a uno más grande (posee mayor número de variables) que es invariante frente a las transformaciones BRST y se habla entonces de haber efectuado una extensión BRST del modelo. En el caso visto en detalle, sólo hay una variable, el campo escalar en la acción original, en consecuencia en la acción extendida aparece un sólo par de variables fantasmas asociadas.
Esta invarianza de la medida de integración asi como de la nueva acción tiene asociada a sí un conjunto de identidades de la forma

$$< \bar{\delta}[F(\phi)\bar{\psi}(y)] >= 0 \qquad (34)$$

conocidas como identidades de Ward, válidas para cualquier funcional $F(\phi)$ arbitrario (apéndice A)

Al desarrollar explícitamente (34) se tiene

$$< \bar{\delta}[F(\phi)]\bar{\psi}(y) + F(\phi)\bar{\delta}[\bar{\psi}(y)] >= 0$$

[7] Notamos que el integrar sobre los campos b y B, tiene como efecto la pérdida de la nilpotencia del operador carga BRST asociado, ésto porque la nilpotencia de Q está asociada a las transformaciones BRST originales que consideran a b y B, ésto es (21), (23), (24), (26) y $\bar{\delta}B = \bar{\delta}\phi = \psi$, la integración suprime estas variables.

$$< \int dx \frac{\delta F}{\delta\phi(x)}\psi(x)\bar{\psi}(y) - F(\phi)\frac{\delta S}{\delta\phi(y)} >= 0$$

$$\frac{\int [D\phi][D\bar{\psi}][D\psi](\int dx \frac{\delta F}{\delta\phi(x)}\psi(x)\bar{\psi}(y) - F(\phi)\frac{\delta S}{\delta\phi(y)})e^{-(S(\phi)+\int dx\bar{\psi}\psi)}}{\int [D\phi][D\bar{\psi}][D\psi]e^{-(S(\phi)+\int dx\bar{\psi}\psi)}} = 0 \tag{35}$$

reconocemos dentro de (35) el hecho de que

$$\begin{aligned} \int [D\bar{\psi}][D\psi]e^{-\int dx\bar{\psi}\psi} &= 1 \\ \int [D\bar{\psi}][D\psi]\psi(x)\bar{\psi}(y)e^{-\int dx\bar{\psi}\psi} &= \delta(x-y) \end{aligned}$$

(final apéndice B)

de esta forma integrando sobre los fantasmas podemos escribir (35) como

$$\frac{\int [D\phi](\int dx \frac{\delta F}{\delta\phi(x)}\delta(x-y) - F(\phi)\frac{\delta S}{\delta\phi(y)})e^{-S(\phi)}}{\int [D\phi]e^{-S(\phi)}} = 0$$

$$\frac{\int [D\phi](\frac{\delta F}{\delta\phi(y)} - F(\phi)\frac{\delta S}{\delta\phi(y)})e^{-S(\phi)}}{\int [D\phi]e^{-S(\phi)}} = 0$$

es decir,

$$< \frac{\delta F}{\delta\phi} - F\frac{\delta S}{\delta\phi} >= 0 \tag{36}$$

(36) es conocida como la ecuación de Schwinger-Dyson.
Esta ecuación contiene la dinámica cuántica de la teoría.

4. El Límite de N grande

Como ya fue mencionado en la introducción, el límite de N grande se estudia por medio de hacer un apropiado reescalamiento de la(s) constante(s) de acoplamiento y redefinición de las variables presentes en el lagrangiano, lo que tiene como resultado final la aparición de un factor N que multiplica todo el redefinido lagrangiano [7]. Por lo tanto nos encontramos con integrales funcionales que tienen el siguiente aspecto general

$$\int D(var)e^{-Nf} \tag{37}$$

donde Nf es la acción del modelo y f una función (o funcional) arbitrario de las variables 'var'.
Como lo que interesa es en definitiva calcular los valores de expectación y/o correlaciones de las diversas cantidades físicas, "que a su vez corresponden a invariantes del modelo", el hecho de que aparezca el factor N en la exponencial permite en principio evaluar las integrales por medio del método de la fase estacionaria. Esto se justifica porque en definitiva, el método de la fase estacionaria es una expansión asintótica [8] de la integral, procedimiento que adquiere sentido cuando se toma $N \to \infty$.

Para ilustrar este método así como el que se introducirá en la proxima sección, se utilizará un modelo sencillo vectorial que denotaremos por la sigla MSV1.

4.1. El método de la fase estacionaria y el modelo MSV1

El modelo MSV1 queda definido por la siguiente integral:

$$Z = \int d^N x \, e^{-Nf(\vec{x})} \tag{38}$$

donde $\vec{x}$ es un vector N-dimensional y f es una función tal que $f(O\vec{x}) = f(\vec{x})$, donde O denota rotaciones de los ejes cartesianos en torno al origen. La propiedad de f se entiende en el contexto que representa una cantidad física (la acción) y por lo tanto debe ser función de los invariantes del modelo. En éste caso el único invariante del modelo es: $r = |\vec{x}|$.
El método de la fase estacionaria consiste en hacer una expansión de Taylor de la función f en torno a un mínimo local de tal manera que al tender el exponente del integrando a un valor muy grande, uno puede descartar los términos de orden cuadrático y mayores asumiendo que la mayor contribución a la integral está dada por el primer término de la expansión que es simplemente f evaluada en el punto crítico.
Sin embargo como las variables de interés son los invariantes y no las coordenadas cartesianas x_i propiamente tal, es preciso, hacer un cambio de variable en la integral de manera de dejar todo expresado en términos de r.

Al hacer esto, Z queda

$$
\begin{aligned}
Z &= \Omega_N \int dr\, r^{N-1} e^{-Nf(r)} \\
Z &= \Omega_N \int \frac{dr}{r} e^{-N[f(r)-ln(r)]} \qquad (39)
\end{aligned}
$$

donde Ω_N corresponde al ángulo sólido en N dimensiones.
Esto conlleva a que la función a expandir propiamente tal sea $f(r) - ln(r)$ la cual posee puntos críticos que satisfacen

$$
f'(r) - \frac{1}{r} = 0 \qquad (40)
$$

la ecuación (40) corresponde a *MFE* y es de vital importancia, como lo demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1 *Las correlaciones de funciones de los invariantes del modelo original, son iguales a la función en cuestión evaluada en los valores críticos de los invariantes, determinados por MFE más términos decrecientes en potencias de N.*

Demostración.
Sea r_0 el valor de r determinado por (40) y sea F una función de los invariantes en MSV1, entonces $F = F(r)$

luego su valor de expectación es

$$
< F > = \frac{\displaystyle\int d^N x\, F\, e^{-Nf(\vec{x})}}{\displaystyle\int d^N x\, e^{-Nf(\vec{x})}}
$$

$$
< F > = \frac{\displaystyle\int dr/r\, F(r)\, e^{-N[f(r)-ln(r)]}}{\displaystyle\int dr/r\, e^{-N[f(r)-ln(r)]}}
$$

al aplicar el método de la fase estacionaria y expandir F en torno a r_0

$$
< F >= \frac{\int_0^\infty dr/r\, [F(r_0)+F'(r_0)(r-r_0)+\frac{1}{2}\, F^{(2)}(r_0)(r-r_0)^2+\frac{1}{3!} F^{(3)}(r_0)(r-r_0)^3+\cdots]\, e^{-Nf(r_0)}}{\int_0^\infty dr/r\, e^{-Nf(r_0)}}
$$

en la última integral se ponen los límites de integración explícitamente, puesto que ahora se hace un cambio de variable $\xi = \sqrt{N}(r - r_0)$ con el cual

$$< F >= \frac{\int_{-r_0\sqrt{N}}^{\infty} d\xi/(\xi+r_0\sqrt{N})\,[F(r_0)+F'(r_0)\,\frac{\xi}{\sqrt{N}}+\frac{1}{2}\,F^{(2)}(r_0)\,\frac{\xi^2}{N}+\frac{1}{3!}\,F^{(3)}(r_0)\,\frac{\xi^3}{N^{3/2}}+\cdots]\,e^{-Nf(r_0)}}{\int_{-r_0\sqrt{N}}^{\infty} d\xi/(\xi+r_0\sqrt{N})\,e^{-Nf(r_0)}}$$

de esta última línea es fácil apreciar que

$$< F >= F(r_0) + O(N^{-\alpha}) \tag{41}$$

con $\alpha \geq \frac{1}{2}$

y el teorema queda probado.[8]

Para el modelo MSV1 todo resulta perfecto; No obstante el método de la fase estacionaria involucra el hacer un cambio de variable de tal manera de dejar todo expresado en término de los invariantes del modelo, cuestión que puede resultar altamente no trivial para modelos más complicados. Es por esta razón que se utiliza un método distinto y más seguro para obtener *MFE*, método que a su vez se basa profundamente en la extensión BRST del modelo original como fue visto en la sección 3.3.

4.2. Obtención de MFE mediante las Identidades de Ward

Una vez hecha la extensión BRST, el número de invariantes aumenta porque ahora existen más variables. Para el caso del MSV1 se construye la nueva acción extendida que en concordancia con la sección 3.3 resulta ser

$$\bar{S}(x_i, \bar{\psi}_i, \psi_i) = Nf(\vec{x}) + \bar{\psi}_i\psi_i \qquad i = 1, \ldots, N \tag{42}$$

donde la notación de Einstein para la suma en la repetición de índices ha sido usada con las variables de Grassmann. Como ya se sabe (42) es invariante frente a (33) que en este caso adquieren el siguiente aspecto

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \lambda\psi_i \\ \delta\psi_i &= 0 \\ \delta\bar{\psi}_i &= -\frac{\delta S}{\delta x_i}\lambda = -N\frac{\partial f}{\partial x_i}\lambda \end{aligned} \tag{43}$$

También de la sección 3.3 sabemos que esta invarianza trae asociada a sí un conjunto de identidades de Ward como en (34). El método consiste en aplicar las

[8] La prueba ha sido dada para MSV1; para otros modelos es análoga.

identidades de Ward a los invariantes no triviales del nuevo modelo extendido. Para MSV1 extendido, los invariantes son:

$$\begin{aligned} r &= |\vec{x}| \\ \beta &= \bar{\psi}_i\psi_i \\ \zeta &= x_i\psi_i \\ \chi &= x_i\bar{\psi}_i \end{aligned}$$

de los cuales los tres primeros son triviales, es decir, se anulan inmediatamente al aplicarles la identidad de Ward como podemos verificar

$$\begin{aligned} < \delta r > &= < 0 >= 0 \\ < \delta\beta > &= < \delta(\bar{\psi}_i\psi_i) > \\ &= < -N\frac{\partial f}{\partial x_i}\lambda\psi_i >= 0 \end{aligned}$$

el último paso se justifica porque la correlación de una sola variable de Grassmann es cero (final apéndice B).

$$\begin{aligned} < \delta\zeta > &= < \delta(x_i\psi_i) > \\ &= < \lambda\psi_i\psi_i >= 0 \end{aligned}$$

la última línea se justifica por la propiedad anticonmutativa (1) de las variables de Grassmann.
De esta manera el único invariante no trivial, es χ

$$\begin{aligned} < \delta\chi > &= < \delta(x_i\bar{\psi}_i) > \\ &= < \lambda\psi_i\bar{\psi}_i - x_i\,N\frac{\partial f}{\partial x_i}\lambda > \\ &= \lambda N < 1 - r\frac{\partial f}{\partial r} > \end{aligned}$$

entonces en vista de la definición de la variación BRST $\bar{\delta}$ y (34)

$$\begin{aligned} < \bar{\delta}\chi > &= N < 1 - r\frac{\partial f}{\partial r} > \\ &= 0 \end{aligned} \tag{44}$$

Ahora según el Teorema 1. [4]

$$< 1 - r\frac{\partial f}{\partial r} >= 1 - r\frac{\partial f}{\partial r} + O(N^{-\alpha})$$

y considerando el límite $N \to \infty$

$$< 1 - r\frac{\partial f}{\partial r} >= 1 - r\frac{\partial f}{\partial r}$$

lo que en virtud de (44) significa

$$1 - r\frac{\partial f}{\partial r} = 0$$

que no es más que *MFE* para el modelo.

De esta forma entonces, se obtiene *MFE* por medio de una identidad de Ward (44) asociada a la invarianza de la nueva acción (42) en la extensión BRST del modelo para el límite de N grande.
A continuación aplicaremos este método a un segundo modelo más complicado que llamaremos MV2.

4.3. El modelo MV2

El modelo MV2 es una extensión de MSV1 que considera dos vectores, en vez de uno, viviendo en un espacio N-dimensional. Está descrito por la siguiente integral

$$Z = \int d^N x\, d^N y\, e^{-Nf(\vec{x},\vec{y})} \tag{45}$$

donde f es tal que $f(O\vec{x}, O\vec{y}) = f(\vec{x}, \vec{y})$
en este modelo existen tres invariantes naturales que corresponden a:

$$r_1 = |\vec{x}|$$
$$r_2 = |\vec{y}|$$
$$r_3 = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

Señalemos que esta simple extensión del MSV1 de uno a dos vectores ya constituye un dificultad alta para el método de la fase estacionaria, la dificultad radica esencialmente en encontrar el Jacobiano asociado al cambio de variable que se debe introducir, puesto que ahora debemos expresar la integral Z en término de los tres invariantes.
Aquí en consecuencia se puede apreciar más claramente las ventajas del método alternativo.
Llevamos la acción $S = Nf(\vec{x}, \vec{y})$ a su par extendido BRST, recordamos que por cada variable x_i, y_i debemos introducir pares de variables fantasmas. A las

asociadas a x_i las denotaremos por $\psi_i, \bar{\psi}_i$ mientras que a las asociadas a $y_i, \eta_i, \bar{\eta}_i$, de esta forma y en concordancia con la sección 3.3, la nueva acción está dada por

$$\bar{S}(x_i, y_i, \psi_i, \bar{\psi}_i, \eta_i, \bar{\eta}_i) = Nf(\vec{x}, \vec{y}) + \bar{\psi}_i \psi_i + \bar{\eta}_i \eta_i$$

la que a su vez es invariante frente a

$$\begin{aligned}
\delta x_i &= \lambda \psi_i \\
\delta \psi_i &= 0 \\
\delta \bar{\psi}_i &= -\frac{\delta S}{\delta x_i}\lambda = -N\frac{\partial f}{\partial x_i}\lambda \\
\delta y_i &= \lambda \eta_i \\
\delta \eta_i &= 0 \\
\delta \bar{\eta}_i &= -\frac{\delta S}{\delta y_i}\lambda = -N\frac{\partial f}{\partial y_i}\lambda
\end{aligned} \tag{46}$$

Los nuevos invariantes <u>no</u> triviales son

$$\chi_1 = x_i \bar{\psi}_i \tag{47}$$

$$\chi_2 = x_i \bar{\eta}_i \tag{48}$$

$$\chi_3 = y_i \bar{\psi}_i \tag{49}$$

$$\chi_4 = y_i \bar{\eta}_i \tag{50}$$

Al aplicar las correspondientes identidades de Ward

$$\begin{aligned}
< \delta(\chi_1) > &= < \delta(x_i \bar{\psi}_i) > \\
&= < \lambda \psi_i \bar{\psi}_i - N x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\lambda > \\
&= \lambda N < 1 - r_1 \frac{\partial f}{\partial r_1} - r_3 \frac{\partial f}{\partial r_3} >
\end{aligned}$$

implica

$$\begin{aligned}
< \bar{\delta}(\chi_1) > &= N < 1 - r_1 \frac{\partial f}{\partial r_1} - r_3 \frac{\partial f}{\partial r_3} > \\
&= 0
\end{aligned}$$

y por el Teorema 1 para el límite $N \to \infty$

$$1 - r_1 \frac{\partial f}{\partial r_1} - r_3 \frac{\partial f}{\partial r_3} = 0 \tag{51}$$

que corresponde a la primera *MFE* para el modelo.

De manera similar

$$\begin{aligned}
<\delta(\chi_2)> &= <\delta(x_i\bar{\eta}_i)> \\
&= \lambda < 0 - Nx_i\frac{\partial f}{\partial y_i}> \\
&= \lambda N < -[\frac{r_3}{r_2}\frac{\partial f}{\partial r_2} + r_1^2\frac{\partial f}{\partial r_3}]>
\end{aligned}$$

implica

$$\begin{aligned}
<\bar{\delta}(\chi_2)> &= N < -[\frac{r_3}{r_2}\frac{\partial f}{\partial r_2} + r_1^2\frac{\partial f}{\partial r_3}]> \\
&= 0
\end{aligned}$$

por Teorema 1 y límite de N grande

$$\frac{r_3}{r_2}\frac{\partial f}{\partial r_2} + r_1^2\frac{\partial f}{\partial r_3} = 0 \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
<\delta(\chi_3)> &= <\delta(y_i\bar{\psi}_i)> \\
&= \lambda < 0 - Ny_i\frac{\partial f}{\partial x_i}> \\
&= \lambda N < -[\frac{r_3}{r_1}\frac{\partial f}{\partial r_1} + r_2^2\frac{\partial f}{\partial r_3}]>
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
<\bar{\delta}(\chi_3)> &= N < -[\frac{r_3}{r_1}\frac{\partial f}{\partial r_1} + r_2^2\frac{\partial f}{\partial r_3}]> \\
&= 0
\end{aligned}$$

por Teorema 1 y $N \to \infty$

$$\frac{r_3}{r_1}\frac{\partial f}{\partial r_1} + r_2^2 \frac{\partial f}{\partial r_3} = 0 \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
< \delta(\chi_4) > &= < \delta(y_i \bar{\eta}_i) > \\
&= \lambda < \eta_i \bar{\eta}_i - N y_i \frac{\partial f}{\partial y_i} > \\
&= \lambda N < 1 - r_2 \frac{\partial f}{\partial r_2} - r_3 \frac{\partial f}{\partial r_3} >
\end{aligned}$$

implica

$$\begin{aligned}
< \bar{\delta}(\chi_4) > &= N < 1 - r_2 \frac{\partial f}{\partial r_2} - r_3 \frac{\partial f}{\partial r_3} > \\
&= 0
\end{aligned}$$

por Teorema 1 y $N \to \infty$

$$1 - r_2 \frac{\partial f}{\partial r_2} - r_3 \frac{\partial f}{\partial r_3} = 0 \tag{54}$$

de esta manera (51), (52), (53) y (54) corresponden a *MFE* que determinan los valores críticos de r_1, r_2, r_3 y se verifica que el sistema que conforman dichas ecuaciones es consistente (apéndice C).

Nuestra intención ahora es explorar un método alternativo, que nos permita obtener *MFE* con la esperanza de que nos aporte alguna información adicional acerca del modelo, en concreto, que nos diga algo más de cómo deben ser las funciones que representan las cantidades físicas del modelo.

5. El Método Variacional

Nuestra intención será hacer una formulación variacional del problema para encontrar *MFE*.

5.1. Definición y proposición formal del problema

Sea $|G>$ un ket que represente un estado físico del sistema, entonces, éste tendrá asociado una función de invariantes que denotaremos por $G(r, \chi)$ y $G(r_1, r_2, r_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4)$ para las extensiones BRST de MSV1 y MV2 respectivamente.

Buscaremos la creación de un funcional $\widetilde{S}$ definido por

$$\widetilde{S} =< G|Q|G > \tag{55}$$

tal que al extremizarlo nos de

$$\delta\widetilde{S} = Q|G >= 0 \tag{56}$$

y que $\delta\widetilde{S} = 0$

contenga dentro de sí las *MFE* del modelo.

Para esto es necesario encontrar una base en el espacio de estados que permita definir un producto interior.

Para simplificar el problema de encontrar una base trabajaremos primero en una dimensión para luego generalizar el resultado a N dimensiones.

5.2. Primer modelo de producto interior

Usando la definición usual de la base para una coordenada de posición continua

$$|x >: \quad \int dx \, | \, x >< x \, | = 1 \tag{57}$$

y utilizando la base para un estado fermiónico en la representación coherente (apéndice D)

$$|\psi >: \quad \int d\bar{\psi} d\psi \, e^{-\bar{\psi}\psi} \, |\psi >< \psi| = 1 \tag{58}$$

nuestro primer intento fue proponer una base $| \, x, \psi >$ definida como el producto tensorial entre la base $| \, x >$ y $|\psi >$

$$| \, x, \psi >= | \, x > \otimes \, | \, \psi >$$

en consecuencia, esta base cuenta con la siguiente relación de completitud

$$|\,x,\psi>: \quad \int dx d\bar{\psi} d\psi\, e^{-\bar{\psi}\psi}\,|\,x,\psi>< x,\psi| = 1 \tag{59}$$

nuestra intención es que esta base permita la definición de un producto interior en una dimensión, como requisito, necesitamos que $< G|G > \geq 0$.

La primera propuesta que hicimos para la proyección del ket $|G >$ sobre la base (59) para MSV1 fue

$$< x,\psi|G >= G(x,\psi) = G_0 + G_1\psi \tag{60}$$

donde G_0 y G_1 son funciones de x.

pero al calcular $< G|G >$ se obtiene

$$\begin{aligned} < G|G > &= \int dx d\bar{\psi} d\psi\, e^{-\bar{\psi}\psi}[\overline{G}_0 + \overline{G}_1\bar{\psi}][G_0 + G_1\psi] \\ &= \int dx(|G_0|^2 - |G_1|^2) \end{aligned} \tag{61}$$

por lo que se requieren modificaciones.

Las modificaciones deben ser hechas a la proyección del ket $|G >$ pues sabemos que (59) es falto de error.
De esta manera notamos que al cambiar ψ por $\bar{\psi}$ en (60)

$$< x,\psi|G >= G(x,\psi) = G_0 + G_1\bar{\psi} \tag{62}$$

se obtiene el resultado deseado

$$< G|G > \;=\; \int dx(|G_0|^2 + |G_1|^2) \geq 0 \tag{63}$$

el paso siguiente consistió en calcular el funcional $\widetilde{S}$.

Para esto primero debemos hablar de la forma que toma el operador carga BRST para el modelo MSV1 y MV2. De aquí en adelante utilizaremos la notación de Einstein para la suma de índices repetidos a menos que se indique lo contrario

En la extensión de MSV1 (N dimensiones) consideramos una función arbitraria lo más general posible $F = F(x_i, \psi_i, \bar{\psi}_i)$ luego según (27) y (43)

$$\begin{aligned}
\delta F &= \delta x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \delta \psi_i \frac{\partial F}{\partial \psi_i} + \delta \bar{\psi}_i \frac{\partial F}{\partial \bar{\psi}_i} \\
&= \lambda \left[\psi_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\delta S}{\delta x_i} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_i} \right] F
\end{aligned}$$

En consecuencia se tiene que el operador carga BRST para MSV1 corresponde a

$$Q = \psi_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\delta S}{\delta x_i} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_i} \tag{64}$$

Para MV2 procedemos de una forma similar, la función a considerar es $F = F(x_i, y_i, \psi_i, \bar{\psi}_i, \eta_i\, bar\eta_i)$ con la cual en vista de (46)

$$\begin{aligned}
\delta F &= \delta x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \delta y_i \frac{\partial F}{\partial y_i} + \delta \psi_i \frac{\partial F}{\partial \psi_i} + \delta \bar{\psi}_i \frac{\partial F}{\partial \bar{\psi}_i} + \delta \eta_i \frac{\partial F}{\partial \eta_i} + \delta \bar{\eta}_i \frac{\partial F}{\partial \bar{\eta}_i} \\
&= \lambda \left[\psi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_i \frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\delta S}{\delta x_i} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_i} - \frac{\delta S}{\delta y_i} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_i} \right] F
\end{aligned}$$

de la última línea se identifica la carga BRST para MV2 como

$$Q = \psi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_i \frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\delta S}{\delta x_i} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_i} - \frac{\delta S}{\delta y_i} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_i} \tag{65}$$

con esto dicho procedemos a calcular el funcional $\widetilde{S}$, en todo el análisis subsiguiente se trabajará con el modelo MSV1 en una dimensión hasta encontrar la base adecuada, luego se generalizarán los resultados a MV2 y a N-dimensiones.

$$\begin{aligned}
\widetilde{S} &= < G|Q|G > \\
&= \int dx d\bar{\psi} d\psi \, e^{-\bar{\psi}\psi} [\overline{G}_0 + \overline{G}_1 \psi][\psi \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\delta S}{\delta x} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}}][G_0 + G_1 \bar{\psi}]
\end{aligned}$$

$$= \int dx\,\overline{G}_0\;[G_1'(x) - G_1\frac{\delta S}{\delta x}] \tag{66}$$

entonces las variaciones de $\widetilde{S}$ con respecto a G_0 y G_1 resultan

$$\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta\overline{G}_0} = G_1'(x) - \frac{\delta S}{\delta x}G_1(x) = 0 \tag{67}$$

$$\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta G_1} = \overline{G}_0'(x) + \frac{\delta S}{\delta x}\overline{G}_0(x) = 0 \tag{68}$$

las variaciones (67) y (68) son igualadas a cero puesto que se busca la condición (56).

Para saber si (67) y (68) son correctas debemos esperar que impliquen

$$Q|G >= 0 \tag{69}$$

entonces las comparamos con las ecuaciones que se obtienen de (69)

$$QG = [\psi\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\delta S}{\delta x}\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}}][G_0 + G_1\bar{\psi}]$$

$$= \psi(\,G_0'(x) + G_1'(x)\bar{\psi}\,) - G_1\frac{\delta S}{\delta x} = 0 \tag{70}$$

puesto que $\{1, \psi, \bar{\psi}, \psi\bar{\psi}\}$ son linealmente independientes entre sí,
(70)$\rightarrow$

$$\begin{aligned} G_0'(x) &= 0 \\ G_1'(x) &= 0 \\ G_1\frac{\delta S}{\delta x} &= 0 \end{aligned} \tag{71}$$

Desafortunadamente no se ve claramente el que (67) y (68) $\rightarrow$ (71), esto sólo ocurriría en el caso que G_0 fuese real y sólo para los puntos críticos que extremizan la acción original S. Para tratar de adquirir un mayor adentramiento en el problema y mejorar esta situación se propuso una proyección de $|G>$ que utilizara toda la base $\{1, \psi, \bar{\psi}, \psi\bar{\psi}\}$, asi

$$< x, \psi|G >= G_0 + G_1\bar{\psi} + G_2\psi + G_3\psi\bar{\psi} \tag{72}$$

pero al calcular $< G|G >$ obtenemos

$$\begin{aligned} < G|G > &= \int dx d\bar{\psi} d\psi \, e^{-\bar{\psi}\psi} [\overline{G}_0 + \overline{G}_1\psi + \overline{G}_2\bar{\psi} + \overline{G}_3\psi\bar{\psi}][G_0 + G_1\bar{\psi} + G_2\psi + G_3\psi\bar{\psi}] \\ &= \int dx \, (\overline{G}_0 G_3 + |G_0|^2 + |G_1|^2 - |G_2|^2 + \overline{G}_3 G_0) \end{aligned} \quad (73)$$

en (73) hay serios problemas, no sólo la expresión no es positiva definida sino que además aparecen términos de mezcla! como $\overline{G_0}G_3$. Por esta razón y el hecho de que no existe una clara implicancia por parte de (67) y (68) a (71) se buscó una nueva base para definir el producto punto.

5.3. Segundo modelo de producto interior

Buscamos una nueva base que permita considerar proyecciones del tipo (72) con la esperanza de que el hecho de usar toda la base $\{1, \psi, \bar{\psi}, \psi\bar{\psi}\}$ permita obtener (56). Para esto lo que se nos ocurrió fue definir un nuevo estado $|\bar{\psi} >$ tomando la definición del ket $|\psi >$ en la representación coherente (apéndice D). Aquí haremos una breve referencia.
En la representación coherente de estados fermiónicos $|\psi >$ se define como

$$|\psi >= |0 > +\psi|1 > \quad (74)$$

donde ψ es una variable de Grassmann y $|0 >, |1 >$ son los dos estados asociados al hamiltoniano del sistema en cuestión, para el estado del vacío y del siguiente nivel de energía respectivamente.
En vista de esta definición se me ocurrió definir el estado $|\bar{\psi} >$ como

$$|\bar{\psi} >= |0 > +\bar{\psi}|1 > \quad (75)$$

lo siguiente fue buscar que relación de completitud satisface. Después de algunos intentos se llegó a que la correspondiente relación es

$$\int d\psi d\bar{\psi} e^{\bar{\psi}\psi} |\bar{\psi} >< \bar{\psi}| = 1 \quad (76)$$

con esto podemos construir el estado $|x, \psi, \bar{\psi} >$ definido por

$$|x, \psi, \bar{\psi} >= |x > \otimes |\psi > \otimes |\bar{\psi} > \quad (77)$$

en consecuencia le corresponde la siguiente relación de completitud

$$\int dx d\bar{\psi} d\psi d\psi' d\bar{\psi}' e^{-\bar{\psi}\psi} \, e^{\bar{\psi}'\psi'} \, |x, \psi, \bar{\psi}' >< x, \psi, \bar{\psi}'| = 1 \quad (78)$$

las primas se han usado para distinguir entre las diferentes variables mudas de integración puesto que de lo contrario el integrando se anularía.

Recogiendo la experiencia ganada en el modelo previo de producto interior, y después de algunos intentos se identificó

$$< x,\psi,\bar{\psi}'|G >= G_0 + G_1\bar{\psi} + G_2\psi' + G_3\psi'\bar{\psi} \tag{79}$$

donde G_0, G_1, G_2 y G_3 son funciones dependientes de x.

como la proyección requerida para hacer $< G|G > \geq 0$.
Usaremos la notación $[d]$ para la medida de integración de (78)

$$\begin{aligned} < G|G > &= \int [d]\, e^{-\bar{\psi}\psi}\, e^{\bar{\psi}'\psi'}\, [\overline{G_0} + \overline{G_1}\psi + \overline{G_2}\bar{\psi}' + \overline{G_3}\psi\bar{\psi}'][G_0 + G_1\bar{\psi} + G_2\psi' + G_3\psi'\bar{\psi}] \\ &= \int dx\,(\,|G_0|^2 + |G_1|^2 + |G_2|^2 + |G_3|^2\,) \geq 0 \end{aligned} \tag{80}$$

De esta manera el segundo modelo de producto interior queda definido por (78) y (79). Es importante discutir ciertas características de este modelo antes de proseguir con los cálculos. De partida notamos que según (78) y (79) este modelo parece contener al primero, (78) es (59) multiplicado por (76), mientras que en (79) recobramos (62) al hacer $G_2 = G_3 = 0$. Lo siguiente es referirnos al 'campo' $\bar{\psi}'$, en estricto rigor corresponde a una variable independiente de $\bar{\psi}$ aunque nosotros quisiéramos interpretarla como esta y decir que el hecho de que lleve la prima es simplemente para poder llevar a cabo la integración en (78), pero sería de algún modo una restricción del caso más general en el cual $\bar{\psi}'$ es considerada como una variable completamente independiente. Esta última apreciación es necesaria para establecer la nueva forma que adquiere el operador carga BRST. Debemos considerar el caso más general, en consecuencia las funciones a considerar deben tener la siguiente forma $F = F(x, x', \psi, \psi', \bar{\psi}, \bar{\psi}')$. La razón por la cual se considera también x' es porque en definitiva la interpretación que le damos a $\bar{\psi}'$ es el de ser el mismo campo $\bar{\psi}$ pero no necesariamente evaluado en el mismo punto, es decir, $\bar{\psi}$ está asociado al punto x mientras que $\bar{\psi}'$ al punto x', cuestión que se vuelve más clara al escribir las transformaciones BRST:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}x &= \psi & \bar{\delta}x' &= \psi' \\ \bar{\delta}\psi &= 0 & \bar{\delta}\psi' &= 0 \\ \bar{\delta}\bar{\psi} &= -\frac{\delta S}{\delta x} & \bar{\delta}\bar{\psi}' &= -\frac{\delta S}{\delta x'} \end{aligned} \tag{81}$$

la carga BRST será

$$\begin{aligned} \delta F &= \delta x\frac{\partial F}{\partial x} + \delta x'\frac{\partial F}{\partial x'} + \delta\psi\frac{\partial F}{\partial\psi} + \delta\bar{\psi}\frac{\partial F}{\partial\bar{\psi}} + \delta\psi'\frac{\partial F}{\partial\psi'} + \delta\bar{\psi}'\frac{\partial F}{\partial\bar{\psi}'} \\ &= \lambda\left[\psi\frac{\partial}{\partial x} + \psi'\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\delta S}{\delta x}\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}} - \frac{\delta S}{\delta x'}\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}'}\right]F \end{aligned}$$

$\rightarrow$

$$Q = \psi\frac{\partial}{\partial x} + \psi'\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\delta S}{\delta x}\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}} - \frac{\delta S}{\delta x'}\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}'} \tag{82}$$

en vista de (82) procedemos a calcular $QG = 0$ y $\widetilde{S}$ (para MSV1)

$$QG = [\psi\frac{\partial}{\partial x} + \psi'\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\delta S}{\delta x}\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}} - \frac{\delta S}{\delta x'}\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}}][G_0 + G_1\bar{\psi} + G_2\psi' + G_3\psi'\bar{\psi}]$$

como nada depende de x' ni de $\bar{\psi}'$ el operador carga se reduce,

$$\begin{aligned} &= [\psi\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\delta S}{\delta x}\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}}][G_0 + G_1\bar{\psi} + G_2\psi' + G_3\psi'\bar{\psi}] \\ &= \psi[G_0'(x) + G_1'(x)\bar{\psi} + G_2'(x)\psi' + G_3'(x)\psi'\bar{\psi}] - \frac{\delta S}{\delta x}(\,G_1 - G_3\psi'\,) = 0 \end{aligned} \tag{83}$$

argumentándonos en la independencia lineal de $1, \psi\psi' \ldots$ etc.
(82) $\rightarrow$

$$G_0'(x) = 0 \quad G_1'(x) = 0 \quad G_2'(x) = 0 \quad G_3'(x) = 0$$

$$\frac{\delta S}{\delta x}G_1 = 0 \qquad \frac{\delta S}{\delta x}G_3 = 0 \tag{84}$$

inmediatamente indentificamos en (84) la contención de (71), reafirmando el que este nuevo producto interno pareciera ser una extensión del primero.

El funcional $\widetilde{S}$ resulta

$$\begin{aligned} \widetilde{S} &= < G|Q|G > \\ &= \int [d][\overline{G}_0 + \overline{G}_1\psi + \overline{G}_2\bar{\psi}' + \overline{G}_3\psi\bar{\psi}'][\psi\tfrac{\partial}{\partial x} - \tfrac{\delta S}{\delta x}\tfrac{\partial}{\partial\bar{\psi}}][G_0 + G_1\bar{\psi} + G_2\psi' + G_3\psi'\bar{\psi}] \\ &= \int dx\ [\overline{G}_0 G_1'(x) + \overline{G}_2 G_3'(x) - \overline{G}_0\frac{\delta S}{\delta x}G_1 - \overline{G}_2\frac{\delta S}{\delta x}G_3] \end{aligned} \tag{85}$$

finalmente variando $\widetilde{S}$ con respecto a $\overline{G}_0, G_1, \overline{G}_2, G_3$ e igualando las variaciones a cero en concordancia con (56)

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta \overline{G}_0} &= G_1'(x) - \frac{\delta S}{\delta x} G_1 = 0 &\quad (86)\\
\frac{\delta S}{\delta G_1} &= \overline{G}_0'(x) + \frac{\delta S}{\delta x} \overline{G}_0 = 0 &\quad (87)\\
\frac{\delta S}{\delta \overline{G}_2} &= G_3'(x) - \frac{\delta S}{\delta x} G_3 = 0 &\quad (88)\\
\frac{\delta S}{\delta G_3} &= \overline{G}_2'(x) + \frac{\delta S}{\delta x} \overline{G}_2 = 0 &\quad (89)
\end{aligned}$$

vemos que (85) y (86) corresponden a (67) y (68) respectivamente, nuevamente una indicación de que este segundo modelo es una extensión del anterior.
En vista de lo anterior y por el hecho que el primer modelo es más sencillo decidimos optar por trabajar con éste. Además debemos sumar el hecho de la sutileza que existe en torno a la interpretación de $\bar{\psi}'$. A pesar de decidirnos por el primer modelo, hemos querido presentar el segundo modelo de producto interior porque formó parte del trabajo realizado en la práctica y porque no deja de ser interesante.

5.4. Primer modelo de producto interior y *MFE*

5.4.1. MSV1

El primer modelo de producto interior queda definido por las ecs. (59) y (62), las cuales volvemos a escribir abajo

$$| x, \psi >: \quad \int dx d\bar{\psi} d\psi \, e^{-\bar{\psi}\psi} \, | x, \psi >< x, \psi | = 1 \qquad (59)$$

$$< x, \psi | G >= G(x, \psi) = G_0 + G_1 \bar{\psi} \qquad (62)$$

La generalización de (59) a N dimensiones corresponde a

$$| \vec{x}, \vec{\psi} >: \quad \int (\prod_{l=1}^{N} dx_l d\bar{\psi}_l d\psi_l) e^{-\bar{\psi}_i \psi_i} | \vec{x}, \vec{\psi} >< \vec{x}, \vec{\psi} | = 1 \qquad (90)$$

La versión de (62) generalizada a N-dimensiones cuando $|G>$ representa un estado físico, debe corresponder, como fue señalado a comienzos del capítulo 5, a una función de los invariantes r, χ en la extensión de MSV1, es decir,

$$< \vec{x}, \vec{\psi} | G >= G(r, \chi) = G_0(r) + G_1(r)\chi \qquad (91)$$

Es interesante subrayar el hecho de que (62) permite esta situación, puesto que contempla el uso de los $\bar{\psi}_i$ con los cuales se genera el invariante χ, no así, el caso de (60). Intentaremos entonces obtener *MFE* del modelo extremizando $\widetilde{S}$, la cual procedemos a calcular.
La medida de integración la denotaremos por $[d]$.

$$\widetilde{S} \quad = \quad \int [d] e^{-\bar{\psi}_i \psi_i} [\overline{G}_0(r) + \overline{G}_1(r)\overline{\chi}][\psi_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\delta S}{\delta x_i}\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_i}][G_0(r) + G_1(r)\chi]$$

al multiplicar todos los términos y llevar a cabo las integrales gaussianas sobre las variables de Grassmann finalmente resulta (apéndice E)

$$\widetilde{S} = \int (\prod_{l=1}^{N} dx_l)[\overline{G}_0(r)\frac{\partial G_1(r)}{\partial x_i} x_i + \overline{G}_0(r) N G_1 - \overline{G}_0(r)\frac{\delta S}{\delta x_i} G_1 x_i] \tag{92}$$

calculando la variación con respecto a $\overline{G}_0$ e igualándola a cero en pos de (56)

$$\frac{\delta \widetilde{S}}{\delta \overline{G}_0} \quad = \quad \frac{\partial G_1}{\partial x_i} x_i + N G_1 - N \frac{\partial f}{\partial x_i} G_1 x_i = 0$$

dividimos por N y tomamos el límite $N \to \infty$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial x_i}\frac{x_i}{N} + G_1 - \frac{\partial f}{\partial x_i} G_1 x_i &= 0 \\ G_1[1 - r\frac{\partial f}{\partial r}] &= 0 \end{aligned} \tag{93}$$

mientras que al hacer lo mismo con la variación con respecto a G_1

$$\begin{aligned} \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta G_1} &= -\frac{\partial(\overline{G}_0 x_i)}{\partial x_i} + N\overline{G}_0 - N\frac{\partial f}{\partial x_i}\overline{G}_0 x_i = 0 \\ &= -\frac{\partial \overline{G}_0}{\partial x_i}\frac{x_i}{N} - \overline{G}_0 x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \\ &= \overline{G}_0 r \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \end{aligned} \tag{94}$$

tenemos dos ecuaciones (93) y (94),

$$(93) \rightarrow \qquad G_1 = 0 \ \vee \ 1 - r\frac{\partial f}{\partial r} = 0$$

$$(94) \rightarrow \qquad \overline{G_0} = 0 \ \vee \ r\frac{\partial f}{\partial r} = 0$$

suponiendo que no conocemos *MFE* del modelo, pues esto es lo que esperamos que el método variacional determine, observamos que las implicancias de (93) y (94) resultan en que

$$\overline{G}_0 \neq 0 \rightarrow G_1 = 0 \qquad \text{ó} \qquad G_1 \neq 0 \rightarrow \overline{G}_0 = 0$$

ambos casos hacen que (92) se anule! Este problema de aparente inconsistencia se debe a la ec.(94) pues sabemos que $r\partial f/\partial r \neq 0$ y la forma que adopta (94) se debe al término de integración por partes $-\partial(G_0 x_i)/\partial x_i$. Para solventar esta situación notamos que si en (92) eliminamos el término $\overline{G}_0 x_i \partial G_1/\partial x_i$ pidiendo que G_1 sea constante, entonces ya no aparece en (94) el término conflictivo.[9]

En este caso el funcional $\widetilde{S}$ se reduce a

$$\widetilde{S} \ = \ \int (\prod_{l=1}^{N} dx_l)[\overline{G}_0(r) N G_1 - N\overline{G}_0(r)\frac{\partial f}{\partial x_i} G_1 x_i] \tag{95}$$

las variaciones con respecto a $\overline{G}_0$, G_1 son inmediatas

$$\frac{\delta \widetilde{S}}{\delta \overline{G}_0} \ = \ N G_1 [1 - r\frac{\partial f}{\partial r}] = 0 \tag{96}$$

$$\frac{\delta \widetilde{S}}{\delta G_1} \ = \ \int d^N x \, N\overline{G}_0 [1 - r\frac{\partial f}{\partial r}] = 0 \tag{97}$$

de la forma de (92) y (95) sabemos que si no queremos que estas expresiones pierdan sentido (i.e. el funcional se anule), necesariamente $G_0, G_1 \neq 0$. Con esto en la mano, nos fijamos que (96) implica *MFE* y (97) es una condición que se satisface en virtud de (96). De esta manera hemos cumplido nuestro objetivo para MSV1.
Finalmente quisiéramos señalar el hecho que en este caso particular no se requirió tomar el límite de N grande para encontrar *MFE*, lo que podría ser otro aditivo que trae consigo el método variacional y por supuesto el hecho de pedir $G_1 = cte$ no deja de ser una restricción necesaria para que el método funcione pero también se convierte en información adicional sobre la forma de las funciones G.

[9] El hecho de pedir G_1 constante concentra en G_0 toda la dependencia de los x_i.

5.4.2. MV2

La correspondiente generalización de (90) a MV2 corresponde a

$$| \vec{x}, \vec{y}, \vec{\psi}, \vec{\eta} >: \quad \int (\prod_{l=1}^{N} dx_l dy_l d\bar{\psi}_l d\psi_l d\bar{\eta}_l d\eta_l) e^{-\bar{\psi}_i \psi_i} e^{-\bar{\eta}_i \eta_i} |\vec{x}, \vec{y}, \vec{\psi}, \vec{\eta} >< \vec{x}, \vec{y}, \vec{\psi}, \vec{\eta}| = 1 \tag{98}$$

la proyección del ket $|G>$ es

$$\begin{aligned} < \vec{x}, \vec{y}, \vec{\psi}, \vec{\eta}|G > &= G(r_1, r_2, r_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \\ &= G_0 + G_1\chi_1 + G_2\chi_2 + G_3\chi_3 + G_4\chi_4 \\ &\quad +G_5\chi_1\chi_2 + G_6\chi_1\chi_4 + G_7\chi_2\chi_3 + G_8\chi_3\chi_4 \end{aligned} \tag{99}$$

donde $G_i = G_i(r_1, r_2, r_3)$ con $i = 0, 1, \ldots, 8$. De esta manera procedemos a calcular el funcional $\widetilde{S}$, utilizaremos $[d]$ para la medida de integración donde convenga

$$\begin{aligned} \widetilde{S} \quad = \quad & \int (\prod_{l=1}^{N} dx_l dy_l d\bar{\psi}_l d\psi_l d\bar{\eta}_l d\eta_l) e^{-\bar{\psi}_i \psi_i} e^{-\bar{\eta}_i \eta_i} [\overline{G}_0 + \overline{G}_1\overline{\chi}_1 + \overline{G}_2\overline{\chi}_2 + \overline{G}_3\overline{\chi}_3 + \overline{G}_4\overline{\chi}_4 \\ & +\overline{G}_5\overline{\chi_1\chi}_2 + \overline{G}_6\overline{\chi_1\chi}_4 + \overline{G}_7\overline{\chi_2\chi}_3 + \overline{G}_8\overline{\chi_3\chi}_4][\psi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_i \frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\delta S}{\delta x_i} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_i} - \frac{\delta S}{\delta y_i} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_i}] \\ & [G_0 + G_1\chi_1 + G_2\chi_2 + G_3\chi_3 + G_4\chi_4 + G_5\chi_1\chi_2 + G_6\chi_1\chi_4 + G_7\chi_2\chi_3 + G_8\chi_3\chi_4] \end{aligned}$$

notamos el hecho de que

$$\begin{aligned} \overline{\chi_1\chi}_2 &= \overline{x_i\bar{\psi}_i x_j \bar{\eta}_j} = x_i x_j \overline{\bar{\psi}_i \bar{\eta}_j} \\ &= x_i x_j \eta_j \psi_i = x_j \eta_j \, x_i \psi_i \\ &= \overline{\chi}_2 \overline{\chi}_1 \end{aligned}$$

al desarrollar la última expresión, es decir, después de multiplicar todos los términos y llevar a cabo la integración sobre las variables de Grassmann resulta (apéndice E)

$$
\begin{aligned}
= \int (\prod_{l=1}^{N} dx_l dy_l)\overline{G}_0[\frac{\partial G_1}{\partial x_i}x_i + NG_1 + \frac{\partial G_3}{\partial x_i}y_i + \frac{\partial G_2}{\partial y_i}x_i + \frac{\partial G_4}{\partial y_i}y_i \\
+NG_4 - N\frac{\partial f}{\partial x_i}(G_1x_i + G_3y_i) - N\frac{\partial f}{\partial y_i}(G_2x_i + G_4y_i)] \\
+(\overline{G}_1x_p + \overline{G}_3y_p)[\frac{\partial G_7}{\partial y_i}x_iy_p + \frac{\partial G_8}{\partial y_i}y_py_i \\
-G_8y_pN + \frac{\partial G_5}{\partial y_i}x_px_i + \frac{\partial G_6}{\partial y_i}x_py_i - G_6x_pN \\
-N\frac{\partial f}{\partial y_i}(-G_5x_px_i - G_6x_py_i + G_7x_iy_p - G_8y_py_i)] \\
+(\overline{G}_2x_p + \overline{G}_4y_p)[\frac{\partial G_5}{\partial x_i}x_ix_p + NG_5x_p \\
+\frac{\partial G_6}{\partial x_i}x_iy_p + NG_6y_p + \frac{\partial G_7}{\partial x_i}x_py_i + \frac{\partial G_8}{\partial x_i}y_iy_p \\
-N\frac{\partial f}{\partial x_i}(G_5x_ix_p + G_6x_iy_p - G_7x_py_i + G_8y_iy_p)]
\end{aligned} \tag{100}
$$

(100) es una expresión bastante más complicada que (92), motivado por el análisis previo en MSV1 donde se determinó que $G_1 = cte$, aquí probamos la opción $G_1, G_2, \ldots, G_8 = cte.$[10]

Entonces (100) se reduce a

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S} \quad = \quad & \int (\prod_{l=1}^{N} dx_l dy_l)\overline{G}_0[NG_1 + NG_4 - N\frac{\partial f}{\partial x_i}(G_1x_i + G_3y_i) - N\frac{\partial f}{\partial y_i}(G_2x_i + G_4y_i)] \\
& +(\overline{G}_1x_p + \overline{G}_3y_p)[-G_8y_pN - G_6x_pN - N\frac{\partial f}{\partial y_i}(-G_5x_px_i - G_6x_py_i + G_7x_iy_p - G_8y_py_i)] \\
& +(\overline{G}_2x_p + \overline{G}_4y_p)[NG_5x_p + NG_6y_p - N\frac{\partial f}{\partial x_i}(G_5x_ix_p + G_6x_iy_p - G_7x_py_i + G_8y_iy_p)]
\end{aligned} \tag{101}
$$

[10]Nuevamente concentramos la dependencia de las variables originales x_i, y_i, en el primer coeficiente G_0.

reexpresando las derivadas parciales como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r_1}\frac{\partial f}{\partial r_1} + y_i\frac{\partial f}{\partial r_3} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{y_i}{r_2}\frac{\partial f}{\partial r_2} + x_i\frac{\partial f}{\partial r_3}$$

y reagrupando términos, (101) se expresa como

$$\begin{aligned}
\widetilde{S} = \int (\prod_{l=1}^{N} dx_l dy_l)\; \overline{G}_0 N\, [G_1(1 - r_1\frac{\partial f}{\partial r_1} - r_3\frac{\partial f}{\partial r_3}) + G_4(1 - r_2\frac{\partial f}{\partial r_2} - r_3\frac{\partial f}{\partial r_3}) \\
-G_2(\frac{r_3}{r_2}\frac{\partial f}{\partial r_2} + r_1^2\frac{\partial f}{\partial r_3}) - G_3(\frac{r_3}{r_1}\frac{\partial f}{\partial r_1} + r_2^2\frac{\partial f}{\partial r_3})] \\
+\overline{G}_1 N\, [-G_8 r_3(1 - r_2\frac{\partial f}{\partial r_2} - r_3\frac{\partial f}{\partial r_3}) - G_6 r_1^2(1 - r_2\frac{\partial f}{\partial r_2} - r_3\frac{\partial f}{\partial r_3}) \\
+G_5 r_1^2(\frac{r_3}{r_2}\frac{\partial f}{\partial r_2} + r_1^2\frac{\partial f}{\partial r_3}) - G_7 r_3(\frac{r_3}{r_2}\frac{\partial f}{\partial r_2} + r_1^2\frac{\partial f}{\partial r_3})\,] \\
+\overline{G}_3 N\, [-G_8 r_2^2(1 - r_2\frac{\partial f}{\partial r_2} - r_3\frac{\partial f}{\partial r_3}) - G_6 r_3(1 - r_2\frac{\partial f}{\partial r_2} - r_3\frac{\partial f}{\partial r_3}) \\
+G_5 r_3(\frac{r_3}{r_2}\frac{\partial f}{\partial r_2} + r_1^2\frac{\partial f}{\partial r_3}) - G_7 r_2^2(\frac{r_3}{r_2}\frac{\partial f}{\partial r_2} + r_1^2\frac{\partial f}{\partial r_3})\,] \\
+\overline{G}_2 N\, [G_5 r_1^2(1 - r_1\frac{\partial f}{\partial r_1} - r_3\frac{\partial f}{\partial r_3}) + G_6 r_3(1 - r_1\frac{\partial f}{\partial r_1} - r_3\frac{\partial f}{\partial r_3}) \\
+G_7 r_1^2(\frac{r_3}{r_1}\frac{\partial f}{\partial r_1} + r_2^2\frac{\partial f}{\partial r_3}) - G_8 r_3(\frac{r_3}{r_1}\frac{\partial f}{\partial r_1} + r_2^2\frac{\partial f}{\partial r_3})\,] \\
+\overline{G}_4 N\, [G_5 r_3(1 - r_1\frac{\partial f}{\partial r_1} - r_3\frac{\partial f}{\partial r_3}) + G_6 r_2^2(1 - r_1\frac{\partial f}{\partial r_1} - r_3\frac{\partial f}{\partial r_3}) \\
+G_7 r_3(\frac{r_3}{r_1}\frac{\partial f}{\partial r_1} + r_2^2\frac{\partial f}{\partial r_3}) - G_8 r_2^2(\frac{r_3}{r_1}\frac{\partial f}{\partial r_1} + r_2^2\frac{\partial f}{\partial r_3})\,]
\end{aligned} \tag{102}$$

Destacamos en (102) la aparición del conjunto *MFE* para MV2.

La variación de $\widetilde{S}$ con respecto a G_0 e igualada a cero en vista de (56) resulta

$$\begin{aligned}\frac{\delta \widetilde{S}}{\delta \overline{G}_0} &= NG_1(1 - r_1\frac{\partial f}{\partial r_1} - r_3\frac{\partial f}{\partial r_3}) + NG_4(1 - r_2\frac{\partial f}{\partial r_2} - r_3\frac{\partial f}{\partial r_3}) \\ &\quad -NG_2(\frac{r_3}{r_2}\frac{\partial f}{\partial r_2} + r_1^2\frac{\partial f}{\partial r_3}) - NG_3(\frac{r_3}{r_1}\frac{\partial f}{\partial r_1} + r_2^2\frac{\partial f}{\partial r_3}) = 0\end{aligned} \tag{103}$$

como los $G_i, \overline{G}_i$ son arbitrarios y a su vez pedimos el que sean distintos de cero por un argumento análogo al soslayado para MSV1, el que el funcional $\widetilde{S}$ no se anule, entonces si sumamos la condición de **pedir una extremización del funcional $\widetilde{S}$ para todas las proyecciones posibles del ket $|G>$ de tipo** (99) **con G_0 dependiente de x_i, y_i mientras que** $G_1, G_2, \ldots, G_8 = cte$ entonces en este caso (103) implica las ecuaciones (51), (52), (53) y (54), es decir, el conjunto completo de *MFE* para MV2.

Establecido este hecho podemos apreciar que las demás variaciones de $\widetilde{S}$ producen condiciones que son satisfechas por (103).

Por ejemplo, la variación con respecto a G_5 e igualada a cero en vista de (56) resulta

$$\begin{aligned}\frac{\delta \widetilde{S}}{\delta G_5} &= \int d^N x d^N y \ \overline{G}_2 N\, r_1^2(1 - r_1\frac{\partial f}{\partial r_1} - r_3\frac{\partial f}{\partial r_3}) + \overline{G}_1 N\, r_1^2(\frac{r_3}{r_2}\frac{\partial f}{\partial r_2} + r_1^2\frac{\partial f}{\partial r_3}) \\ &\quad +\overline{G}_4 N\, r_3(1 - r_1\frac{\partial f}{\partial r_1} - r_3\frac{\partial f}{\partial r_3}) + \overline{G}_3 N\, r_3(\frac{r_3}{r_2}\frac{\partial f}{\partial r_2} + r_1^2\frac{\partial f}{\partial r_3}) = 0\end{aligned}$$

condición que es satisfecha por (103), sucediendo lo mismo para las otras variaciones.

De esta manera hemos logrado reobtener el conjunto *MFE* para MV2 a través de un método variacional imponiendo restricciones a la forma que adoptan las proyecciones de los estados físicos. Notamos también el hecho de que no fue necesario para este caso y a este nivel, es decir, a nivel de la obtención de *MFE* tomar el límite N grande.

6. Conclusión

En este trabajo hemos encontrado un nuevo método para encontrar el *MFE* de una téoria, el método variacional. Por falta de tiempo sólo pudimos aplicarlo a dos modelos sencillos pero que no dejan de ofrecernos un buen adentramiento sobre la metodología general que se requiere para obtener estas ecuaciones así como también la importancia de estas mismas y la estrategia de cómo ha de atacarse vía este método, otros modelos más complicados e.g. modelos matriciales, campos de gauge etc.

En lo concreto que se refiere a los modelos estudiados aquí hemos visto que el método variacional requiere para funcionar, que todos los coeficientes G_i en las expansiones de las funciones representantes de estados físicos, que acompañan a los invariantes que involucran anti-fantasmas, los χ_i, sean parámetros no dependientes de x_i, y_i. Esto constituye un dato que aunque no demuestra que las funciones aludidas deban ser de esta forma, sí lo hacen a uno pensar en esta posibilidad con cierto grado de interés (e.g. buscar una demostración hacia el futuro) y por lo tanto se puede argumentar que el método variacional provee información adicional sobre el modelo.

También notamos que para estos modelos en particular, la deducción de *MFE* vía el método variacional no requiere tomar el límite N grande lo que significa que el método variacional para estos casos resulta ser más general que el método de la fase estacionaria y el método de las identidades de Ward, ambos que si requieren el tomar $N \to \infty$.

Señalamos también que por medio de este trabajo hemos logrado construir dos tipos de productos puntos para funciones supersimétricas que pueden ser de utilidad para futuras investigaciones.

Finalmente quisiera agregar la satisfacción personal que he obtenido por medio de este trabajo, para el cuál aprendí una serie de materias nuevas (unas en mayor profundidad que otras). En particular resalto el hecho de haberme encontrado por primera vez con el concepto de la integral de camino, la cual estudie en profundidad [2] (a pesar de hacer una breve referencia a ella en este informe, sección 3) y haber incluso revisado la teoría de ϕ^4 como forma de introducirse en la deducción de los diagramas y reglas de Feynmann [2] que si bien no han aparecido en este trabajo principalmente por un problema de tiempo (se requeriría de un año más por lo menos!) si son sustanciales a lo que se investiga con N grande y por lo tanto bueno de estudiar en aras de una mejor comprensión general de la naturaleza de este estudio.
Es verdad que los modelos y resultados son simples pero nos dan una base para mirar versiones más complicadas del problema siguiendo la pauta establecida en éste informe, por ejemplo pudiésemos pensar a futuro en reemplazar el vector de MSV1 por una matriz de $N \times N$ y estar atentos a una condición similar a que $G_1 = cte$ y si se requiere o no tomar finalmente $N \to \infty$, lo mismo para

campos escalares, campos de gauge, etc; preguntas como éstas quedan abiertas para el futuro.

Bibliografía

1. Mark Swanson, *Path Integrals and Quantum Processes*, Academic Press (1992).

2. Bunji Sakita, *Quantum Theory of Many Variables Systems and Fields*, World Scientific (1985).

3. J. Alfaro, *Large-N limit of the two Hermitian-matrix model by the hidden BRST method*, Physical Review D, **47**, (1993) 4714.

4. J. Alfaro, *Hidden Supersymmetry and Large N*, Physics Letters B, **200**, (1988) 80. En este trabajo se presenta una generalización del Teorema 1.

5. J. Alfaro, P. Damgaard, *Schwinger-Dyson Equations as Supersymmetric Ward Identities*, Physics Letters B, **222**, (1989) 425.

6. Claudio Teitelboim, Marc Henneaux, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton U. Press (1992).

7. Aneesh V. Manohar, *Large N QCD Course*, Les Houches summer school, editors: F. David and R. Gupta, Elsevier Science B. V. (2001).

8. E. T. Copson, *Asymptotic Expansions*, Cambridge University Press (1965).

9. C. Becchi, A. Rouet y R. Stora, Ann. of Phys. **98**, (1976) 287.

A. Nulidad del valor de expectación de una variación BRST

Considérese una integral funcional cuya medida de integración y acción presentan invarianza frente a variaciones BRST $\bar{\delta}$, tomaremos el caso del campo escalar ϕ con una acción invariante $\bar{S}$, probaremos entonces que

$$< \bar{\delta} F >= 0$$

donde F es una función arbitraria de las variables contenidas en el modelo, en este caso particular, de $\phi, \psi, \bar{\psi}$.

Consideremos entonces la integral funcional

$$Z = \int [D\phi][D\bar{\psi}][D\psi] F e^{-\bar{S}}$$

y las variaciones

$$\phi' = \phi + \bar{\delta}\phi \quad \psi' = \psi + \bar{\delta}\psi \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi} + \bar{\delta}\bar{\psi}$$

entonces

$$D[\phi'] \to D[\phi] \quad D[\psi'] \to D[\psi] \quad D[\bar{\psi}'] \to D[\phi]$$

como la acción es invariante

$$\bar{S}' = \bar{S}(\phi + \bar{\delta}\phi,\, \psi + \bar{\delta}\psi,\, \bar{\psi} + \bar{\delta}\bar{\psi}) = \bar{S}(\phi, \psi, \bar{\psi}) = \bar{S}$$

y por otro lado

$$F\,' = F(\phi + \bar{\delta}\phi,\, \psi + \bar{\delta}\psi,\, \bar{\psi} + \bar{\delta}\bar{\psi}) = F(\phi, \psi, \bar{\psi}) + \bar{\delta} F$$

por comodidad tomaremos la normalización

$$\int [D\phi][D\bar{\psi}][D\psi] e^{-\bar{S}} = 1$$

sigue

$$\begin{aligned}
\int [D\phi'][D\bar{\psi}'][D\psi'] F\,' e^{-\bar{S}\,'} &= \int [D\phi][D\bar{\psi}][D\psi](F + \bar{\delta} F\,) e^{-\bar{S}} \\
\to \int [D\phi][D\bar{\psi}][D\psi]\, \bar{\delta} F\, e^{-\bar{S}(\phi,\psi,\bar{\psi})} &= 0 \\
< \bar{\delta} F > &= 0
\end{aligned}$$

como se pedía.

Finalmente notamos que si a la acción le sumamos una variación BRST cualquiera $\bar{\delta}H$ es lo mismo que sumar un cero a la integral, usaremos $[d]$ para la medida de integración donde convenga

$$\begin{aligned}
\int [D\phi][D\bar{\psi}][D\psi]\, e^{-\bar{S}+\bar{\delta}H} &= \int [D\phi][D\bar{\psi}][D\psi]\, e^{-\bar{S}} e^{\bar{\delta}H} \\
&= \int [d]\, e^{-\bar{S}}[\, 1 + \bar{\delta}H + \frac{1}{2}(\bar{\delta}H)^2 + \frac{1}{3!}(\bar{\delta}H)^3 + \cdots]
\end{aligned}$$

notamos

$$\begin{aligned}
(\bar{\delta}H)^2 &= \bar{\delta}H\bar{\delta}H = \bar{\delta}(H\bar{\delta}H) \\
(\bar{\delta}H)^3 &= \bar{\delta}H\bar{\delta}H\bar{\delta}H = \bar{\delta}H\bar{\delta}(H\bar{\delta}H) = \bar{\delta}(H\bar{\delta}H\bar{\delta}H) \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

haciendo uso de la nilpotencia de $\bar{\delta}$.

sigue entonces

$$\begin{aligned}
&= \int [d]\, e^{-\bar{S}}\, [\, \bar{\delta}H + \frac{1}{2}\bar{\delta}(H\bar{\delta}H) + \frac{1}{3!}\bar{\delta}(H\bar{\delta}H\bar{\delta}H) + \cdots] \\
&= \int [d]\, e^{-\bar{S}}\, \bar{\delta}[\, H + \frac{1}{2}(H\bar{\delta}H) + \frac{1}{3!}(H\bar{\delta}H\bar{\delta}H) + \cdots] \\
&= \int [d]\, e^{-\bar{S}}\, \bar{\delta}\widetilde{H} \\
&= <\bar{\delta}\widetilde{H}> \\
&= 0
\end{aligned}$$

como se demostró previamente.

B. Integrales Gaussianas

Revisaremos los tipos de integrales Gaussianas más importantes con sus desarrollos llegando al final a aquellas que han sido utilizadas en los cálculos presentes en este trabajo. La notación de Einstein es empleada para la suma de índices repetidos en las exponenciales. x denota una variable real, z una variable compleja y $\psi, \bar{\psi}$ variables de Grassmann complejas. Se entiende que el rango de integración es todo el espacio.

Comenzamos citando el conocido resultado

$$1) \int dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$2) \int (\prod_{l=1}^{N} dx_l) e^{-x_i A_{ij} x_j} = \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{det\, A}}$$

desarrollo:

buscamos cambio de base unitario ortogonal que diagonalice a la matriz A

$$y_i = U_{ik} x_k$$

donde U es la matriz unitaria buscada, luego

$$x_k = U^{-1}_{ki} y_i$$
$$x_k = y_i U_{ik}$$

la segunda línea es la versión transpuesta de la anterior

$$\begin{aligned}
\int (\prod_{l=1}^{N} dx_l) e^{-x_i A_{ij} x_j} &= \int (\prod_{l=1}^{N} dy_l) \left| \frac{\partial(x_1 \cdots x_n)}{\partial(y_1 \cdots y_n)} \right| e^{-y_k U_{ki} A_{ij} U^{-1}_{jp} y_p} \\
&= \int (\prod_{l=1}^{N} dy_l) \left| \frac{\partial(x_1 \cdots x_n)}{\partial(y_1 \cdots y_n)} \right| e^{-y_k \Lambda_{kp} y_p}
\end{aligned}$$

como Λ es diagonal

$$\Lambda_{kp} y_p = \lambda^{(k)} y_k$$

donde $\lambda^{(k)}$ es el valor propio de Λ asociado al k-esimo vector propio, además

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_i}{\partial y_j} &= U_{ij}^{-1} \\
\rightarrow \left| \frac{\partial(x_1 \cdots x_n)}{\partial(y_1 \cdots y_n)} \right| &= det(U^{-1}) = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int (\prod_{l=1}^{N} dy_l) e^{-\lambda^{(k)} y_k y_k} \\
&= \prod_{l=1}^{N} \int dy_l e^{-\lambda^{(l)} y_l^2} \\
&= \prod_{l=1}^{N} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^l}} \\
&= \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{detA}}
\end{aligned}
$$

$$
3) \int (\prod_{l=1}^{N} dx_l) e^{-(x_i A_{ij} x_j + b_j x_j)} = e^{(\frac{1}{4} b^T A^{-1} b)} \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{det\, A}}
$$

desarrollo:

Aplicamos el método de la fase estacionaria, por lo que hacemos una expansión de Taylor de la función en el exponente en torno a un mínimo, para esto calculamos las primeras y segundas derivadas (no hay más puesto que es una forma cuadrática más un término lineal)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k}(x_i A_{ij} x_j + b_j x_j) &= \delta_{ik} A_{ij} x_j + x_i A_{ij} \delta_{jk} + b_j \delta_{jk} \\
&= A_{kj} x_j + x_i A_{ik} + b_k \\
&= A_{kp} x_p + A_{pk} x_p + b_k
\end{aligned}
$$

se asume que la matriz A es simétrica (hermítica en el caso más general), entre otras razones, para asegurar que sea diagonalizable, entonces

$$
\begin{aligned}
&= A_{kp} x_p + A_{kp} x_p + b_k \\
&= 2A_{kp} x_p + b_p = 0 \\
2A_{kp} x_p &= -b_p \\
x_p &= -\frac{1}{2} A_{pk}^{-1} b_k
\end{aligned}
$$

se iguala a cero porque es un punto mínimo.

Las segundas derivadas son

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m}(x_i A_{ij} x_j + b_j x_j) &= \frac{\partial}{\partial x_m}(2A_{kp}x_p + b_p)\\ &= 2A_{km}\end{aligned}$$

de esta forma la expansión de Taylor en torno al mínimo queda

$$\begin{aligned}x_i A_{ij} x_j + b_j x_j &= \frac{1}{4} b_p A^{-1}_{pi} A_{ij} A^{-1}_{jk} b_k - \frac{1}{2} b_p A^{-1}_{pk} b_k + (x_i + \frac{1}{2}A^{-1}_{ik} b_k) A_{ij} (x_j + \frac{1}{2} A^{-1}_{jk} b_k)\\ &= \frac{1}{4} b_p A^{-1}_{pi} I_{ik} b_k - \frac{1}{2} b_p A^{-1}_{pk} b_k + (x_i + \frac{1}{2}A^{-1}_{ik} b_k) A_{ij} (x_j + \frac{1}{2} A^{-1}_{jk} b_k)\\ &= \frac{1}{4} b_p A^{-1}_{pk} b_k - \frac{1}{2} b_p A^{-1}_{pk} b_k + (x_i + \frac{1}{2}A^{-1}_{ik} b_k) A_{ij} (x_j + \frac{1}{2} A^{-1}_{jk} b_k)\\ &= -\frac{1}{4} b^T A^{-1} b + (x_i + \frac{1}{2}A^{-1}_{ik} b_k) A_{ij} (x_j + \frac{1}{2} A^{-1}_{jk} b_k)\end{aligned}$$

definimos

$$\widetilde{x}_i = x_i + \frac{1}{2} A^{-1}_{ik} b_k$$

el cambio de variable asociado es trivial ya que $\frac{\partial x_i}{\partial \widetilde{x}_j} = \delta_{ij}$ en consecuencia la integral queda

$$= e^{(\frac{1}{4} b^T A^{-1} b)} \int (\prod_{l=1}^{N} d\widetilde{x}_l) e^{-(\widetilde{x}_i A_{ij} \widetilde{x}_j)}$$

lo que resulta finalmente

$$\int (\prod_{l=1}^{N} dx_l) e^{-(x_i A_{ij} x_j + b_j x_j)} = e^{(\frac{1}{4} b^T A^{-1} b)} \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{det\, A}}$$

$$4) \int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{z}_l dz_l) e^{-\bar{z}_i A_{ij} z_j} = \frac{(2\pi)^N}{detA}$$

desarrollo:

De manera similar que en 3) se busca sistema de coordenadas que diagonalicen A, así sea este dado por

$$\begin{aligned} w_i &= U_{ik} z_k \\ \bar{w}_i &= \bar{z}_k U^\dagger_{ki} \\ z_k &= U^\dagger_{ki} w_i \\ \bar{z}_k &= \bar{w}_i U_{ik} \end{aligned}$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} \int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{z}_l dz_l) e^{-\bar{z}_i A_{ij} z_j} &= \int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{w}_l dw_l) \left| \frac{\partial(z_1, \bar{z}_1 \cdots, z_N, \bar{z}_N)}{\partial(w_1, \bar{w}_1, \cdots, w_N, \bar{w}_N)} \right| e^{-\bar{w}_p U_{pi} A_{ij} U^\dagger_{jk} w_k} \\ &= \int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{w}_l dw_l) \left| \frac{\partial(z_1, \bar{z}_1 \cdots, z_N, \bar{z}_N)}{\partial(w_1, \bar{w}_1, \cdots, w_N, \bar{w}_N)} \right| e^{-\bar{w}_p \Lambda_{pk} w_k} \end{aligned}$$

nos fijamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_i}{\partial w_j} &= U^\dagger_{ij} \\ \frac{\partial z_i}{\partial \bar{w}_j} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{z}_i}{\partial \bar{w}_j} &= U_{ij} \\ \frac{\partial \bar{z}_i}{\partial w_j} &= 0 \end{aligned}$$

se verifica que

$$\left| \frac{\partial(z_1, \bar{z}_1 \cdots, z_N, \bar{z}_N)}{\partial(w_1, \bar{w}_1, \cdots, w_N, \bar{w}_N)} \right| = det(U^\dagger) det(U) = det(U^\dagger U) = 1$$

de esta manera

$$
\begin{aligned}
&= \int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{w}_l dw_l) e^{-\bar{w}_p \Lambda_{pk} w_k} \\
&= \int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{w}_l dw_l) e^{-\bar{w}_p \lambda^p w_p} \\
&= \prod_{l=1}^{N} \int d\bar{w}_l dw_l \, e^{-\lambda^l \bar{w}_l w_l}
\end{aligned}
$$

para evaluar las integrales, cambiamos a la descripción polar de los números complejos, así en términos generales

$$
\begin{aligned}
w &= \rho e^{i\theta} \\
\bar{w} &= \rho e^{-i\theta}
\end{aligned}
$$

de esta forma

$$\int d\bar{w} dw \, e^{-\lambda \bar{w} w} = \int d\theta d\rho \left| \frac{\partial(w,\bar{w})}{\partial(\rho,\theta)} \right| e^{-\lambda \rho^2}$$

$$\left| \frac{\partial(w,\bar{w})}{\partial(\rho,\theta)} \right| = \begin{vmatrix} e^{i\theta} & i\rho e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & -i\rho e^{-i\theta} \end{vmatrix} = 2\rho$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\prod_{l=1}^{N} \int d\bar{w}_l dw_l \, e^{-\lambda^l \bar{w}_l w_l} &= \prod_{l=1}^{N} \int d\theta_l d\rho_l 2\rho_l \, e^{-\lambda^l \rho_l^2} \\
&= \prod_{l=1}^{N} 2\pi \int_0^{\infty} d\rho_l 2\rho_l \, e^{-\lambda^l \rho_l^2} \\
&= \prod_{l=1}^{N} 2\pi \left[\frac{e^{-\lambda^l \rho_l^2}}{\lambda^l} \right]_{\infty}^{0} \\
&= \prod_{l=1}^{N} \frac{2\pi}{\lambda^l} \\
&= \frac{(2\pi)^N}{detA}
\end{aligned}
$$

$$5)\int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{z}_l dz_l) e^{-(\bar{z}_i A_{ij} z_j + \bar{b}_j z_j + \bar{z}_j b_j)} = \frac{(2\pi)^N}{detA}\, e^{(\bar{b}A^{-1}b)}$$

desarrollo:

aplicamos el método de la fase estacionaria,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_k}(\bar{z}_i A_{ij} z_j + \bar{b}_j z_j + \bar{z}_j b_j) &= 0\\ \bar{z}_i A_{ik} + \bar{b}_k &= 0\\ \bar{z}_i A_{ik} &= -\bar{b}_k\\ \bar{z}_i &= -\bar{b}_k A^{-1}_{ki}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}(\bar{z}_i A_{ij} z_j + \bar{b}_j z_j + \bar{z}_j b_j) &= 0\\ A_{kj} z_j + b_k &= 0\\ A_{kj} z_j &= -b_k\\ z_j &= -A^{-1}_{jk} b_k\end{aligned}$$

la única derivada de segundo orden de interés es (las otras son cero)

$$\frac{\partial^2}{\partial z_p \partial \bar{z}_k}(\bar{z}_i A_{ij} z_j + \bar{b}_j z_j + \bar{z}_j b_j) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial z_p}(A_{kj} z_j + b_k) = A_{kp}$$

en consecuencia la expansión de Taylor adopta la siguiente forma

$$\begin{aligned}\bar{z}_i A_{ij} z_j + \bar{b}_j z_j + \bar{z}_j b_j \quad &= \quad \bar{b}_k A^{-1}_{ki} A_{ij} A^{-1}_{jp} b_p - \bar{b}_j A^{-1}_{jk} b_k - \bar{b}_k A^{-1}_{kj} b_j\\ &\quad + (\bar{z}_i + \bar{b}_k A^{-1}_{ki}) A_{ij} (z_j + A^{-1}_{jk} b_k)\\ &= \quad \bar{b}_k A^{-1}_{kp} b_p - \bar{b}_j A^{-1}_{jk} b_k - \bar{b}_k A^{-1}_{kj} b_j\end{aligned}$$

$$+(\bar{z}_i + b_k A^{-1}_{ki}) A_{ij} (z_j + A^{-1}_{jk} b_k)$$

$$= \quad -\bar{b}_k A^{-1}_{kj} b_j + (\bar{z}_i + b_k A^{-1}_{ki}) A_{ij} (z_j + A^{-1}_{jk} b_k)$$

definimos

$$\widetilde{z}_j = z_j + A^{-1}_{jk} b_k$$

$$\widetilde{\bar{z}}_i = \bar{z}_i + b_k A^{-1}_{ki}$$

de esta forma la integral queda

$$= \quad e^{\bar{b}_k A^{-1}_{kj} b_j} \int (\prod_{l=1}^{N} d\widetilde{\bar{z}}_l d\widetilde{z}_l) e^{-(\widetilde{\bar{z}}_i A_{ij} \widetilde{z}_j)}$$

$$= \quad e^{(\,\bar{b} A^{-1} b)} \, \frac{(2\pi)^N}{detA}$$

Las siguientes integrales que contienen variables de Grassmann cobran especial relevancia pues fueron usadas en reiteradas ocaciones en los cálculos.

$$6) \int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{\psi}_l d\psi_l) e^{-\bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j} = detA$$

hacemos cambio de base

$$\begin{aligned} \xi_i &= U_{ik} \psi_k \\ \bar{\xi}_i &= \bar{\psi}_k U^{\dagger}_{ki} \\ \psi_k &= U^{\dagger}_{ki} \xi_i \\ \bar{\psi}_k &= \bar{\xi}_i U_{ik} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{\psi}_l d\psi_l) e^{-\bar{\psi}_i A_{ij}\psi_j} &= \int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{\xi}_l d\xi_l) \left| \frac{\partial(\psi_1, \bar{\psi}_1 \cdots, \psi_N, \bar{\psi}_N)}{\partial(\xi_1, \bar{\xi}_1, \cdots, \xi_N, \bar{\xi}_N)} \right| e^{-\bar{\xi}_p U_{pi} A_{ij} U^{\dagger}_{jk}\xi_k} \\
&= \int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{\xi}_l d\xi_l) det(U^{\dagger}U)\, e^{-\bar{\xi}_p \Lambda_{pk}\xi_k} \\
&= \int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{\xi}_l d\xi_l)\, e^{-\bar{\xi}_p \lambda^{(p)}\xi_p} \\
&= \prod_{l=1}^{N} \int d\bar{\xi}_l d\xi_l\, e^{-\bar{\xi}_l \lambda^{(l)}\xi_l} \\
&= \prod_{l=1}^{N} \int d\bar{\xi}_l d\xi_l\, (\, 1 - \lambda^{(l)}\bar{\xi}_l \xi_l) \\
&= \prod_{l=1}^{N} \lambda^{(l)} \int d\bar{\xi}_l d\xi_l\, \xi_l \bar{\xi}_l \\
&= \prod_{l=1}^{N} \lambda^{(l)} \\
&= detA
\end{aligned}
$$

$$
7) \int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{\psi}_l d\psi_l d\bar{\eta}_l d\eta_l) e^{-(\bar{\psi}_i A_{ij}\psi_j + \bar{b}_j\psi_j + \bar{\psi}_j b_j)} = detA\, e^{(\bar{b}A^{-1}b)}
$$

aplicamos método de la fase estacionaria

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \psi_k}(\bar{\psi}_i A_{ij}\psi_j + \bar{b}_j\psi_j + \bar{\psi}_j b_j) &= 0 \\
\bar{\psi}_i A_{ik} + \bar{b}_k &= 0 \\
\bar{\psi}_i A_{ik} &= -\bar{b}_k \\
\bar{\psi}_i &= -\bar{b}_k A^{-1}_{ki}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_k}(\bar{\psi}_i A_{ij}\psi_j + \bar{b}_j\psi_j + \bar{\psi}_j b_j) = 0
$$

$$A_{kj}\psi_j + b_k = 0$$
$$A_{kj}\psi_j = -b_k$$
$$\psi_j = -A^{-1}_{jk} b_k$$

la única derivada de segundo orden de interés es (las otras son cero)

$$\frac{\partial^2}{\partial z_p \partial \bar{\psi}_k}(\bar{\psi}_i A_{ij}\psi_j + \bar{b}_j\psi_j + \bar{\psi}_j b_j) \;=\; \frac{\partial}{\partial \psi_p}(A_{kj}\psi_j + b_k) = A_{kp}$$

en consecuencia la expansión de Taylor adopta la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_i A_{ij}\psi_j + \bar{b}_j\psi_j + \bar{\psi}_j b_j &= \bar{b}_k A^{-1}_{ki} A_{ij} A^{-1}_{jp} b_p - \bar{b}_j A^{-1}_{jk} b_k - \bar{b}_k A^{-1}_{kj} b_j \\
&\quad + (\bar{\psi}_i + \bar{b}_k A^{-1}_{ki}) A_{ij} (\psi_j + A^{-1}_{jk} b_k) \\
&= \bar{b}_k A^{-1}_{kp} b_p - \bar{b}_j A^{-1}_{jk} b_k - \bar{b}_k A^{-1}_{kj} b_j \\
&\quad + (\bar{\psi}_i + b_k A^{-1}_{ki}) A_{ij} (\psi_j + A^{-1}_{jk} b_k) \\
&= -\bar{b}_k A^{-1}_{kj} b_j + (\bar{\psi}_i + b_k A^{-1}_{ki}) A_{ij} (\psi_j + A^{-1}_{jk} b_k)
\end{aligned}$$

definimos

$$\widetilde{\psi}_j = \psi_j + A^{-1}_{jk} b_k$$
$$\widetilde{\bar{\psi}}_i = \bar{\psi}_i + b_k A^{-1}_{ki}$$

de esta forma la integral queda

$$= \; e^{\bar{b}_k A^{-1}_{kj} b_j} \int (\prod_{l=1}^{N} d\widetilde{\bar{\psi}}_l d\widetilde{\psi}_l) e^{-(\widetilde{\bar{\psi}}_i A_{ij} \widetilde{\psi}_j)}$$

$$= \; e^{(\bar{b} A^{-1} b)} \, det A$$

esta última integral nos permite evaluar las siguientes expresiones (presentes en los cálculos de las $\widetilde{S}$)

$$\begin{aligned}
\int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{\psi}_l d\psi_l)\psi_k e^{-\bar{\psi}_i A_{ij}\psi_j} &= \frac{\partial}{\partial \bar{b}_k}\int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{\psi}_l d\psi_l d\bar{\eta}_l d\eta_l) e^{-(\bar{\psi}_i A_{ij}\psi_j + \bar{b}_j\psi_j + \bar{\psi}_j b_j)}|_{b=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial \bar{b}_k}\, detA\, e^{(\bar{b}A^{-1}b)} \\
&= \frac{\partial}{\partial \bar{b}_k}(\bar{b}_i A^{1}_{ij} b_j)\, detA\, e^{(\bar{b}A^{-1}b)} \\
&= A^{-1}_{kj} b_j\, detA\, e^{(\bar{b}A^{-1}b)}|_{b=0} = 0
\end{aligned}$$

al evaluar en $b = 0$.

luego

$$\int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{\psi}_l d\psi_l)\psi_k e^{-\bar{\psi}_i A_{ij}\psi_j} = 0$$

de la misma forma

$$\begin{aligned}
\int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{\psi}_l d\psi_l)\psi_k \psi_p e^{-\bar{\psi}_i A_{ij}\psi_j} &= \frac{\partial^2}{\partial \bar{b}_p \bar{b}_k}\int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{\psi}_l d\psi_l d\bar{\eta}_l d\eta_l) e^{-(\bar{\psi}_i A_{ij}\psi_j + \bar{b}_j\psi_j + \bar{\psi}_j b_j)}|_{b=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial \bar{b}_p} A^{-1}_{kj} b_j\, detA\, e^{(\bar{b}A^{-1}b)} \\
&= A^{-1}_{kj} b_j\, detA\, A^{-1}_{pj} b_j\, e^{(\bar{b}A^{-1}b)}|_{b=0} = 0
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{\psi}_l d\psi_l)\psi_k \psi_p e^{-\bar{\psi}_i A_{ij}\psi_j} = 0$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
\int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{\psi}_l d\psi_l)\psi_k \bar{\psi}_p e^{-\bar{\psi}_i A_{ij}\psi_j} &= \frac{\partial^2}{\partial b_p \bar{b}_k}\int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{\psi}_l d\psi_l d\bar{\eta}_l d\eta_l) e^{-(\bar{\psi}_i A_{ij}\psi_j + \bar{b}_j\psi_j + \bar{\psi}_j b_j)}|_{b=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial b_p}(\, A^{-1}_{kj} b_j\, detA\, e^{(\bar{b}A^{-1}b)})
\end{aligned}$$

$$= \delta_{jp}A^{-1}_{kj}\, detA\, e^{(\bar{b}A^{-1}b)} + A^{-1}_{kj}b_j\, detA\, \bar{b}_k A_{kp} e^{(\bar{b}A^{-1}b)}\,|_{b=0}$$

$$= A^{-1}_{kp}\, detA$$

$$\rightarrow \int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{\psi}_l d\psi_l)\psi_k\bar{\psi}_p e^{-\bar{\psi}_i A_{ij}\psi_j} = A^{-1}_{kp}\, detA$$

en definitiva sólo aquellas correlaciónes que tengan igual número de ψ que de $\bar{\psi}$ son distintas de cero[11]. Para este trabajo, todas las integrales gaussianas encontradas contaron con $A = I \rightarrow A^{-1}_{kp} = I^{-1}_{kp} = \delta_{kp}$, $detA = detI = 1$
en otras palabras

$$\int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{\psi}_l d\psi_l)\psi_k\bar{\psi}_p e^{-\bar{\psi}_i I_{ij}\psi_j} = \int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{\psi}_l d\psi_l)\psi_k\bar{\psi}_p e^{-\bar{\psi}_i\psi_i} = \delta_{kp}$$

cuya versión al continuo toma la siguiente forma

$$\int [D\bar{\psi}][D\psi]\psi(x)\bar{\psi}(y)e^{-\int dx'dx\bar{\psi}(x')\delta(x'-x)\psi(x)} = \int [D\bar{\psi}][D\psi]\psi(x)\bar{\psi}(y)e^{-\int dx\bar{\psi}(x)\psi(x)} = \delta(x-y)$$

de manera similar

$$\int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{\psi}_l d\psi_l)e^{-\bar{\psi}_i I_{ij}\psi_j} = \int (\prod_{l=1}^{N} d\bar{\psi}_l d\psi_l)e^{-\bar{\psi}_i\psi_i} = detI = 1$$

cuya versión al continuo es

$$\int [D\bar{\psi}][D\psi]\, e^{-\int dx'dx\bar{\psi}(x')\delta(x'-x)\psi(x)} = \int [D\bar{\psi}][D\psi]\, e^{-\int dx\bar{\psi}(x)\psi(x)} = 1$$

[11]Este hecho fue de mucha utilidad en el cálculo de los $\widetilde{S}$, especialmente en el caso de MV2, donde el número de términos en el integrando es considerable.

C. Consistencia del sistema de MFE en MV2

Demostraremos que el conjunto de ecuaciones de *MFE* para MV2 es consistente.

El conjunto está dado por

$$1 - r_1\frac{\partial f}{\partial r_1} - r_3\frac{\partial f}{\partial r_3} = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$1 - r_2\frac{\partial f}{\partial r_2} - r_3\frac{\partial f}{\partial r_3} = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{r_3}{r_2}\frac{\partial f}{\partial r_2} + r_1^2\frac{\partial f}{\partial r_3} = 0 \qquad \text{(III)}$$

$$\frac{r_3}{r_1}\frac{\partial f}{\partial r_1} + r_2^2\frac{\partial f}{\partial r_3} = 0 \qquad \text{(IV)}$$

restamos (II) a (I) obteniendo

$$r_2\frac{\partial f}{\partial r_2} - r_1\frac{\partial f}{\partial r_1} = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial r_2} = \frac{r_1}{r_2}\frac{\partial f}{\partial r_1} \qquad (*)$$

reemplazamos (*) en (III)

$$\begin{aligned}
\frac{r_3}{r_2}\frac{\partial f}{\partial r_2} + r_1^2\frac{\partial f}{\partial r_3} &= \frac{r_3}{r_2}\frac{r_1}{r_2}\frac{\partial f}{\partial r_1} + r_1^2\frac{\partial f}{\partial r_3} = 0 \\
\frac{r_3}{r_2^2}\frac{\partial f}{\partial r_1} + r_1\frac{\partial f}{\partial r_3} &= 0 \ \ / \times \frac{r_2^2}{r_1} \\
\frac{r_3}{r_1}\frac{\partial f}{\partial r_1} + r_2^2\frac{\partial f}{\partial r_3} &= 0
\end{aligned}$$

y esta última ecuación corresponde a (IV), luego

$\{$(I), (II), (III)$\} \rightarrow$ (IV) y el sistema es consistente.

D. Representación coherente de estados bosónicos y fermiónicos

La representación coherente se enmarca dentro del contexto de un sistema descrito por un cierto hamiltoniano H. En su descripción cuántica, el observable H tendrá una base ortonormal de autoestados $\{|\varphi_n>\}$, en la aproximación armónica, se definen operadores de creación y aniquilación $\{a^\dagger, a\}$ como

$$a|\varphi_n >= \sqrt{n}\,|\varphi_{n-1} >$$

$$a^\dagger|\varphi_n >= \sqrt{n+1}\,|\varphi_{n+1} >$$

y cumplen con la siguiente relación de conmutación

$$[a^\dagger, a] = 1$$

la representación coherente se basa en buscar una representación semi-clásica del sistema por medio de una adecuada combinación lineal de los $\{|\varphi_n>\}$, para los estados bosónicos esta resulta ser

$$|z >= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}|\varphi_n >$$

donde z es un número complejo y por ende es un índide continuo
notando el hecho de que

$$|\varphi_n >= \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|\varphi_0 >$$

implica

$$|z >= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(za^\dagger)^n}{n!}|0 >= e^{za^\dagger}|0 >$$

donde hemos usado $|\varphi_0 >= |0 >$ para el estado de mínima energía[12].

[12] también conocido como estado del vacío.

siguen las siguientes propiedades

$$
\begin{aligned}
< z| &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} < \varphi_n| \\
< z'|z > &= e^{\bar{z}' z} \\
a|z > &= z|z > \\
< z|a^\dagger &= < z|\bar{z} \\
a^\dagger|z > &= \frac{\partial}{\partial z}|z >
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{d\bar{z}dz}{2\pi} e^{-\bar{z}z}|z >< z| &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{d\rho d\theta}{2\pi} \left|\frac{\partial(z,\bar{z})}{\partial(\rho,\theta)}\right| e^{-\rho^2} \sum_{n,m} \frac{\rho^{n+m} e^{i(n-m)\theta}}{\sqrt{n!\,m!}} \,|\varphi_n >< \varphi_m| \\
&= \sum_{n,m} \int_0^\infty \frac{d\rho}{2\pi}\, 2\rho\, e^{-\rho^2} \Big(\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{i(n-m)\theta} \Big) \frac{\rho^{n+m}}{\sqrt{n!\,m!}} \,|\varphi_n >< \varphi_m| \\
&= \sum_{n,m} \int_0^\infty \frac{d\rho}{2\pi}\, 2\rho\, e^{-\rho^2} (2\pi\, \delta_{n,m}) \frac{\rho^{n+m}}{\sqrt{n!\,m!}} \,|\varphi_n >< \varphi_m| \\
&= \sum_{n} \Big(\int_0^\infty d\rho\, 2\rho\, e^{-\rho^2} \rho^{2n} \Big) \frac{1}{n!} \,|\varphi_n >< \varphi_n| \\
&= \sum_n \Gamma(n+1) \frac{1}{n!} \,|\varphi_n >< \varphi_n| \\
&= \sum_n |\varphi_n >< \varphi_n| = 1
\end{aligned}
$$

$$
\rightarrow \int \frac{d\bar{z}dz}{2\pi} e^{-\bar{z}z}|z >< z| \quad = \quad 1
$$

para la relación de completitud.

Para la representación coherente de estados fermiónicos $|\psi>$, todo es análogo con la diferencia de que en vez de usar la variable compleja z usamos la variable de Grassmann ψ, de esta forma

$$
\begin{aligned}
|\psi> &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^n}{\sqrt{n!}} |\varphi_n> \\
|\psi> &= |\varphi_0> + \psi\,|\varphi_1> \\
|\psi> &= |0> + \psi\,|1>
\end{aligned}
$$

debido a que $\psi^2, \psi^3, \ldots etc = 0$
para fermiones se definen los operadores anticonmutantes de creación y aniquilación $\{\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}\}$

$$
\begin{aligned}
\hat{\psi}\,|0> &= 0 \\
\hat{\psi}\,|1> &= |0> \\
\hat{\psi}^\dagger\,|0> &= |1> \\
\hat{\psi}^\dagger\,|1> &= 0
\end{aligned}
$$

que cumplen con la siguiente relación de anticonmutación

$$\{\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}\} = 1$$

$$\hat{\psi}^2 = (\hat{\psi}^\dagger)^2 = 0$$

siguen las siguientes propiedades

$$
\begin{aligned}
|\psi> &= e^{\psi\hat{\psi}^\dagger}\,|0> \\
<\psi| &= <0|\,e^{\hat{\psi}\bar{\psi}} \\
<\psi'|\psi> &= e^{\bar{\psi}'\psi} \\
\hat{\psi}|\psi> &= \psi|\psi>
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
< \psi|\hat{\psi}^\dagger &= < \psi|\bar{\psi} \\
\hat{\psi}^\dagger|\psi > &= \frac{\partial}{\partial \psi}|\psi >
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int d\bar{\psi}d\psi\, e^{-\bar{\psi}\psi}|\psi >< \psi| &= \int d\bar{\psi}d\psi\,(1-\bar{\psi}\psi)|\psi >< \psi| \\
&= \int d\bar{\psi}d\psi\,(1-\bar{\psi}\psi)(|0 > +\psi|1 >)(< 0| + < 1|\bar{\psi}) \\
&= \int d\bar{\psi}d\psi\,(1-\bar{\psi}\psi)(|0 >< 0| + |0 >< 1|\bar{\psi} + \psi|1 >< 0| + \psi\bar{\psi}|1 >< 1|) \\
&= \int d\bar{\psi}d\psi\,(\psi\bar{\psi}|1 >< 1| - \bar{\psi}\psi|0 >< 0|) \\
&= |0 >< 0| + |1 >< 1| = 1
\end{aligned}
$$

$$
\rightarrow \int d\bar{\psi}d\psi\, e^{-\bar{\psi}\psi}|\psi >< \psi| = 1
$$

para la relación de completitud.

E. Detalles del Cálculo de $\widetilde{S}$ para MSV1 y MV2

Para MSV1

$$\begin{aligned}
\widetilde{S} &= < G|Q|G > \\
&= < G| \int (\prod_{l=1}^{N} dxd\bar{\psi}_l d\psi_l) e^{-\bar{\psi}_i \psi_i} |\, \vec{x}, \vec{\psi} >< \vec{x}, \vec{\psi}|Q|G > \\
&= \int (\prod_{l=1}^{N} dxd\bar{\psi}_l d\psi_l) e^{-\bar{\psi}_i \psi_i} < G|\, \vec{x}, \vec{\psi} >< \vec{x}, \vec{\psi}|Q|G >
\end{aligned}$$

a la medida de integración la denotaremos por $[d]$

$$\begin{aligned}
&= \int [d] e^{-\bar{\psi}_i \psi_i} [\overline{G}_0(r) + \overline{G}_1(r)\overline{\chi}][\psi_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\delta S}{\delta x_i}\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_i}][G_0(r) + G_1(r)\chi] \\
&= \int [d] e^{-\bar{\psi}_i \psi_i} [\overline{G}_0(r) + \overline{G}_1(r)\overline{\chi}][\psi_i \frac{\partial(\, G_0(r) + G_1(r)\chi\,)}{\partial x_i} - \frac{\delta S}{\delta x_i}\frac{\partial(\, G_0(r) + G_1(r)\chi\,)}{\partial \bar{\psi}_i}]
\end{aligned}$$

para evitar confusión usamos distintos índices para las diferentes sumas

$$\begin{aligned}
&= \int [d] e^{-\bar{\psi}_p \psi_p} [\overline{G}_0(r) + \overline{G}_1(r)\overline{\chi}] \\
&\quad [\psi_i \frac{\partial G_0(r)}{\partial x_i} + \psi_i \frac{\partial G_1(r)}{\partial x_i}\chi + \psi_i G_1 \frac{\partial(x_j \bar{\psi}_j)}{\partial x_i} - \frac{\delta S}{\delta x_i}\frac{\partial(\, G_1(r) x_j \bar{\psi}_j)}{\partial \bar{\psi}_i}] \\
&= \int [d] e^{-\bar{\psi}_p \psi_p} [\overline{G}_0(r) + \overline{G}_1(r)\overline{\chi}] \\
&\quad [\psi_i \frac{\partial G_0(r)}{\partial x_i} + \psi_i \frac{\partial G_1(r)}{\partial x_i}\chi + \delta_{ij}\psi_i G_1 \bar{\psi}_j - \delta_{ij}\frac{\delta S}{\delta x_i} G_1 x_j] \\
&= \int [d] e^{-\bar{\psi}_p \psi_p} [\overline{G}_0(r) + \overline{G}_1(r) x_j \psi_j] \\
&\quad [\psi_i \frac{\partial G_0(r)}{\partial x_i} + \psi_i \frac{\partial G_1(r)}{\partial x_i} x_k \bar{\psi}_k + \psi_i G_1 \bar{\psi}_i - \frac{\delta S}{\delta x_i} G_1 x_i] \\
&= \int [d] e^{-\bar{\psi}_p \psi_p} [\overline{G}_0(r)\psi_i \frac{\partial G_0(r)}{\partial x_i} + \overline{G}_0(r)\psi_i \frac{\partial G_1(r)}{\partial x_i} x_k \bar{\psi}_k + \overline{G}_0(r)\psi_i G_1 \bar{\psi}_i
\end{aligned}$$

$$-\overline{G}_0(r)\frac{\delta S}{\delta x_i}G_1 x_i + \overline{G}_1(r)x_j\psi_j\psi_i\frac{\partial G_0(r)}{\partial x_i} + \overline{G}_1(r)x_j\psi_j\psi_i\frac{\partial G_1(r)}{\partial x_i}x_k\bar{\psi}_k$$

$$+\overline{G}_1(r)x_j\psi_j\psi_i G_1\bar{\psi}_i - \overline{G}_1(r)x_j\psi_j\frac{\delta S}{\delta x_i}G_1 x_i]$$

al llevar a cabo la integrales gaussianas sobre las variables de Grassmann resulta (apéndice B, integrales 6 y 7)

$$= \quad \int(\prod_{l=1}^{N}dx_l)[\overline{G}_0(r)\delta_{ik}\frac{\partial G_1(r)}{\partial x_i}x_k + \overline{G}_0(r)\delta_{ii}G_1 - \overline{G}_0(r)\frac{\delta S}{\delta x_i}G_1 x_i]$$

$$\widetilde{S} = \quad \int(\prod_{l=1}^{N}dx_l)[\overline{G}_0(r)\frac{\partial G_1(r)}{\partial x_i}x_i + \overline{G}_0(r)NG_1 - \overline{G}_0(r)\frac{\delta S}{\delta x_i}G_1 x_i]$$

Para MV2

$$\begin{aligned}\widetilde{S} &= \int (\prod_{l=1}^{N} dx_l dy_l d\bar{\psi}_l d\psi_l d\bar{\eta}_l d\eta_l) e^{-\bar{\psi}_i\psi_i} e^{-\bar{\eta}_i\eta_i} [\overline{G}_0 + \overline{G}_1\overline{\chi}_1 + \overline{G}_2\overline{\chi}_2 + \overline{G}_3\overline{\chi}_3 + \overline{G}_4\overline{\chi}_4 \\ & +\overline{G}_5\overline{\chi_1\chi}_2 + \overline{G}_6\overline{\chi_1\chi}_4 + \overline{G}_7\overline{\chi_2\chi}_3 + \overline{G}_8\overline{\chi_3\chi}_4][\psi_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_i\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\delta S}{\delta x_i}\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}_i} - \frac{\delta S}{\delta y_i}\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}_i}] \\ & [G_0 + G_1\chi_1 + G_2\chi_2 + G_3\chi_3 + G_4\chi_4 + G_5\chi_1\chi_2 + G_6\chi_1\chi_4 + G_7\chi_2\chi_3 + G_8\chi_3\chi_4]\end{aligned}$$

notamos el hecho de que

$$\begin{aligned}\overline{\chi_1\chi}_2 &= \overline{x_i\bar{\psi}_i x_j\bar{\eta}_j} = x_i x_j\overline{\bar{\psi}_i\bar{\eta}_j} \\ &= x_i x_j \eta_j\psi_i = x_j\eta_j\, x_i\psi_i \\ &= \overline{\chi}_2\overline{\chi}_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= \int [d] e^{-\bar{\psi}_i\psi_i} e^{-\bar{\eta}_i\eta_i} [\overline{G}_0 + \overline{G}_1\overline{\chi}_1 + \overline{G}_2\overline{\chi}_2 + \overline{G}_3\overline{\chi}_3 + \overline{G}_4\overline{\chi}_4 \\ +\overline{G}_5\overline{\chi}_2\overline{\chi}_1 + \overline{G}_6\overline{\chi}_4\overline{\chi}_1 + \overline{G}_7\overline{\chi}_3\overline{\chi}_2 + \overline{G}_8\overline{\chi}_4\overline{\chi}_3] \\ [\psi_i\frac{\partial G_0}{\partial x_i} + \psi_i\frac{\partial G_1}{\partial x_i}\chi_1 + \psi_i\bar{\psi}_i G_1 + \psi_i\frac{\partial G_2}{\partial x_i}\chi_2 + \psi_i\frac{\partial G_5}{\partial x_i}\chi_1\chi_2 \\ +\psi_i\bar{\psi}_i G_5\chi_2 + \psi_i\frac{\partial G_6}{\partial x_i}\chi_1\chi_4 + \psi_i\bar{\psi}_i G_6\chi_4 + \psi_i\frac{\partial G_7}{\partial x_i}\chi_2\chi_3 + \psi_i\frac{\partial G_3}{\partial x_i}\chi_3 \\ +\psi_i\frac{\partial G_4}{\partial x_i}\chi_4 + \psi_i\frac{\partial G_8}{\partial x_i}\chi_3\chi_4 + \eta_i\frac{\partial G_0}{\partial y_i} + \eta_i\frac{\partial G_1}{\partial y_i}\chi_1 + \eta_i\frac{\partial G_2}{\partial y_i}\chi_2 \\ +\eta_i\frac{\partial G_3}{\partial y_i}\chi_3 + \eta_i\frac{\partial G_7}{\partial y_i}\chi_2\chi_3 + \eta_i\frac{\partial G_8}{\partial y_i}\chi 3\chi_4 - G_8\chi_3\bar{\eta}_i\eta_i + \eta_i\frac{\partial G_4}{\partial y_i}\chi_4 \\ +\bar{\eta}_i\eta_i G_4 + \eta_i\frac{\partial G_5}{\partial y_i}\chi_1\chi_2 + \eta_i\frac{\partial G_6}{\partial y_i}\chi_1\chi_4 - G_6\chi_1\bar{\eta}_i\eta_i \\ -N\frac{\partial f}{\partial x_i}(\, G_1 x_i + G_3 y_i + G_5 x_i\chi_2 + G_6 x_i\chi_4 - G_7\chi_2 y_i + G_8 y_i\chi_4) \\ -N\frac{\partial f}{\partial y_i}(\, G_2 x_i + G_4 y_i - G_5\chi_1 x_i - G_6\chi_1 y_i + G_7 x_i\chi_3 - G_8\chi_3 y_i)]\end{aligned}$$

después de un cuidadoso análisis término a término, los únicos términos que no resultan trivialmente cero al integrar sobre las variables de Grassmann son

$$\overline{G}_0[\psi_i \frac{\partial G_1}{\partial x_i} x_j \bar{\psi}_j + \bar{\psi}_i \psi_i G_1 + \psi_i \frac{\partial G_3}{\partial x_i} y_j \bar{\psi}_j + \eta_i \frac{\partial G_2}{\partial y_i} x_j \bar{\eta}_j + \eta_i \frac{\partial G_4}{\partial y_i} y_j \bar{\eta}_j$$

$$+\eta_i \bar{\eta}_i G_4 - N \frac{\partial f}{\partial x_i}(\, G_1 x_i + G_3 y_i) - N \frac{\partial f}{\partial y_i}(\, G_2 x_i + G_4 y_i)]$$

$$+(\overline{G}_1 x_p \psi_p + \overline{G}_3 y_p \psi_p)[\eta_i \frac{\partial G_7}{\partial y_i} x_j \bar{\eta}_j y_k \bar{\psi}_k + \eta_i \frac{\partial G_8}{\partial y_i} y_j \bar{\psi}_j y_k \bar{\eta}_k$$

$$-G_8 y_i \bar{\psi}_i \bar{\eta}_j \eta_j + \eta_i \frac{\partial G_5}{\partial y_i} x_j \bar{\psi}_j x_k \bar{\eta}_k + \eta_i \frac{\partial G_6}{\partial y_i} x_j \bar{\psi}_j y_k \bar{\eta}_k - G_6 x_j \bar{\psi}_j \eta_i \bar{\eta}_i$$

$$-N \frac{\partial f}{\partial y_i}(\, -G_5 x_j \bar{\psi}_j x_i - G_6 x_j \bar{\psi}_j y_i + G_7 x_i y_j \bar{\psi}_j - G_8 y_j \bar{\psi}_j y_i)]$$

$$(\,\overline{G}_2 x_p \eta_p + \overline{G}_4 y_p \eta_p)[\psi_i \frac{\partial G_5}{\partial x_i} x_j \bar{\psi}_j x_k \bar{\eta}_k + \psi_i \bar{\psi}_i G_5 x_j \bar{\eta}_j$$

$$+\psi_i \frac{\partial G_6}{\partial x_i} x_j \bar{\psi}_j y_k \bar{\eta}_k + \psi_i \bar{\psi}_i G_6 y_j \bar{\eta}_j + \psi_i \frac{\partial G_7}{\partial x_i} x_j \bar{\eta}_j y_k \bar{\psi}_k + \psi_i \frac{\partial G_8}{\partial x_i} y_j \bar{\psi}_j y_k \bar{\eta}_k$$

$$-N \frac{\partial f}{\partial x_i}(\, G_5 x_i x_j \bar{\eta}_j + G_6 x_i y_j \bar{\eta}_j - G_7 x_j \bar{\eta}_j y_i + G_8 y_i y_j \bar{\eta}_j)]$$

al llevar a cabo la integración de las variables de Grassmann sobre estos términos, resulta (apéndice B, integrales 6 y 7)

$$= \int (\prod_{l=1}^{N} dx_l dy_l) \overline{G}_0 [\delta_{ij} \frac{\partial G_1}{\partial x_i} x_j + N G_1 + \delta_{ij} \frac{\partial G_3}{\partial x_i} y_j + \delta_{ij} \frac{\partial G_2}{\partial y_i} x_j + \delta_{ij} \frac{\partial G_4}{\partial y_i} y_j$$

$$+N G_4 - N \frac{\partial f}{\partial x_i}(\, G_1 x_i + G_3 y_i) - N \frac{\partial f}{\partial y_i}(\, G_2 x_i + G_4 y_i)]$$

$$+(\overline{G}_1 x_p + \overline{G}_3 y_p)[\delta_{ij} \delta_{pk} \frac{\partial G_7}{\partial y_i} x_j y_k + \delta_{ik} \delta_{pj} \frac{\partial G_8}{\partial y_i} y_j y_k$$

$$-G_8 y_i \delta_{pi} N + \delta_{ik} \delta_{pj} \frac{\partial G_5}{\partial y_i} x_j x_k + \delta_{ik} \delta_{pj} \frac{\partial G_6}{\partial y_i} x_j y_k - G_6 x_j \delta_{pj} N$$

$$-N \frac{\partial f}{\partial y_i}(\, -G_5 x_j \delta_{pj} x_i - G_6 x_j \delta_{pj} y_i + G_7 x_i y_j \delta_{pj} - G_8 y_j \delta_{pj} y_i)]$$

$$+(\,\overline{G}_2 x_p + \overline{G}_4 y_p)[\delta_{ij} \delta_{pk} \frac{\partial G_5}{\partial x_i} x_j x_k + N G_5 x_j \delta_{pj}$$

$$+\delta_{ij} \delta_{pk} \frac{\partial G_6}{\partial x_i} x_j y_k + N G_6 y_j \delta_{pj} + \delta_{ik} \delta_{pj} \frac{\partial G_7}{\partial x_i} x_j y_k + \delta_{ij} \delta_{pk} \frac{\partial G_8}{\partial x_i} y_j y_k$$

$$-N\frac{\partial f}{\partial x_i}(\,G_5x_ix_j\delta_{pj}+G_6x_iy_j\delta_{pj}-G_7x_j\delta_{pj}y_i+G_8y_iy_j\delta_{pj})]$$

es decir,

$$=\int(\prod_{l=1}^{N}dx_ldy_l)\overline{G}_0[\frac{\partial G_1}{\partial x_i}x_i+NG_1+\frac{\partial G_3}{\partial x_i}y_i+\frac{\partial G_2}{\partial y_i}x_i+\frac{\partial G_4}{\partial y_i}y_i$$

$$+NG_4-N\frac{\partial f}{\partial x_i}(\,G_1x_i+G_3y_i)-N\frac{\partial f}{\partial y_i}(\,G_2x_i+G_4y_i)]$$

$$+(\overline{G}_1x_p+\overline{G}_3y_p)[\frac{\partial G_7}{\partial y_i}x_iy_p+\frac{\partial G_8}{\partial y_i}y_py_i$$

$$-G_8y_pN+\frac{\partial G_5}{\partial y_i}x_px_i+\frac{\partial G_6}{\partial y_i}x_py_i-G_6x_pN$$

$$-N\frac{\partial f}{\partial y_i}(\,-G_5x_px_i-G_6x_py_i+G_7x_iy_p-G_8y_py_i)]$$

$$+(\,\overline{G}_2x_p+\overline{G}_4y_p)[\frac{\partial G_5}{\partial x_i}x_ix_p+NG_5x_p$$

$$+\frac{\partial G_6}{\partial x_i}x_iy_p+NG_6y_p+\frac{\partial G_7}{\partial x_i}x_py_i+\frac{\partial G_8}{\partial x_i}y_iy_p$$

$$-N\frac{\partial f}{\partial x_i}(\,G_5x_ix_p+G_6x_iy_p-G_7x_py_i+G_8y_iy_p)]$$