Teorías de Gauge

Leonardo Balart Vergara
Facultad de Física, P. Universidad Católica de Chile,
Casilla 306, Santiago 22, Chile.

Resumen

En este trabajo estudiaremos las propiedades algebraicas de las teorías de gauge. Haremos una revisión de las transformaciones de gauge globales y locales, para grupos de transformaciones abelianos y no abelianos. También revisaremos el concepto de rompimiento espontáneo de la simetría para las invariancias global y local, y en cada caso vamos a considerar el grupo de transformaciones abeliano y el no abeliano. Luego estudiaremos el concepto de supernúmero y algunas de sus propiedades, las cuales utilizaremos en el desarrollo de los dos últimos capítulos. Veremos como dado un operador diferencial Δ de segundo orden que cumple $\Delta^2 = 0$ nos conduce a obtener un antibracket y así poder definir una ecuación maestra invariante bajo cierta transformación, en la cual identificaremos un campo de fuerza y un campo vectorial fotónico, para mostrar como se conecta con el caso de transformadas de gauge locales para grupos no abelianos, es decir transformaciones de Yang-Mills. Por último definiremos un operador diferencial Δ_{NA} de tercer orden, que cumpla $\Delta_{NA}^2 = 0$, el cual introducirá un nuevo elemento que llamaremos el triantibracket, y estudiaremos las transformaciones de gauge generadas por este operador de tercer orden .

Capítulo 1

Invarianza de gauge

En física de partículas el concepto de simetría, es decir la invariabilidad de algo bajo una operación, es muy importante por el papel protagónico que juega en la descripción de las cuatro fuerzas fundamentales (de gravedad, electromagnética, débil, y fuerte).

La simetría puede ser de dos tipos: simetría espacio temporal o simetría interna. La primera es descrita por grupos tales como el grupo de Lorentz y el grupo de Poincaré. Mientras que la segunda es descrita por grupos de simetría interna, por ejemplo los grupos unitarios $U(1)$ y $SU(2)$, los cuales estudiaremos en el presente capítulo. Un grupo de transformaciones puede ser global o local. Una transformación de simetría global es idéntica para todos los puntos del espacio tiempo. Por su parte una transformación de simetría local es distinta en cada punto del espacio tiempo, depende de las coordenadas de este punto.

Agreguemos que la dinámica de un sistema físico, que en nuestro estudio son las interacciones entre campos, puede ser representada en el formalismo lagrangiano. De este modo una teoría física será invariante cuando el correspondiente lagrangiano sea invariante bajo las transformaciones de algún grupo.

En este capítulo (ver referencias [**?**], [**?**] y [**?**]) estudiaremos lagrangianos invariantes bajo transformaciones de simetría (o de gauge) globales para los grupos abeliano $U(1)$ y no abeliano $SU(2)$. Luego estudiaremos lagrangianos invariantes locales, también bajo grupos de transformaciones abeliano y no abeliano, y veremos que en este caso será necesario introducir nuevos campos: los campos de gauge.

A modo de entender los conceptos mencionados, comenzaremos por mostrar la invarianza de gauge en las ecuaciones de Maxwell (ver referencia [**?**]).

1.1 Invarianza de Gauge de E y B.

Las ecuaciones de Maxwell son las siguientes:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1.4}$$

donde $\mathbf{D}$ es el desplazamiento eléctrico ($\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, ϵ es la permitividad), $\mathbf{H}$ es la intensidad magnética ($\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, μ es la permeabilidad), ρ es la densidad volumétrica de carga, $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente, c es la velocidad de la luz, $\mathbf{E}$ el campo eléctrico y $\mathbf{B}$ el campo magnético.

De (**??**) vemos que podemos definir $\mathbf{B}$ en términos de un potencial:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{1.5}$$

en esta ecuación podemos agregar al vector potencial el gradiente de alguna función escalar Λ

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \tag{1.6}$$

De este modo $\mathbf{B}$ no cambia por esta transformación del vector potencial.

De las ecuaciones (**??**) y (**??**) obtenemos:

$$\nabla\times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{1.7}$$

por lo tanto la cantidad del paréntesis se puede expresar como el gradiente de alguna función escalar, un potencial escalar Φ:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi \quad \text{o} \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{1.8}$$

Con objeto de que el campo eléctrico tampoco varíe con la transformación (**??**), de la ecuación (**??**) notamos que entonces el potencial escalar debe transformarse simultáneamente del siguiente modo:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} \tag{1.9}$$

La transformación (**??**) y (**??**) es llamada transformación de gauge y la invarianza de los campos bajo tal transformación es llamada invarianza de gauge.

1.2 Lagrangianos.

En el formalismo lagrangiano de las teorías de campos el objeto básico es la densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ como función de los campos $\phi_i(x)$ y sus gradientes $\partial_\mu\phi_i(x)$:

$$\mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu\phi_i(x))$$

donde

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^o}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

Se llama acción, S, a la integral cuadridimensional sobre la densidad lagrangiana:

$$L = \int d^3x\, \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \tag{1.10}$$

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L} = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, L \tag{1.11}$$

Si minimizamos la acción:

$$\begin{aligned} \delta S = 0 \quad &= \quad \int d^4x \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} \delta\phi_i + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} \delta(\partial_\mu \phi_i) \right) \\ &= \quad \int d^4x \left[\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} \right) \delta\phi_i + \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} \delta\phi_i \right) \right] \end{aligned} \tag{1.12}$$

En esta última integral el segundo término es cero, porque estamos integrando en todo el espacio. Por lo tanto el primer témino será igual a cero, y obtenemos las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} = \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} \tag{1.13}$$

1.3 Transformación de Gauge Global.Grupo Abeliano.

Sean los campos ϕ_i con carga q_i, definimos el grupo de transformaciones sobre los campos por:

$$\phi_i(x) \to \phi_i^{'}(x) = e^{-iq_i\theta} \phi_i(x) \tag{1.14}$$

Este es el grupo de transformaciones unitarias en una dimensión, $U(1)$, con θ independiente de x. Una transformación parecida a ésta es llamada transformación de gauge global o de primer tipo. Además:

$$\partial_\mu \phi_i(x) \to \partial_\mu \phi_i^{'}(x) = e^{-iq_i\theta} \partial_\mu \phi_i(x) \tag{1.15}$$

La condición de la invarianza de $\mathcal{L}$ la podemos expresar en la siguiente relación:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} \delta\phi_i + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} \delta(\partial_\mu \phi_i) = 0 \tag{1.16}$$

Si θ es infinitesimal:

$$\phi_i^{'} = [1 - iq_i\theta + \mathcal{O}(\theta^2)]\phi_i$$

y por lo tanto

$$\delta\phi_i = \phi_i^{'} - \phi_i = -iq_i\theta\phi_i \tag{1.17}$$

Ahora, usando (**??**) y (**??**):

$$\delta \mathcal{L} = 0 = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} \right] (-iq_i\theta\phi_i) + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} (-iq_i\theta) \partial_\mu \phi_i \tag{1.18}$$

Y obtenemos:

$$\delta\mathcal{L} = 0 = -i\theta\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)}q_i\phi_i\right] \tag{1.19}$$

Si definimos J^μ, la corriente, como:

$$J^\mu = i\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)}q_i\phi_i$$

De la relación (**??**) notamos que se conserva la corriente J^μ.

Generalicemos lo anterior (para grupos abelianos y no abelianos) para una variación cualquiera del campo: $\delta\phi_i$.

De las ecuaciones (**??**) y (**??**) se obtiene:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} = 0 &= \partial_\mu\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)}\right]\delta\phi_i + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)}\delta(\partial_\mu\phi_i)\\ &= \partial_\mu\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)}\delta\phi_i\right] \end{aligned}\tag{1.20}$$

Si ahora llamamos J^μ a la expresión que está encerrada en este último paréntesis cuadrado, tendremos:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{1.21}$$

es decir

$$\frac{\partial J^o}{\partial t} + \partial_i J^i = 0 \qquad \text{o} \qquad -\frac{\partial J^o}{\partial t} = \nabla\cdot J \tag{1.22}$$

Si tomamos esta última relación e integramos sobre todo el espacio U:

$$-\int_U \frac{\partial J^o}{\partial t}dv = \int_U \nabla\cdot\mathbf{J}dv \tag{1.23}$$

la última integral es:

$$\int_U \nabla\cdot Jdv = \oint_{S(U)}\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}da = 0 \tag{1.24}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_U J^o dv\right) = 0 \tag{1.25}$$

De aquí obtenemos la conservación de la cantidad $\int_U J^o dv$. Para el caso en que nuestra variación sea $\delta\phi_i = -iq_i\theta\phi_i$, tendremos que $J^o = \rho(\mathbf{x})$,donde ρ es la densidad volumétrica de carga eléctrica. Por lo tanto de la transformación (**??**) sobre los campos, la cual deja invariante a $\mathcal{L}$, resulta la conservación de J^μ. En general si $\mathcal{L}$ es invariante bajo un grupo de transformaciones, ahí tenemos una cantidad física conservada (teorema de Noether, ver referencia [**?**]).

1.4 Transformación de Gauge Global.Grupo No Abeliano.

Consideremos el grupo más simple no abeliano: el $SU(2)$. Definimos la transformación de gauge por:

$$\phi \to \phi^{'} = e^{-i\mathbf{L}\cdot\theta}\phi \qquad (1.26)$$

donde ϕ es un vector columna y $\mathbf{L}$ es una representación de matriz $SU(2)$. Las componentes de esta matriz satisfacen la regla:

$$[L^i, L^j] = i\epsilon^{ijk}L^k$$

donde los ϵ^{ijk} son las constantes de estructura del grupo. Para θ infinitesimal:

$$\phi^{'} = [1 - i\mathbf{L}\cdot\theta]\phi$$

Por lo tanto

$$\delta\phi = -i(\mathbf{L}\cdot\theta)\phi \qquad (1.27)$$

O bien, usamos la representación adjunta, es decir expresamos las constantes de estructura como elementos de matriz de $\mathbf{L}$: $L^i_{jk} = -i\epsilon^{ijk}$

$$\phi_i^{'} = [\delta_{ik} - i(L^j\theta^j)_{ik}]\phi_k = \delta_{ik}\phi_k - iL^j_{ik}\theta^j\phi_k = \phi_i - \epsilon^{jik}\theta^j\phi_k$$

Por lo tanto también

$$\delta\phi = -\epsilon^{jik}\theta^j\phi_k = \epsilon^{ijk}\theta^j\phi_k \qquad (1.28)$$

1.5 Transformación de Gauge Local.Grupo Abeliano.

La transformación de gauge puede diferir de punto en punto, es decir θ es una función del espacio y del tiempo. Esta transformación de gauge es local o de segundo tipo. Explícitamente los campos transforman como:

$$\phi_i(x) \to \phi_i^{'}(x) = e^{-iq_i\theta(x)}\phi_i(x) \qquad (1.29)$$

Si $\theta(x)$ es una función infinitesimal se tiene que:

$$\delta\phi_i(x) = -iq_i\theta(x)\phi_i(x) \qquad (1.30)$$

Y para el gradiente del campo obtendremos:

$$\partial_\mu\phi_i(x) \to \partial_\mu\phi_i^{'}(x) = e^{-iq_i\theta(x)}\partial_\mu\phi_i(x) - iq[\partial_\mu\theta(x)]e^{-iq_i\theta(x)}\phi_i(x) \qquad (1.31)$$

Luego la variación del lagrangiano es:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)}\delta(\partial_\mu\phi_i) \\
&= \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i}(-iq_i)\phi_i + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)}(-iq_i)\partial_\mu\phi_i\right]\theta(x) + \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)}(-iq_i)\phi_i\right]\partial_\mu\theta(x) \quad (1.32)
\end{aligned}$$

La suma del primer paréntesis cuadrado es cero como ya vimos, pero el segundo paréntesis cuadrado es distinto de cero. Luego para que el lagrangiano sea invariante, introducimos el campo fotónico A_μ que permite al gradiente del campo $\partial_\mu\phi_i$, aparecer en $\mathcal{L}$ en la combinación $(\partial_\mu - ieq_iA_\mu)\phi_i$. De este modo se obtiene:

$$(\partial_\mu - ieq_iA'_\mu)\phi'_i(x) = e^{-iq_i\theta(x)}(\partial_\mu - ieq_iA_\mu)\phi_i(x) \quad (1.33)$$

Si aquí reemplazamos (??) y (??) encontraremos que:

$$A'_\mu(x) = -\frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) + A_\mu(x) \quad (1.34)$$

Es decir:

$$\delta A_\mu(x) = -\frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) \quad (1.35)$$

Si $\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu\phi_i, A_\mu, \partial_\mu A_\nu)$, la condición de invarianza será escrita como:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= 0 = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)}\delta(\partial_\mu\phi_i) + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\mu}\delta A_\mu + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)}\delta(\partial_\mu A_\nu) \\
&= \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i}(-iq_i)\phi_i + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)}(-iq_i)\partial_\mu\phi_i\right]\theta(x) \\
&+ \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)}(-iq_i)\phi_i + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\mu}\left(-\frac{1}{e}\right)\right]\partial_\mu\theta(x) + \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\nu A_\mu}\left(-\frac{1}{e}\right)\right]\partial_\nu\partial_\mu\theta(x) = 0 \quad (1.36)
\end{aligned}$$

Notemos que cada uno de estos paréntesis cuadrados tiene que ser igual a cero por si solo. De este modo vemos en el segundo paréntesis por qué $\partial_\mu\phi_i$ tiene que aparecer en $(\partial_\mu - ieq_iA_\mu)\phi_i$.

Del tercer paréntesis cuadrado se obtiene:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\nu A_\mu}\partial_\nu\partial_\mu\theta(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\nu A_\mu} + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu A_\nu}\right]\partial_\nu\partial_\mu\theta(x) = 0$$

Es decir:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\nu A_\mu} + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu A_\nu} = 0 \quad (1.37)$$

La solución de esta ecuación es:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(F_{\mu\nu}) \quad (1.38)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.39)$$

y se tiene:

$$\delta F_{\mu\nu} = 0 \tag{1.40}$$

Por lo que el gradiente de A_μ puede entrar en el lagrangiano dentro de esta combinación. Porque el lagrangiano es un escalar de Lorentz, $F_{\mu\nu}$ entra de manera cuadrática.

En las ecuaciones (**??**) y (**??**) teníamos:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{1.41}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{1.42}$$

Además

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^o}, \nabla\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) \tag{1.43}$$

$$A_\mu = (A^o, -\mathbf{A}) = (\Phi, -\mathbf{A}) \tag{1.44}$$

Luego las componentes de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son:

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \partial_o A_1 - \partial_1 A_o \\
E_y &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \partial_o A_2 - \partial_2 A_o \\
E_z &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \partial_o A_3 - \partial_3 A_o \\
B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\partial_2 A_3 + \partial_3 A_2 \\
B_y &= -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} = \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1 \\
B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = -\partial_1 A_2 + \partial_2 A_1
\end{aligned}$$

Entonces (**??**) nos dice que las componentes de los campos eléctrico y magnético son invariantes de gauge bajo la transformación (**??**) (notemos que ésta es equivalente a la transformación de gauge (**??**) y (**??**)).

1.6 Transformación de Gauge Local. Grupo No Abeliano. Yang-Mills.

Sea el grupo que tiene generadores T_i que cumplen:

$$[T_i, T_j] = iC_{ijk}T_k \tag{1.45}$$

los C_{ijk} son las constantes de estructura de este grupo.

Nuestros campos transforman ahora por:

$$\phi(x) \rightarrow \phi^{'}(x) = e^{-i\mathbf{L}\cdot\theta(x)}\phi(x) \equiv U(\theta)\phi(x) \tag{1.46}$$

donde $\phi(x)$ es un vector columna y L^i es una matriz de representación de los generadores del grupo. Como el parámetro θ depende de x, para el gradiente tendremos que:

$$\partial_\mu\phi(x) \rightarrow \partial_\mu\phi^{'}(x) = U(\theta)\partial_\mu\phi(x) + [\partial_\mu U(\theta)]\phi(x) \tag{1.47}$$

De manera análoga al caso anterior introducimos una derivada covariante D_μ, de la cual sea parte $\partial_\mu\phi(x)$ (para que $\mathcal{L}$ sea invariante bajo estas transformaciones de gauge locales), y que transforme como:

$$D_\mu\phi(x) \rightarrow D^{'}_\mu\phi^{'}(x) = U(\theta)D_\mu\phi(x) \tag{1.48}$$

La definiremos como:

$$D_\mu\phi(x) = [\partial_\mu - ig\mathbf{L}\cdot\mathbf{A}_\mu(x)]\phi(x) \tag{1.49}$$

donde g es una constante arbitraria, $\mathbf{A}_\mu$ es un campo vectorial de gauge, y el número de campos A^j_μ (componentes del campo vectorial) es igual al número de generadores del grupo.

Ahora desarrollamos el lado izquierdo de la igualdad de (**??**):

$$\begin{aligned} D^{'}_\mu\phi^{'}(x) &= \partial_\mu\phi^{'} - igA^{'j}_\mu L^j\phi^{'} \\ &= [\partial_\mu U(\theta)]\phi(x) + U(\theta)\partial_\mu\phi(x) - ig\mathbf{A}^{'}_\mu\cdot\mathbf{L}U(\theta)\phi(x) \end{aligned} \tag{1.50}$$

Y en el lado derecho reemplazando (**??**):

$$U(\theta)D_\mu\phi(x) = U(\theta)\partial_\mu\phi - igU(\theta)\mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L}\phi(x) \tag{1.51}$$

Igualando (**??**) y (**??**):

$$-ig\mathbf{A}^{'}_\mu\cdot\mathbf{L}U(\theta)\phi = -igU(\theta)\mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L}\phi - [\partial_\mu U(\theta)]\phi$$

Ya que esta relación debe mantenerse para todo ϕ, se tiene que:

$$\mathbf{A}^{'}_\mu\cdot\mathbf{L}U(\theta) = U(\theta)\mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L} - \frac{i}{g}[\partial_\mu U(\theta)] \tag{1.52}$$

Si hacemos el producto de $U^{-1}(\theta)$ por la derecha:

$$\mathbf{A}^{'}_\mu\cdot\mathbf{L} = U(\theta)[\mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L} - \frac{i}{g}U^{-1}(\theta)\partial_\mu U(\theta)]U^{-1}(\theta) \tag{1.53}$$

Para θ muy chico, la transformación es infinitesimal y tendremos:

$$U(\theta) = exp(-i\mathbf{L}\cdot\theta) \approx [1 - i\mathbf{L}\cdot\theta] \;\; \text{y} \;\; U^{-1}(\theta) \approx [1 + i\mathbf{L}\cdot\theta] \tag{1.54}$$

Reemplazando estas relaciones en (**??**):

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}\cdot\mathbf{A}_\mu^{'} &= [1 - i\mathbf{L}\cdot\theta]\mathbf{L}\cdot\mathbf{A}_\mu^{'}[1 + i\mathbf{L}\cdot\theta] - \frac{i}{g}\partial_\mu[-i\mathbf{L}\cdot\theta][1 + i\mathbf{L}\cdot\theta] \\
&= \mathbf{L}\cdot\mathbf{A}_\mu^{'} - i(\mathbf{L}\cdot\theta)(\mathbf{L}\cdot\mathbf{A}_\mu^{'}) + i(\mathbf{L}\cdot\mathbf{A}_\mu^{'})(\mathbf{L}\cdot\theta) \\
&\quad +(\mathbf{L}\cdot\theta)(\mathbf{L}\cdot\mathbf{A}_\mu^{'})(\mathbf{L}\cdot\theta) - \frac{i}{g}\partial_\mu(\mathbf{L}\cdot\theta) \\
&\quad -\frac{i}{g}\partial_\mu(\mathbf{L}\cdot\theta)(\mathbf{L}\cdot\theta)
\end{aligned}$$

Si tomamos las componentes y no consideramos los términos de segundo orden en θ:

$$L^i A_\mu^{\prime i} = L^i A_\mu^i - i(L^i\theta^i)(L^j A_\mu^j) + i(L^j A_\mu^j)(L^i\theta^i) - \frac{i}{g}\partial_\mu(L^i\theta^i)$$

Es decir:

$$L^i\delta A_\mu^i = -\frac{i}{g}L^i\partial_\mu\theta^i + i\theta^i A_\mu^j(L^j L^i - L^i L^j) = -\frac{i}{g}L^i\partial_\mu\theta^i + i\theta^i A_\mu^j[L^j, L^i]$$

Notemos que θ^j es un parámetro, un número, y L^i un generador, no conmuta. Como $[L^j, L^i] = iC_{jik}L^k$

$$L^i\delta A_\mu^i = -\frac{i}{g}L^i\partial_\mu\theta^i - \theta^i A_\mu^j C_{jik}L^k$$

Esto es una sumatoria en los índices repetidos y C_{jik} es antisimétrico, por lo tanto:

$$L^i\delta A_\mu^i = -\frac{i}{g}L^i\partial_\mu\theta^i + C_{ijk}\theta^j A_\mu^k L^i$$

Ya que los L^i son linealmente independientes:

$$\delta A_\mu^i = -\frac{i}{g}\partial_\mu\theta^i + C_{ijk}\theta^j A_\mu^k \tag{1.55}$$

En analogía con el caso anterior, ecuación (**??**), deberíamos tener un tensor $F_{\mu\nu}$, aunque acá no tendrá la forma que tenía, puesto que:

$$\begin{aligned}
\delta[\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i] &= \partial_\mu\delta(A_\nu^i) - \partial_\nu\delta(A_\mu^i) \\
&= \partial_\mu[-\frac{i}{g}\partial_\nu\theta^i + C_{ijk}\theta^j A_\nu^k] - \partial_\nu[-\frac{i}{g}\partial_\mu\theta^i + C_{ijk}\theta^j A_\mu^k] \\
&= C_{ijk}\theta^j[\partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k] + C_{ijk}[(\partial_\mu\theta^j)A_\nu^k - (\partial_\nu\theta^j)A_\mu^k] \qquad (1.56)
\end{aligned}$$

Notemos que debemos agregar algo a $\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i$ para obtener la invarianza bajo transformaciones de Yang-Mills, ya que nos sobran los términos del segundo paréntesis cuadrado.

Calculemos

$$C_{ijk}\delta[A_\mu^j A_\nu^k] = C_{ijk}[(\delta A_\mu^j)A_\nu^k + (\delta A_\nu^k)A_\mu^j] \tag{1.57}$$

Reemplazando (**??**) en esta última relación:

$$\begin{aligned}
C_{ijk}\delta[A^j_\mu A^k_\nu] &= -\frac{C_{ijk}}{g}[(\partial_\mu\theta^j)A^k_\nu - (\partial_\nu\theta^j)A^k_\mu] + C_{ijk}C_{jlm}\theta^l A^m_\mu A^k_\nu \\
&\quad + C_{ijk}C_{klm}\theta^l A^m_\nu A^j_\mu
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Los dos últimos términos los podemos reescribir:

$$\begin{aligned}
&C_{ijk}C_{jlm}\theta^l A^m_\mu A^k_\nu + C_{ijk}C_{klm}\theta^l A^m_\nu A^j_\mu \\
&= C_{ikm}C_{klj}\theta^l A^j_\mu A^m_\nu + C_{ijk}C_{klm}\theta^l A^m_\nu A^j_\mu \\
&= [C_{imk}C_{kjl} - C_{ijk}C_{kml}]\theta^l A^j_\mu A^m_\nu
\end{aligned} \tag{1.59}$$

Utilizando la representación adjunta de (**??**), $(T^i)_{jk} = -iC_{ijk}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
C_{imk}C_{kjl} - C_{ijk}C_{kml} &= -(T^i)_{mk}(T^l)_{kj} + (T^l)_{mk}(T^i)_{kj} \\
&= -(T^iT^l)_{mj} + (T^lT^i)_{mj} \\
&= [T^l, T^i]_{mj} \\
&= iC_{lik}(T^k)_{mj} \\
&= C_{ilk}C_{kjm}
\end{aligned} \tag{1.60}$$

Por lo tanto

$$C_{ijk}\delta[A^j_\mu A^k_\nu] = -\frac{C_{ijk}}{g}[(\partial_\mu\theta^j)A^k_\nu - (\partial_\nu\theta^j)A^k_\mu] + C_{ilk}\theta^l C_{kjm}A^j_\mu A^m_\nu \tag{1.61}$$

Ahora multiplicamos por g y a cada lado de la igualdad le sumamos el lado correspondiente de la ecuación (**??**), obtenemos:

$$\delta[\partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + gC_{ijk}A^j_\mu A^k_\nu] = C_{ijk}\theta^j[\partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu A^k_\mu + gC_{klm}A^l_\mu A^m_\nu] \tag{1.62}$$

Luego definimos:

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + gC_{ijk}A^j_\mu A^k_\nu \tag{1.63}$$

Entonces:

$$\delta F^i_{\mu\nu} = C_{ijk}\theta^j F^k_{\mu\nu} \tag{1.64}$$

Por lo tanto en el lagrangiano debe aparecer la combinación $F^i_{\mu\nu}$ para asegurar la invarianza de gauge.

Capítulo 2

Rompimiento espontáneo de la simetría

Si el estado vacío o del mínimo de energía no es invariante bajo un grupo de transformaciones, mientras que el lagrangiano sí es invariante bajo el mismo grupo de transformaciones, tenemos un rompimiento espontáneo de la simetría (esto se puede dar sólo en un sistema con infinitos grados de libertad, ver referencia [**?**]).

Mostraremos en ejemplos que el rompimiento espontáneo de la simetría conduce a la aparición de campos escalares de masa cero conocidos como partículas goldstone (esto se conoce como el teorema de Goldstone).

Para el caso del rompimiento espontáneo de las simetrías globales $U(1)$ tendremos que del campo escalar complejo masivo, o de dos campos reales masivos, aparecerán un campo escalar masivo y un campo sin masa o partícula goldstone. Para $O(n)$, en vez de n campos masivos, tendremos $n-1$ campos sin masa y un campo masivo.

Cuando la simetría es local, para el caso abeliano $U(1)$, en lugar de un campo escalar complejo masivo (o campos escalares reales) y un campo fotónico sin masa, tendremos que el rompimiento espontáneo de la simetría $U(1)$ nos conducirá a un campo escalar masivo y un campo fotónico con masa. En el caso no abeliano $SU(2)$ el rompimiento espontáneo de la simetría nos llevará, de tres campos masivos escalares y 3 campos vectoriales sin masa, a un campo escalar masivo, dos campos vectoriales masivos y un campo vectorial sin masa. (Para este capítulo ver las referencias [**?**] y [**?**])

2.1 Invarianza Global. Grupo de Transformaciones Abeliano $U(1)$.

Consideremos un modelo descrito por el siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2 \tag{2.1}$$

donde $\phi(x)$ es un campo escalar complejo y $m^2 < 0$. Este Lagrangiano es invariante bajo el grupo de transformaciones $U(1)$:

$$\phi(x) \to e^{-i\theta}\phi(x) \tag{2.2}$$

El potencial del lagrangiano está expresado por

$$V = m^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2 \tag{2.3}$$

La condición del mínimo de energía queda expresada como:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = m^2\phi^* + 2\lambda(\phi^*)^2\phi = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = m^2\phi + 2\lambda\phi^*(\phi)^2 = 0 \tag{2.4}$$

De aquí obtenemos que el mínimo de energía ocurre sobre el círculo del plano complejo Reϕ-Imϕ:

$$(Re\phi)^2 + (Im\phi)^2 = \phi^*\phi = \frac{-m^2}{2\lambda} \quad o \quad |\phi_o| = \left(\frac{-m^2}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Es decir el sistema tiene un conjunto infinito de estados vacíos, cada uno de ellos correspondiente a un punto del círculo. El estado vacío es infinitamente degenerado.

Notemos que la transformación (**??**) lleva un estado vacío a algún otro estado vacío. De aquí es que el estado vacío no es invariante bajo esta transformación. Sin embargo el lagrangiano permanece invariante bajo estas transformaciones. Luego podemos afirmar que, en esta aproximación, el lagrangiano descrito por este sistema presenta un rompimiento espontáneo de la simetría $U(1)$.

Definamos un nuevo campo cuya parte real es ϕ_1 y la parte imaginaria es ϕ_2:

$$\frac{\phi_1}{\sqrt{2}} = Re\phi - \left(\frac{-m^2}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \frac{\phi_2}{\sqrt{2}} = Im\phi \tag{2.5}$$

Ahora reescribimos el lagrangiano en términos de ϕ_1 y ϕ_2:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 + m^2(\phi_1)^2 - \lambda\left(\frac{-m^2}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\phi_1(\phi_1^2+\phi_2^2) - \frac{1}{4}(\phi_1^2+\phi_2^2)^2 \tag{2.6}$$

Aquí ϕ_1 es el campo de una partícula con masa $-2m^2 > 0$, el campo ϕ_2 no tiene masa, puesto que este nuevo lagrangiano no contiene un término proporcional a ϕ_2^2. A ϕ_2 se le llamará bosón goldstone.

Notemos que los lagrangianos (**??**) y (**??**) son equivalentes, ambos describen la dinámica del mismo sistema.

En conclusión, el rompimiento espontáneo de la simetría $U(1)$ del lagrangiano (**??**) convierte al campo complejo $\phi(x)$ en un bosón goldstone y un campo escalar real de masa $-2m^2 > 0$.

En el caso en que el segundo término del lagrangiano (**??**) sea $+m^2\phi^*\phi$, tendremos un estado vacío no degenerado e invariante con valor cero, y en este caso no habrá rompimiento espontáneo de la simetría .

También podemos considerar un modelo de dos campos, φ_1 y φ_2, que tiene lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1\partial_\mu\varphi_1 + \partial_\mu\varphi_2\partial_\mu\varphi_2) - \frac{1}{2}m^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 \tag{2.7}$$

donde el potencial es:

$$V = \frac{1}{2}m^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{1}{4}\lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 \tag{2.8}$$

Este lagrangiano es invariante bajo el grupo de transformaciones O(2):

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^{'} \\ \varphi_2^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Es decir

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 \;\; \text{es invariante}$$

Lo mismo ocurre con los gradientes de los campos.

La condición del mínimo de energía se expresa como:

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi_1} = 0 \;\;,\;\; \frac{\partial V}{\partial\varphi_1} = 0 \tag{2.9}$$

Si $m^2 < 0$, el mínimo absoluto ocurre en el círculo del plano $\varphi_1 - \varphi_2$:

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \frac{-m^2}{\lambda}$$

Podemos definir los ejes de nuestro plano para obtener los mínimos de nuestros campos del siguiente modo:

$$< \varphi_1 >_o = \left(\frac{-m^2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad < \varphi_2 >_o = 0$$

Como antes definamos:

$$\phi_1 = \varphi_1 - < \varphi_1 >_o \tag{2.10}$$

$$\phi_2 = \varphi_2 \tag{2.11}$$

esto es análogo a (??), la equivalencia es $Re\phi \leftrightarrow \frac{\varphi_1}{\sqrt{2}}$, $Im\phi \leftrightarrow \frac{\varphi_2}{\sqrt{2}}$. por lo tanto si reemplazamos (??) y (??) en el lagrangiano (??) obtendremos el lagrangiano (??) y las conclusiones serán las mismas que al considerar un campo escalar complejo.

2.2 Invarianza Global. Grupo de Transformaciones No Abeliano.

Consideremos un lagrangiano con n campos ϕ_i reales :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi^i)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^i\phi^i - \frac{\lambda}{4}(\phi^i\phi^i)^2 \tag{2.12}$$

Este lagrangiano es invariante bajo el grupo ortogonal en n dimensiones, O(n). Explícitamente, $\sum_i \phi^i\phi^i$ queda invariante bajo transformaciones O(n).

Si $m^2 < 0$, el potencial tiene un anillo de mínimos en $(\phi^i\phi^i)^{\frac{1}{2}} = v = (\frac{-m^2}{\lambda})^{\frac{1}{2}}$

Este modelo también tiene un número infinito de vacíos.

Podemos construir el vacío como el siguiente vector columna:

$$< \phi >_o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

donde $< \phi_i >= 0$ si $i = 1, ..., n-1$ y $< \phi_n >= v$

Este nuevo vacío es invariante bajo el grupo que permite que $v_n = v$ sea invariante, esto es, el subgrupo $O(n-1)$. Tenemos por lo tanto un rompimiento espontáneo de la simetría $O(n)$.

Sean L_{ij} las $\frac{1}{2}n(n-1)$ matrices independientes que generan $O(n)$. Sean l_{ij} el subconjunto que genera $O(n-1)$ y $k_i[k_i = L_{ij}]$ el resto.

En vez de redefinir un campo $\eta = \phi_n - v$ y dejar igual las restantes componentes ϕ_i, introduciremos una parametrización de los n campos:

$$\phi = \exp(i\xi_i k_i/v) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v+\eta \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Como en general tenemos que $(L_{ij})_{kl} = -i[\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}]$, los elementos de la matriz k_i son:

$$(k_i)_{kl} = (L_{in})_{kl} = -i[\delta_{ik}\delta_{nl} - \delta_{il}\delta_{nk}]$$

Y por lo tanto k_i operando sobre el vector columna $v_i = v\delta_{in}$ es:

$$(k_i)_{jl}v_l = v(k_i)_{jl}\delta_{ln} = v(k_i)_{jn} = -iv\delta_{ij}$$

(Notemos que los k_i llevan un estado vacío a otro).

Así en el orden más bajo

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v+\eta \end{pmatrix} + \frac{i\xi_i}{v}k_i v_n$$

es decir:

$$\phi_i = \xi_i \ (i < n) \ \text{ y } \ \phi_n = v + \eta$$

Nuestro lagrangiano en términos de ξ_i y η es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu\eta)^2 + (\partial_\mu\xi_i)^2] - \frac{1}{2}m^2(v+\eta)^2 - \frac{1}{2}\lambda(v+\eta)^4 + \text{términos de orden más alto} \tag{2.15}$$

Los $n-1$ campos ξ_i no tienen masa y el campo η tiene masa $-2m^2 > 0$.

Enfaticemos que por cada generador roto k_i hay un bosón goldstone sin masa.

En el caso anterior teníamos el grupo de transformaciones $O(2)$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \approx 1 + \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso tenemos sólo un generador:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y además:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v \end{pmatrix}$$

Es decir, tenemos un generador roto y, por lo tanto, como ya vimos, un bosón Goldstone sin masa.

2.3 Invarianza Local. Caso Abeliano U(1).

Consideremos el siguiente lagrangiano invariante bajo transformaciones de gauge U(1) locales:

$$\mathcal{L} = [(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi] - m^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{2.16}$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Explícitamente, este lagrangiano es invariante bajo las transformaciones:

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi^{'} = e^{-i\theta(x)}\phi \\ \phi^* &\rightarrow \phi^{*'} = e^{-i\theta(x)}\phi^* \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu^{'} = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) \end{aligned} \tag{2.17}$$

En el caso en que $m^2 < 0$ tendremos que los valores del estado vacío estarán sobre un círculo, parecido al caso del lagrangiano (**??**). Esto implica un rompimiento espontáneo de la simetría U(1).

Notemos que el lagrangiano posee la misma simetría que el modelo (φ_1, φ_2). La correspondencia es $\frac{\varphi_1}{\sqrt{2}} \leftrightarrow Re\phi$ y $\frac{\varphi_2}{\sqrt{2}} \leftrightarrow Im\phi$. Y construíamos $\varphi_1 = v + \phi_1$, por lo que aquí podemos asumir que :

$$< \phi >_o = \frac{v}{\sqrt{2}} \tag{2.18}$$

donde $v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$. Y parametrizar ϕ exponencialmente introduciendo dos campos reales ξ y η:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{(i\xi/v)}(v+\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v+\eta+i\xi+\cdots] \tag{2.19}$$

Por lo tanto

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}[(v+\eta)+i\xi]$$

$$\phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}[(v+\eta)-i\xi]$$

Por la correspondencia vemos que esto es equivalente a:

$$\varphi_1 = v+\eta$$

$$\varphi_2 = \xi$$

De estas dos últimas igualdades se observa por qué elegimos (**??**) y parametrizamos como (**??**). Como antes el campo ξ está asociado al rompimiento espontáneo de la simetría U(1).

Escribiendo el lagrangiano (**??**) en términos de A_μ, ξ y η:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial_\mu\eta + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial_\mu\xi + \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A_\mu - evA_\mu\partial_\mu\xi \\ -m^2\eta^2 + \text{términos cúbicos y otros de orden más alto}\end{aligned} \tag{2.20}$$

Este lagrangiano es invariante bajo la transformación de gauge (**??**) en la que hemos reemplazado (**??**). Este lagrangiano no es diagonal debido al término $-evA_\mu\partial_\mu\xi$ el cual es el producto de dos diferentes campos. Para poder determinar el espectro de las masas diagonalizamos este lagrangiano. Por lo que construimos la función de gauge igual a $\xi(x)/v$. Entonces:

$$\phi \to \phi^{'} = \exp[-i\xi(x)/v]\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v+\eta) \tag{2.21}$$

$$A_\mu \to A_\mu^{'} = A_\mu - \frac{1}{ev}\partial_\mu\xi \tag{2.22}$$

Como el lagrangiano (**??**) es invariante bajo estas transformaciones tenemos que:

$$\mathcal{L} = [(\partial_\mu + ieA_\mu^{'})\phi^{*'}(\partial_\mu - ieA_\mu^{'})\phi^*] - m^2\phi^{*'}\phi^{'} - \lambda(\phi^{*'}\phi^{'})^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{'}F_{\mu\nu}^{'} \tag{2.23}$$

donde

$$F_{\mu\nu}^{'} = \partial_\mu A_\nu^{'} - \partial_\nu A_\mu^{'}$$

Reemplazando (**??**) en $\phi^{'}$ de este último lagrangiano y desarrollando se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{'}F_{\mu\nu}^{'} + \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial_\mu\eta + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial_\mu\xi + \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu^{'}A_\mu^{'} + \frac{1}{2}e^2A_\mu^{'2}\eta(2v+\eta) \\ -\frac{1}{2}\eta^2(3\lambda v^2+\mu^2) - \lambda v\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4\end{aligned} \tag{2.24}$$

No hay términos de acoplamiento entre los diferentes campos, por lo que el espectro de las masas se visualiza en los téminos cuadráticos. Hay un mesón escalar η con masa $3\lambda^2 v^2 + \mu^2$ y un mesón vectorial $A_\mu^{'}$ con masa ev. Enfatizemos que ξ ha desaparecido, ha sido "gaugeado lejos" por el campo vectorial. En (**??**) notamos que en realidad el campo ξ ha sido incorporado dentro del campo de gauge $A_\mu^{'}$. A esto lo llamaremos el mecanismo de Higgs.

A las partículas descritas por los campos escalares η se les llama bosones Higgs y a las descritas por $A_\mu^{'}$ mesones vectoriales.

2.4 Invarianza Local. Caso No Abeliano SU(2).

Consideremos el siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_i + g\epsilon^{ijk} A_\mu^j \phi_k)(\partial_\mu \phi_i + g\epsilon^{ij'k'} A_\mu^{j'} \phi_{k'}) - V(\phi_i \phi_i) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \tag{2.25}$$

Supongamos que V tiene un mínimo no cero, es decir un estado vacío degenerado. Podemos tomar el valor de expectación del vacío de la siguiente manera:

$$< \phi >_o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

El campo lo parametrizamos como antes:

$$\phi = \exp[\frac{i}{v}(\xi_1 L^1 + \xi_2 L^2)] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v+\eta \end{pmatrix} = < \phi >_o + \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \\ \eta \end{pmatrix} + \text{orden más alto} \tag{2.27}$$

donde L^i son los generadores de SU(2) y ξ_i los supuestos bosones goldstone asociados a los generadores rotos. L^3 deja al vacío invariante, es el generador no roto.

Como el lagrangiano es invariante bajo transformadas SU(2) locales, podemos hacer la transformada de gauge considerando U(θ) (de la primera parte), en analogía al caso anterior, como $exp[-\frac{i}{v}(\xi_1 L^1 + \xi_2 L^2)]\phi$, se obtiene:

$$\phi^{'} = \exp[-\frac{i}{v}(\xi_1 L^1 + \xi_2 L^2)]\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v+\eta \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\cdot\mathbf{A}_\mu^{'} &= exp[-\frac{i}{v}(\xi_1 L^1 + \xi_2 L^2)]\mathbf{L}\cdot\mathbf{A} exp[\frac{i}{v}(\xi_1 L^1 + \xi_2 L^2)] \\ &-\frac{i}{g}\{\partial_\mu exp[-\frac{i}{v}(\xi_1 L^1 + \xi_2 L^2)]\} exp[\frac{i}{v}(\xi_1 L^1 + \xi_2 L^2)] \end{aligned} \tag{2.29}$$

Los campos ξ_1 y ξ_2 desaparecen completamente cuando escribimos el lagrangiano del siguiente modo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_i^{'} + g\epsilon^{ijk} A_\mu^{'j} \phi_k)(\partial_\mu \phi_i^{'} + g\epsilon^{ij'k'} A_\mu^{'j'} \phi_{k'}) - V(\phi_i^{'2}) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{'a} F_{\mu\nu}^{'a} \tag{2.30}$$

Los campos ξ_1 y ξ_2 han sido absorbidos por los campos de gauge. Reemplazando (**??**) en este último lagrangiano y desarrollando se obtiene:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \eta \partial_\mu \eta + \frac{1}{2} g^2 v^2 \epsilon^{ij3} \epsilon^{ij'3} A_\mu^{'j} A_\mu^{'j'} - V[(v+\eta)^2] - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{'a} F_{\mu\nu}^{'a} + \text{términos de orden más alto} \tag{2.31}$$

El término cuadrático en el campo vectorial de gauge es:

$$\frac{1}{2} g^2 v^2 [A_\mu^2 A_\mu^2 + A_\mu^1 A_\mu^1]$$

correspondientes a los generadores de simetría rota, es decir dos de los campos de gauge adquieren masa gv, y ya que la simetría L^3 sobrevive, A_μ^3 no tiene masa.

En resumen por cada generador de simetría rota hay un campo de gauge que adquiere masa.

Capítulo 3

Supernúmeros

En los desarrollos algebraicos que se hacen en los capítulos posteriores se utilizarán los conceptos de supernúmero, paridad de Grassman y derivadas derecha e izquierda. Por eso el presente capítulo está dedicado brevemente al concepto de supernúmero y a algunas de sus propiedades (ver referencia [?]).

3.1 Álgebra de Grassmann.

El álgebra generada por N elementos ς^a , $a = 1, \cdots, N$, los cuales anticonmutan:

$$\varsigma^a \varsigma^b + \varsigma^b \varsigma^a = 0 \ , \ (\varsigma^a)^2 = 0 \ , \text{ para todo a y b} \tag{3.1}$$

se denota Λ_N. Si $N \to \infty$ es llamada el álgebra de Grassmann y se denota como Λ_∞.

Definimos un producto de los generadores tal que, sea asociativo:

$$\varsigma^a(\varsigma^b\varsigma^c) = (\varsigma^a\varsigma^b)\varsigma^c$$

y sea distributivo:

$$\varsigma^a(\varsigma^b\varsigma^c + \varsigma^d) = \varsigma^a\varsigma^b\varsigma^c + \varsigma^a\varsigma^d$$

Bajo la adición como la multiplicación, los elementos de Λ_∞, llamados supernúmeros forman un espacio vectorial de dimensión infinita.

3.2 Particiones de los Supernúmeros.

Un supernúmero se puede expresar como:

$$z = z_B + z_S \tag{3.2}$$

donde z_B, llamado el cuerpo, es un número complejo, y

$$z_S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} c_{a_1 \cdots a_n} \varsigma^{a_n} \cdots \varsigma^{a_1}$$

es llamado el alma. Aquí el factor $c_{a_1 \cdots a_n}$ es complejo y completamente antisimétrico en sus índices.

Cada supernúmero con $z_B \neq 0$ tiene una única inversa dada por :

$$z^{-1} = z_B^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-z_B^{-1} z_S)^n$$

Otra partición importante de un supernúmero es en una parte par y otra parte impar:

$$z = u + v \tag{3.3}$$

donde la parte par es

$$u = z_B + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} c_{a_1 \cdots a_{2n}} \varsigma^{a_{2n}} \cdots \varsigma^{a_1}$$

y la parte impar es:

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} c_{a_1 \cdots a_{2n+1}} \varsigma^{a_{2n+1}} \cdots \varsigma^{a_1}$$

Los supernúmeros puramente impares anticonmutan entre ellos. Los supernúmeros puramente pares conmutan con cualquier supernúmero y forman un subalgebra de Λ_∞, la cual denotamos C_c. El conjunto de los supernúmeros puramente impares se denota C_a y no es un subalgebra, porque del producto de dos supernúmeros puramente impares obtenemos un supernúmero puramente par.

3.3 Paridad de Grassmann.

Definimos la paridad de Grassmann de un supernúmero,$\epsilon(z)$ o ϵ_z, como:

$$\epsilon(z) = \begin{cases} 0(\mathrm{mod}2) & \text{si z es par} \\ 1(\mathrm{mod}2) & \text{si z es impar} \end{cases} \tag{3.4}$$

Esto significa que:

$$zz\text{'} = (-1)^{\epsilon_z \epsilon_{z\text{'}}} z\text{'}z \tag{3.5}$$

donde z y z' son dos supernúmeros de paridad definida.

3.4 Derivadas Izquierda y Derecha.

Sea f un mapeo de C_a en Λ_∞. f será superanalítico en un punto v, si la imagen $f(v)$ en Λ_∞ sufre un desplazamiento el cual, para todo dv, toma la forma:

$$df(v) = dv \left[\frac{d^l}{dv} f(v) \right] = \left[\frac{d^r}{dv} f(v) \right] dv \tag{3.6}$$

Los coeficientes $\frac{d^l}{dv}f(v)$ y $\frac{d^r}{dv}f(v)$ son llamados, respectivamente, derivada izquierda y derecha de f con respecto a v

Un mapeo superanalítico f desde C_c a Λ_∞ se define similarmente:

$$df(u) = du\left[\frac{d^l}{du}f(u)\right] = \left[\frac{d^r}{du}f(u)\right]du \tag{3.7}$$

Como du es un número par:

$$\frac{d^l}{du}f(u) = \frac{d^r}{du}f(u)$$

Sin embargo, en el caso anterior como dv es impar, no siempre se cumplirá que:

$$\frac{d^l}{dv}f(v) = \frac{d^r}{dv}f(v)$$

En general si z es un supernúmero de paridad definida, y como:

$$dz\left[\frac{d^l}{dz}f(z)\right] = \left[\frac{d^r}{dz}f(z)\right]dz$$

se obtiene

$$dz\left[\frac{d^l}{dz}f(z)\right] = (-1)^{[\epsilon(f)+\epsilon(z)]\epsilon(z)}dz\left[\frac{d^r}{dz}f(z)\right]$$

es decir:

$$\frac{d^l}{dz}f(z) = (-1)^{[\epsilon(f)+\epsilon(z)]\epsilon(z)}\frac{d^r}{dz}f(z) \tag{3.8}$$

donde $[\epsilon(f)+\epsilon(z)]$ es la paridad de $\frac{d^r}{dz}f(z)$ (o de $\frac{d^l}{dz}f(z)$).

3.5 Regla de Leibniz para las Derivadas Derecha e Izquierda.

Para obtener $\frac{d^r}{dz}(FG)$, donde F y G tienen paridad definida, hacemos:

$$\begin{aligned} d(FG) &= (dF)G + F(dG) \\ &= \left(\frac{d^rF}{dz}\right)dzG + F\left(\frac{d^rG}{dz}\right)dz \\ &= \left[(-1)^{\epsilon_G\epsilon_z}\frac{d^rF}{dz}G + F\frac{d^rG}{dz}\right]dz \end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$\frac{d^r}{dz}(FG) = (-1)^{\epsilon_G\epsilon_z}\frac{d^rF}{dz}G + F\frac{d^rG}{dz} \tag{3.9}$$

Análogamente:

$$\frac{d^l}{dz}(FG) = \frac{d^lF}{dz}G + (-1)^{\epsilon_F\epsilon_z}F\frac{d^lG}{dz} \tag{3.10}$$

Capítulo 4

Operador de segundo orden y el antibracket

Dado un operador diferencial Δ de segundo orden que satisface $\Delta^2 = 0$, uno puede obtener un antibracket (F, G) utilizando ciertas relaciones.

En este capítulo definiremos Δ como el que obtienen J. Alfaro y P. H. Damgaard en [?] y derivaremos el correspondiente antibracket. Luego usaremos Δ y el antibracket para establecer cierta igualdad, la ecuación maestra, y veremos bajo qué transformación es invariante.

Finalmente veremos como se conecta con la teoría de gauge el desarrollo anterior (ver referencia [?]).

4.1 El Antibracket.

Consideremos un grupo de transformaciones continuas cualquiera, con $\delta\phi^A = u_i^A \lambda^i$ (λ infinitesimal), donde:

$$u_i^A = \frac{\delta^r g^A}{\delta a^i} \tag{4.1}$$

son los generadores de este grupo. Estos satisfacen:

$$\frac{\delta^r u_j^A}{\delta \phi^B} u_i^B - (-1)^{\epsilon_i \epsilon_j} \frac{\delta^r u_i^A}{\delta \phi^B} u_j^B = -u_k^A U_{ij}^k \tag{4.2}$$

donde los coeficientes de estructura del grupo son supernúmeros con la propiedad:

$$U_{ij}^k = -(-1)^{\epsilon_i \epsilon_j} U_{ji}^k \tag{4.3}$$

Estos satisfacen la identidad de Jacobi del tipo:

$$(-1)^{\epsilon_i \epsilon_m} U_{ik}^j U_{lm}^k + (-1)^{\epsilon_l \epsilon_m} U_{mk}^j U_{il}^k + (-1)^{\epsilon_i \epsilon_l} U_{lk}^j U_{mi}^k = 0 \tag{4.4}$$

Es conveniente ver la referencia [?] donde aparece una situación análoga para grupos de Lie, en la cual debemos usar (??) y (??), porque acá estamos utilizando derivada derecha y elementos que tienen paridad.

Para el grupo de transformaciones que estamos considerando, si $(-1)^{\epsilon_i} U^i_{ij} = 0$, se puede derivar, ver la referencia [**?**]:

$$\Delta G = (-1)^{\epsilon_i} \left[\frac{\delta^r}{\delta \phi^A} \frac{\delta^r}{\delta \phi^*_i} G \right] u^A_i + \frac{1}{2} (-1)^{\epsilon_i + 1} \left[\frac{\delta^r}{\delta \phi^*_j} \frac{\delta^r}{\delta \phi^*_i} G \right] \phi^*_k U^k_{ji} \tag{4.5}$$

Cuando los U^k_{ij} son constantes podemos demostrar que $\Delta^2 = 0$.

Como notó Koszul [**?**] y redescubrió Witten [**?**] podemos definir un antibracket (F, G) calculando $\Delta(FG)$ e identificando en el resultado los elementos que aparecen en la siguiente relación:

$$\Delta(FG) = F(\Delta G) + (-1)^{\epsilon_G} (\Delta F) G + (-1)^{\epsilon_G} (F, G) \tag{4.6}$$

De manera explícita queda:

$$(F, G) = (-1)^{\epsilon_i(\epsilon_A + 1)} \frac{\delta^r F}{\delta \phi^*_i} u^A_i \frac{\delta^l G}{\delta \phi^A} - \frac{\delta^r F}{\delta \phi^A} u^A_i \frac{\delta^l G}{\delta \phi^*_i} + \frac{\delta^r F}{\delta \phi^*_i} \phi^*_k U^k_{ij} \frac{\delta^l G}{\delta \phi^*_j} \tag{4.7}$$

Este antibracket tiene las siguientes propiedades:

$$(F, G) = (-1)^{\epsilon_F \epsilon_G + \epsilon_F + \epsilon_G} (G, F) \tag{4.8}$$

$$(F, GH) = (F, G)H + (-1)^{\epsilon_G(\epsilon_F + 1)} G(F, H) \tag{4.9}$$

$$(FG, H) = F(G, H) + (-1)^{\epsilon_G(\epsilon_H + 1)} (F, H) G \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} (-1)^{(\epsilon_F+1)(\epsilon_H+1)}(F, (G, H)) \quad &+ \quad (-1)^{(\epsilon_H+1)(\epsilon_G+1)}(H, (F, G)) \\ &+ \quad (-1)^{(\epsilon_G+1)(\epsilon_F+1)}(G, (H, F)) = 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\Delta(F, G) = (F, \Delta G) - (-1)^{\epsilon_G} (\Delta F, G) \tag{4.12}$$

Las demostraciones de estas relaciones se desarrollan en [**?**].

4.2 Conección con la Teoría de Gauge

Impongamos la siguiente relación, la ecuación maestra (esta ecuación aparece, por razones que no es necesario mencionar aquí, en el método de cuantización de Batalin-Vilkovisky, ver referencia [**?**]):

$$\Delta S + \frac{1}{2}(S, S) = 0 \tag{4.13}$$

con $\epsilon(S) = 0$.

Esta ecuación es invariante bajo la siguiente transformación:

$$\delta S = \Delta \varepsilon + (\varepsilon, S) \tag{4.14}$$

donde $\epsilon(\varepsilon) = -1$

Esta transformación forma un álgebra cerrada, es decir:

$$[\delta_\alpha, \delta_\beta] = \delta_{(\beta,\alpha)} \tag{4.15}$$

Ahora veremos que la ecuación maestra tiene similar forma que las transformaciones de Yang-Mills.

Podemos pensar la ecuación maestra como un campo de fuerza

$$F = \Delta A + \frac{1}{2}(A, A) \quad , \epsilon(A) = 0 \tag{4.16}$$

Como ya vimos, la transformación que dejará a $F = 0$ invariante es:

$$\delta A = \Delta\varepsilon + (\varepsilon, A) \quad , \epsilon(\varepsilon) = -1 \tag{4.17}$$

pues

$$\delta F = (\varepsilon, F) \tag{4.18}$$

El operador diferencial Δ lo construimos de la siguiente forma:

$$\Delta = \theta^\mu \partial_\mu + \Delta_{NA} \tag{4.19}$$

(notemos que $\theta^\mu \partial_\mu A = (\partial_\mu A)\theta^\mu$). Donde

$$\Delta_{NA} G = (-1)^{\epsilon_i} \left[\frac{\delta^r}{\delta y^A} \frac{\delta^r}{\delta y_i^*} G \right] u_i^A + \frac{1}{2}(-1)^{\epsilon_i + 1} \left[\frac{\delta^r}{\delta y_j^*} \frac{\delta^r}{\delta y_i^*} G \right] y_k^* f_{ji}^k \tag{4.20}$$

$$\epsilon(y^A) = 0 \quad y \quad \epsilon(y_a^*) = -1$$

De manera análoga a como se obtiene (**??**), derivamos el siguiente antibracket:

$$(F, G) = (-1)^{\epsilon_i(\epsilon_A + 1)} \frac{\delta^r F}{\delta y_i^*} u_i^A \frac{\delta^l G}{\delta y^A} - \frac{\delta^r F}{\delta y^A} u_i^A \frac{\delta^l G}{\delta y_i^*} + \frac{\delta^r F}{\delta y_i^*} y_k^* f_{ij}^k \frac{\delta^l G}{\delta y_j^*} \tag{4.21}$$

Entonces nuestro A de la relación (**??**) lo construimos como:

$$A = A_\mu^a(x) y_a^* \theta^\mu \tag{4.22}$$

y se cumple que $\epsilon(A) = 0$, pues $\epsilon(\theta) = 1$ y $\epsilon(y_a^*) = -1$

Ahora utilizamos esta construcción de A junto con (**??**), (**??**) y (**??**), obtenemos:

$$\delta A_\mu^a(x) = \partial_\mu \varepsilon^a + f_{cd}^a \varepsilon^c A_\mu^d \tag{4.23}$$

que es equivalente a la ecuación (**??**) , los ε^a serían las componentes del parámetro del grupo de transformación y f_{cd}^a las constantes de estructura del grupo, es decir $A_\mu^a(x)$ es equivalente a una componente del campo fotónico $\mathbf{A}_\mu$.

También obtenemos F usando (**??**), (**??**) y (**??**):

$$F = (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - f_{cd}^a A_\mu^c) y_a^* \theta^\nu \theta^\mu = F_{\mu\nu}^a y_a^* \theta^\nu \theta^\mu \tag{4.24}$$

$F_{\mu\nu}^a$ es equivalente al de la ecuación (**??**).

En lo que viene consideraremos un Δ_{NA} de tercer orden y estudiaremos las transformaciones de gauge que genera este operador.

Capítulo 5

Operador de tercer orden y el triantibracket

Siguiendo la misma filosofía del capítulo anterior, parece natural explorar nuevos Δ que permitan indicarnos nuevas simetrías. En el presente capítulo consideraremos un operador diferencial Δ_{NA} de tercer orden, que cumpla con $\Delta_{NA}^2 = 0$. A diferencia del caso anterior tendremos que derivar un triantibracket (F, G, H) y agregarlo a la ecuación maestra y a la variación de A.

Veremos si el álgebra que determina la variación de A se cierra.

5.1 El Triantibracket.

Consideremos el siguiente objeto, un operador diferencial de tercer orden:

$$\Delta_{NA} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^r}{\partial y_i^*} \frac{\partial^r}{\partial y_j^*} \frac{\partial^r}{\partial y_k^*} \quad \text{, i,j,k = 1,2,3} \tag{5.1}$$

Se demuestra fácilmente que:

$$\Delta_{NA}^2 = 0 \tag{5.2}$$

De las ecuaciones (29) que están en la referencia [?] obtenemos:

$$(F, GH) = (F, G)H + (-1)^{\epsilon_G(\epsilon_F+1)} G(F, H) + (-1)^{\epsilon_H}(F, G, H) \tag{5.3}$$

donde

$$(F, G, H) = (-1)^{\epsilon_H}(F, GH) + (-1)^{\epsilon_H+1}(F, G)H + (-1)^{\epsilon_G(\epsilon_F+1)+(\epsilon_H+1)} G(F, H) \tag{5.4}$$

Recordando que uno puede definir un antibracket (F, G) por la regla (**??**), se pueden desarrollar los operadores Δ, utilizando:

$$\frac{\partial^r (FG)}{\partial y_i^*} = F \frac{\partial^r G}{\partial y_i^*} + (-1)^{\epsilon_G \epsilon(y_i^*)} \frac{\partial^r F}{\partial y_i^*} G \quad \text{,donde}\, \epsilon(y_i^*) = 1 \tag{5.5}$$

Y obtenemos el antibracket de manera explícita:

$$(F,G) = 3\varepsilon_{ijk}\left[\frac{\partial^r F}{\partial y_i^*}\frac{\partial^r}{\partial y_j^*}\frac{\partial^r G}{\partial y_k^*} + (-1)^{\epsilon_G}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^r}{\partial y_i^*}\frac{\partial^r F}{\partial y_j^*}\frac{\partial^r G}{\partial y_k^*}\right] \tag{5.6}$$

Ahora con esta última fórmula desarrollamos (**??**) y obtenemos también, de manera explícita, el triantibracket:

$$(F,G,H) = -6\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^r F}{\partial y_i^*}\frac{\partial^r G}{\partial y_j^*}\frac{\partial^r H}{\partial y_k^*} \tag{5.7}$$

Definamos

$$\Delta = \theta^\mu \partial_\mu + \Delta_{NA} \tag{5.8}$$

De la ecuación (34) de la referencia [**?**] obtenemos:

$$\delta A = \Delta\varepsilon + (\varepsilon, A) + \frac{1}{2}(\varepsilon, A, A) \tag{5.9}$$

Además

$$F = \Delta A + \frac{1}{2}(A,A) + \frac{1}{3}(A,A,A) \quad ,\epsilon(A) = 0 \tag{5.10}$$

En este caso $F = 0$ es invariante bajo la transformación (**??**), pues (referencia [**?**]):

$$\delta F = (\varepsilon, F) + (\varepsilon, F, A) \tag{5.11}$$

Supongamos que:

$$A = \phi(x) + B_{\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu + C^{ab}y_a^* y_b^* + D_\mu^a y_a^* \theta^\mu \tag{5.12}$$

$$\varepsilon = \varepsilon^a y_a^* \tag{5.13}$$

Desarrollando (**??**) explícitamente, se obtiene:

$$\begin{aligned}\delta A = 6\varepsilon_{ijk}\varepsilon^i C^{jk} - 3\varepsilon_{ijk}\varepsilon^i D_\mu^j D_\nu^k \theta^\mu\theta^\nu - 12\varepsilon_{ijk}\varepsilon^i C^{aj}C^{bk}y_a^* y_b^* \\ +(\partial_\mu\varepsilon^a - 12\varepsilon_{ijk}\varepsilon^i C^{ak}D_\mu^j) y_a^*\theta^\mu\end{aligned} \tag{5.14}$$

es decir:

$$\begin{aligned}\delta\phi(x) &= 6\varepsilon_{ijk}\varepsilon^i C^{jk} \\ \delta B_{\mu\nu} &= -3\varepsilon_{ijk}\varepsilon^i D_\mu^j D_\nu^k \theta^\mu\theta^\nu \\ \delta C^{ab} &= -12\varepsilon_{ijk}\varepsilon^i C^{aj}C^{bk}y_a^* y_b^* \\ \delta D_\mu^a &= \partial_\mu\varepsilon^a - 12\varepsilon_{ijk}\varepsilon^i C^{ak}D_\mu^j\end{aligned}$$

Ahora nos preguntamos si esta álgebra se cierra, para lo cual se calcula:

$$[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}]A \tag{5.15}$$

Para desarrollar este corchete se utiliza (**??**). Lo que se obtiene es:

$$
\begin{aligned}
[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}]\phi(x) &= 0 \\
|\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}]B_{\mu\nu} &= -3\varepsilon_{ijk}\{[\varepsilon_2^i(\partial_\mu \varepsilon_1^j) - \varepsilon_1^i(\partial_\mu \varepsilon_2^j)]D_\nu^k + [\varepsilon_1^i(\partial_\nu \varepsilon_2^j) - \varepsilon_2^i(\partial_\nu \varepsilon_1^j)]D_\mu^k\} \\
&= -3\{Z_\mu^k D_\nu^k - Z_\nu^k D_\mu^k\} \\
|\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}]C^{ab} &= 0 \\
|\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}]D_\mu^a &= -12\varepsilon_{ijk}C^{ak}[\varepsilon_2^i(\partial_\mu \varepsilon_1^j) - \varepsilon_1^i(\partial_\mu \varepsilon_2^j)] \\
&= -12C^{ak}Z_\mu^k
\end{aligned}
$$

Notar que:

$$Z_\mu^k = \varepsilon_{ijk}[\varepsilon_2^i(\partial_\mu \varepsilon_1^j) - \varepsilon_1^i(\partial_\mu \varepsilon_2^j)] \tag{5.16}$$

Por lo tanto

$$[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}]A = -3\{Z_\mu^k D_\nu^k - Z_\nu^k D_\mu^k\}\theta^\mu\theta^\nu - 12C^{ak}Z_\mu^k y_a^*\theta^\mu \tag{5.17}$$

Como θ^μ y θ^ν anticonmutan:

$$
\begin{aligned}
[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}]A &= -6Z_\mu^k D_\nu^k \theta^\mu\theta^\nu - 12C^{ak}Z_\mu^k y_a^*\theta^\mu \\
&= -6Z_\mu^k\theta^\mu[D_\nu^k\theta^\nu - 2C^{ak}y_a^*] \\
&= 6Z_\mu^k\theta^\mu \frac{\partial^r}{\partial y_k^*}A \\
&= \delta_z A
\end{aligned} \tag{5.18}
$$

donde

$$\delta_z = 6Z_\mu^k\theta^\mu \frac{\partial^r}{\partial y_k^*} \tag{5.19}$$

Ahora calculemos:

$$[\delta_\varepsilon, \delta_z]A = \delta_\varepsilon[\delta_z A] - \delta_z[\delta_\varepsilon A] \tag{5.20}$$

De manera sencilla se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\delta_\varepsilon[\delta_z A] = -6Z_\mu^k\theta^\mu(\partial_\nu \varepsilon^k)\theta^\nu &+ 72Z_\mu^k\theta^\mu\varepsilon_{i'j'k'}\varepsilon^{i'}C^{kk'}D_\nu^{j'}\theta^\nu \\
&-144Z_\mu^k\theta^\mu\varepsilon_{i'j'k'}\varepsilon^{i'}C^{aj'}C^{kk'}y_a^*
\end{aligned} \tag{5.21}
$$

(Primero se utiliza (**??**) y luego (**??**)).

Para el segundo término de la derecha de (**??**) calculamos de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\delta_z[\delta_\varepsilon A] &= \delta_z[\Delta\varepsilon + (\varepsilon, A) + \frac{1}{2}(\varepsilon, A, A)] \\
&= (\varepsilon, A + \delta_z A) - (\varepsilon, A) + \frac{1}{2}(\varepsilon, A + \delta_z A, A + \delta_z A) - \frac{1}{2}(\varepsilon, A, A) \\
&= (\varepsilon, \delta_z A) + \frac{1}{2}[(\varepsilon, A, \delta_z A) + (\varepsilon, \delta_z A, A) + (\varepsilon, \delta_z A, \delta_z A)]
\end{aligned} \tag{5.22}
$$

Desarrollando el antibracket y los tribrackets obtenemos:

$$\delta_\varepsilon[\delta_z A] = -144 Z^{k'}_\nu \theta^\nu \varepsilon_{ijk} \varepsilon^i C^{aj} C^{k'k} y^*_a + 72 Z^{k'}_\nu \theta^\nu \varepsilon_{ijk} \varepsilon^i C^{k'k} D^j_\mu \theta^\mu \tag{5.23}$$

Reemplazando (**??**) y (**??**) en (**??**):

$$[\delta_\varepsilon,\delta_z]A = -6 Z^k_\mu \theta^\mu (\partial_\nu \varepsilon^k) \theta^\nu \tag{5.24}$$

Es fácil calcular que:

$$[\delta_{z_1},\delta_{z_2}]A = 0 \tag{5.25}$$

En la relación (**??**) vemos que no se obtiene un operador que actuando sobre A, como los δ que ya teníamos, nos dé $-6Z^k_\mu \theta^\mu (\partial_\nu \varepsilon^k)\theta^\nu$. Por lo que el problema de encontrar un álgebra que se cierre queda abierto, y consiste en encontrar un álgebra que contenga a los operadores δ y al resultado de $[\delta_\varepsilon, \delta_z]$. Luego encontrar un cantidad finita de operadores que pertenezcan al álgebra y que bajo la operación $[\,,\,]$ resulte algún elemento del álgebra.

Si el álgebra no se cierra sabremos que no hay una acción invariante bajo estas transformaciones.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta práctica estudiamos el concepto de invariancia de gauge y rompimiento espontáneo de la simetría. También se consideró el desarrollo algebraico de las teorías de gauge, a partir de un operador Δ de segundo orden que satisface $\Delta^2 = 0$ y de propiedades de los supernúmeros. Por último, aplicando lo aprendido, nos dimos un operador Δ_{NA} de tercer orden que cumple $\Delta_{NA}^2 = 0$, de donde obtuvimos un triantibracket (F, G, H). Encontramos un campo (**??**) con el mínimo de componentes que bajo la variación (**??**) nos da un campo con las mismas componentes. No obtenemos Yang-Mills a pesar de que usamos el parámetro de Yang-Mills(**??**). El problema de cerrar el álgebra a partir de (**??**) queda abierto.

Ahora nos gustaría generalizar lo que se hizo para el A dado por la relación (**??**), para un A arbitrario. Sin embargo al desarrollar $[\delta_{\varepsilon_1},\delta_{\varepsilon_2}]A$ nos encontramos limitados por no disponer de relaciones útiles entre los triantibrackets. Por lo anterior, y como continuación de este estudio, es conveniente obtener primeramente las propiedades y relaciones de los triantibrackets. Luego nos interesaría encontrar ecuaciones de movimiento que tengan la invarianza de la ecuación (**??**), para darle utilidad física al desarrollo anterior.

La motivación de lo que se hace en los capítulos 4 y 5 es explorar nuevos tipos de simetría (la del capítulo 4 incluye como caso particular las simetrías de gauge para grupos no abelianos) para introducir gravedad.

Referencias

[1] E. Abers and B. Lee, *Gauge Theories*, Phys. Rep. 9 (1973) 1.

[2] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd ed. Wiley, 1975.

[3] M. Chaichian and N. F. Nelipa, *Introduction to Gauge Field Theories*, Springer-Verlag, 1984.

[4] Michio Kaku, *Quantum Field Theory*, Oxford University Press, 1993 .

[5] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1985.

[6] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics V.1.*, John Wiley & Sons, 1989.

[7] B. DeWitt, *Supermanifolds*, Cambridge University, 1992.

[8] J. Alfaro and P.H. Damgaard, *Symmetries and the antibracket*, Nucl. Phys. B455 (1995) 409.

[9] J. Alfaro and P.H. Damgaard, *Non-Abelian antibrackets*, Phys. Lett. B369 (1995) 289.

[10] J. Alfaro, *BV Gauge Theories*, hep-th /9702060.

[11] M. Penkava and A. Schwarz, UC Davis prepint (1992), hep-th /9212072.

[12] M. Hamermesh, *Group Theory*, Addison-Wesley, 1964.

[13] J. L. Koszul, Astérisque, hors serie (1985) 257.

[14] E. Witten, Mod. Phys. Lett. A 5 (1990) 487.

[15] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, Phys. Lett. B 102 (1981) 27; Phys. Rev. D 28 (1983) 2567; D 30 (1984) 508(E); Nucl. Phys. B 234 (1984) 106; J. Math. Phys. 26 (1985) 172.

[16] J. Alfaro, trabajo en preparación.