Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física

Mecánica Cuántica Semiclásica

por

Maximiliano Arnoldo Binder Ross

Informe de práctica presentado a la Facultad de Física de la Pontificia Universidad Católica de Chile, como uno de los requisitos para optar al grado académico de Licenciado en Física

Profesor Guía	:	Dr. Jorge Alfaro
Comisión Informante	:	Dr. Marcelo Loewe
		Dr. Sebastián Reyes

Julio, 2009
Santiago – Chile

Resumen

Estudiamos el modelo de una teoría semiclásica aplicado a un sistema de mecánica cuántica supersimétrica. Para esto, derivamos primero la acción de SUSY QM y luego le agregamos su variación con respecto a los campos tomando las variaciones de éstos como nuevos campos independientes de los originales. Además, para ver el comportamiento de este modelo estudiamos primero dos casos: un sistema clásico y dos ejemplos en mecánica cuántica.

Contents

Introducción

A fines del siglo XIX, Maxwell logró de manera brillante unificar la electricidad con el magnetismo en sus cuatro famosas ecuaciones. Este fue un gran logro para la física teórica, ya que dejaba las interacciones que nos gobiernan separadas en dos: el electromagnetismo por un lado y la gravedad por otro.

A comienzos del siglo XX con el desarrollo de la mecánica cuántica por un lado y de la relatividad general por otro, la física teórica comenzó a dar enormes pasos hasta su actual desarrollo. Con el estudio en paralelo de estas dos teorías, los científicos fueron notando que ambas teorías se comportaban de maneras diametralmente opuestas. Mientras la primera se basaba en la probabilidad y en la estadística y el error, la segunda era una teoría determinista.

Ya más avanzado el siglo XX, el modelo estándar logró unificar las interacciones fuerte y debil con el electromagnetismo en una sola teoría basada en el intercambio de bosones de gauge entre las diversas partículas fundamentales [1]. El modelo estándar es sin duda uno de los más grandes logros de la física teoríca de todos los tiempos, sin embargo, existen varias interrogantes que el modelo estándar no alcanza a responder. Una de éstas, es el por qué la interacción gravitacional no concuerda con este modelo.

Este último punto es uno de los grandes desafíos de la física teórica de nuestros tiempos: el lograr una teoría cuantica de la gravedad. Si bien no será posible resolver este desafío durante esta práctica, trabajaremos con un modelo que intenta resolverlo y son las teorías semiclásicas[2].

Estas teorías se refieren a que se utilizan métodos cuánticos al aplicar pequeñas variaciones a algún modelo clásico. En el lenguaje de teoría de campos, estas teorías serían teorías que viven a un loop.

Esta es la principal motivación de esta práctica, y si bien no aplicaremos este modelo a una teoría de la gravedad cuántica, sí lo haremos con otra teoría que esta siendo fuertemente estudiada desde hace ya más de treinta años: Supersimetría.

Supersimetría (SUSY) es una de las grandes candidatas que sería capaz de explicar varios fenómenos que van más allá del modelo estándar como, entre otros, explicar el problema de jerarquía, o sea, el por qué la interacción débil es del orden de 10^{30} veces más fuerte que la interacción gravitacional.

Si bien SUSY es una teoría de campos relativista, o sea, tiene cuatro coordenadas espacio-temporales x^μ independientes entre sí, tomaremos el caso partícular de mecánica cuántica supersimétrica (SUSY QM) haciendo $x^\mu = x^0 \to t$.

Chapter 1

El Modelo y Algunos Ejemplos

A lo largo de todo este informe trabajaremos con la misma transformación. Si bien los casos que estudiaremos en este capítulo no son fundamentales para el propósito principal de esta práctica, servirán para comenzar a familiarizarse con el modelo y con algunos de sus resultados. Para el caso más general, tenemos una acción S_0

$$S_0 = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{1.1}$$

para una densidad lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_t \phi)$. Al hacer una variación a esta acción con respecto a los campos obtenemos

$$\bar{S_0} = \int d^4x \frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta \phi} \delta\phi + \frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \tag{1.2}$$

Estudiaremos en diferentes casos la nueva acción $S = S_0 + \bar{S_0}$ considerando $\delta\phi = \bar{\phi}$ un nuevo campo independiente de ϕ. La importancia de estas teorías recae en que son teorías que viven a un loop para el caso de teorías de campos [1].

1.1 Caso Clásico

Para comenzar, tomaremos la acción clásica correspondiente a un cuerpo de masa m sometido a un potencial V

$$S_0 = \int dt \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) \right) \tag{1.3}$$

y le aplicaremos la transformación del capítulo 1 para estudiar la nueva acción $S = S_0 + \bar{S_0}$. Dado que el lagrangiano depende sólo de x y $\dot{x}$ obtenemos para la nueva acción S

[1] Todas las relaciones que utilizaremos en los ejemplos a continuación pueden ser encontradas en [3]

$$\begin{aligned} S &= \int dt \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) + m\dot{x}(\delta\dot{x}) - \frac{\partial V}{\partial x}\delta x \right) \\ &= \int dt \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) + m\dot{x}\dot{\bar{x}} - \frac{\partial V}{\partial x}\bar{x} \right) \end{aligned} \tag{1.4}$$

con x y $\bar{x} = \delta x$ dos variables independientes entre sí.

Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos la ecuación de movimiento de la acción S_0:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{1.5}$$

y la energía

$$H_0 = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \frac{p^2}{2m} + V(x) \tag{1.6}$$

que son familiares de mecánica clásica. Ahora, si calculamos las ecuaciones de movimiento para la nueva acción S obtenemos:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + m\ddot{\bar{x}} &= -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\bar{x} \\ m\ddot{x} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Como vemos, se mantiene la ecuación (1.5) y con ayuda de ésta podemos identificar

$$m\ddot{\bar{x}} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\bar{x} \tag{1.8}$$

Para la energía total H asociada a nuestra nueva acción S calculada de la misma manera que (1.6) obtenemos

$$H = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) + m\dot{x}\dot{\bar{x}} + \frac{\partial V}{\partial x}\bar{x} \tag{1.9}$$

que como vemos, también la podemos separar en la energía inicial H_0 más la nueva energía $\bar{H}_0$ que aparece al realizar la variación con la que trabajaremos a lo largo de todo este informe.

Si calculamos los momentos canónicos $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ obtenemos

$$p_x = m\dot{x} + m\dot{\bar{x}} \tag{1.10}$$

$$p_{\bar{x}} = m\dot{x} \tag{1.11}$$

Llama la atención el hecho de que ahora $m\dot{x}$ está asociado al momento $p_{\bar{x}}$ y no a p_x, como es habitual. Podemos expresar H en función de las variables canónicas $q_i, p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}}$:

$$H = \frac{p_{\bar{x}}^2}{2m} + \frac{(p_x - p_{\bar{x}})p_{\bar{x}}}{m} + V(x) + \frac{\partial V}{\partial x}\bar{x} \tag{1.12}$$

Para encontrar las constantes de movimiento, utilizamos la relación $\dot{g} = \{H, g\}$, donde $\{,\}$ representa el corchete de Poisson definido por

$$\{A, B\} = \sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} + \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} \tag{1.13}$$

para dos cantidades A y B . Se verifica mediante esta definición que $\dot{H}_0 = \{H, H_0\} = 0$ y con esto encontramos dos constantes de movimiento

$$\frac{dH_0}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)\right] = 0 \tag{1.14}$$

$$\frac{d\bar{H}_0}{dt} = \frac{d}{dt}\left[m\dot{x}\dot{\bar{x}} + \frac{\partial V}{\partial x}\bar{x}\right] = 0 \tag{1.15}$$

donde hemos utilizado $\bar{H}_0 = H - H_0 = m\dot{x}\dot{\bar{x}} + \frac{\partial V}{\partial x}\bar{x}$. Esta última relación se deduce del álgebra que cumplen los corchetes de Poisson ya que $\dot{\bar{H}}_0 = \left\{H, \bar{H}_0\right\} = \{H, H - H_0\} = \{H, H\} - \{H, H_0\} = 0$, por lo que la cantidad $\bar{H}_0$ también es una cantidad conservada. De manera similar se demuestra que $\left\{H_0, \bar{H}_0\right\} = 0$

Si definimos $M = -\frac{(p_x - p_{\bar{x}})^2}{2m} + \frac{\partial V}{\partial x}\bar{x}$ vemos que no es una constante de movimiento,como podría pensarse a simple vista , ya que al calcular el corchete de Poisson obtenemos:

$$\left\{\tilde{H}, M\right\} = \frac{1}{m}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\bar{x}(p_x - p_{\bar{x}}) \tag{1.16}$$

Para encontrar las simetrías generadas por H_1 y H_2, ya que son cantidades conservadas, calculamos los corchetes de Poisson:

$$\{H_1, x\} = 0 \tag{1.17}$$

$$\{H_1, P_x\} = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{1.18}$$

$$\{H_1, \bar{x}\} = \frac{P_{\bar{x}}}{m} \tag{1.19}$$

$$\{H_1, P_{\bar{x}}\} = 0 \tag{1.20}$$

$$\{H_2, x\} = \frac{P_{\bar{x}}}{m} \tag{1.21}$$

$$\{H_2, P_x\} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\bar{x} \tag{1.22}$$

$$\{H_2, \bar{x}\} = \frac{P_x - 2P_{\bar{x}}}{m} \tag{1.23}$$

$$\{H_2, P_{\bar{x}}\} = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{1.24}$$

1.2 Caso Cuántico

Hemos visto que ciertas características del sistema original se mantienen luego de aplicar la variación a la acción, como por ejemplo la energía original y las ecuaciones de movimiento, mientras que otras cambian. Veremos ahora qué sucede para el caso cuántico tomando dos ejemplos: la partícula libre y el caso del oscilador armónico en una dimensión.

1.2.1 Partícula libre en una caja $(V = 0)$

El primer caso que resolveremos será encontrar el espectro de energía de una partícula libre en una caja de largo L .Al pasar del caso clásico al cuántico hacemos el cambio de los corchetes de Poisson a las relaciones de conmutación $\{A, B\} \longrightarrow -i\,[A, B]$ para dos observables A y B (en especial obtenemos $[q_i, p_j] = i\delta_{ij}$).Dado que $[H, H_0] = \left[H, \bar{H}_0\right] = 0$, se puede demostrar que$\left[H_0, \bar{H}_0\right] = 0$ lo que implica que H_0 y $\bar{H}_0$ tienen autofunciones simultaneas. Además, como $H = H_0 + \bar{H}_0$ podemos establecer las siguientes ecuaciones de autovalores:

$$\begin{aligned} H\Psi &= \epsilon\Psi \\ H_0\Psi &= \epsilon_0\Psi \\ \bar{H}_0\Psi &= \bar{\epsilon_0}\Psi \end{aligned} \tag{1.25}$$

De donde se deduce fácilmente que $\epsilon = \epsilon_0 + \bar{\epsilon_0}$ y $\Psi = \Psi(x, \bar{x})$.Utilizando la relación (1.25) y haciendo el cambio

$$P_{q_i} \longrightarrow -i\frac{\partial}{\partial q_i} \tag{1.26}$$

obtenemos

$$H_0\Psi = \frac{P_{\bar{x}}^2}{2m}\Psi = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\bar{x}^2} = \epsilon_0\Psi \tag{1.27}$$

Esta ecuación tiene una solución del tipo $\Psi(x,\bar{x}) = \chi(x)e^{\pm i\sqrt{2m\epsilon_0}\bar{x}}$ con $\chi(x)$ una función arbitraria de x, la cual podemos determinar utilizando (1.25)

$$\begin{aligned} \bar{H_0}\Psi = \frac{P_{\bar{x}}P_x - P_{\bar{x}}^2}{m}\Psi &= \bar{\epsilon_0}\Psi \\ -\frac{1}{m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial\bar{x}} + \frac{1}{m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\bar{x}^2} &= \bar{\epsilon_0}\Psi \end{aligned} \tag{1.28}$$

Reemplazando el valor de Ψ obtenemos

$$\frac{\partial\chi}{\partial x} = \pm i\left[\sqrt{2m\epsilon_0} + \frac{m\bar{\epsilon_0}}{\sqrt{2m\epsilon_0}}\right]\chi(x) \tag{1.29}$$

de donde podemos encontrar la función $\chi(x)$ y con esto reemplazamos en $\Psi(x,\bar{x})$

$$\Psi(x,\bar{x}) = exp\left\{\pm i\sqrt{2m\epsilon_0}\bar{x}\right\} exp\left\{\pm i\left[\sqrt{2m\epsilon_0} + \frac{m\bar{\epsilon_0}}{\sqrt{2m\epsilon_0}}\right]x\right\} \tag{1.30}$$

Imponemos periodicidad para encontrar el espectro de la energía de manera que $\Psi(0,L) = \Psi(L,0) = \Psi(0,0) = \Psi(L,L)$.

$$\sqrt{2m\epsilon_0}L = 2p\pi \tag{1.31}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2m}\left(\frac{2p\pi}{L}\right)^2 \tag{1.32}$$

con $p \in \Re$. De la misma forma encontramos

$$\left[\sqrt{2m\epsilon_0} + \frac{m\bar{\epsilon_0}}{\sqrt{2m\epsilon_0}}\right]L = 2q\pi \tag{1.33}$$

$$\bar{\epsilon_0} = \frac{1}{m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 p\,(p-q) \tag{1.34}$$

con $p \in \Re$. Sumando ambos resultados encontramos el espectro para la energía total $\epsilon = \epsilon_0 + \bar{\epsilon_0}$

$$\epsilon = \frac{1}{m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2\left(pq - \frac{p^2}{2}\right) \tag{1.35}$$

que, como vemos, no está acotado por abajo y obtenemos valores menores que cero para la energía ϵ. Este es uno de los inconvenientes que presenta este modelo para el caso de mecánica cuántica. De todos modos estudiaremos ahora el caso del oscilador armónico, sin embargo, con el resultado recién encontrado ya vemos que esté modelo no es válido para este caso.

1.2.2 Osilador Armónico ($V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$)

En este caso, el hamiltoniano que obtenemos luego de aplicar la transformación (1.2) es $H = H_0 + \bar{H}_0$ con

$$\begin{aligned} H_0 &= \left[\frac{P_{\bar{x}}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right] \\ \bar{H}_0 &= \left[\frac{P_{\bar{x}}P_x - P_{\bar{x}}^2}{m} + m\omega^2 x\bar{x}\right] \end{aligned} \tag{1.36}$$

Para reslover la ecuación de autovalores nuevamente utilizamos las relaciones de (1.25). Para H_0 tenemos

$$\left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right]\Psi = \epsilon_0 \Psi \tag{1.37}$$

y obtenemos una solución del tipo $\Psi(x,\bar{x}) = \chi(x)e^{\pm i\sqrt{2m\epsilon_0 - (m\omega x)^2}\bar{x}}$ con $\chi(x)$ una función arbitraria de x, la cual nuevamente podemos determinar utilizando la ecuacion de autovalores asociada a $\bar{H}_0$. Tenemos ahora:

$$\begin{aligned} \bar{H}_0\Psi = \left[\frac{P_{\bar{x}}P_x - P_{\bar{x}}^2}{m} + m\omega^2 x\bar{x}\right]\Psi &= \bar{\epsilon_0}\Psi \\ -\frac{1}{m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x \partial \bar{x}} + \frac{1}{m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial \bar{x}^2} + m\omega^2 x\bar{x}\Psi &= \bar{\epsilon_0}\Psi \end{aligned} \tag{1.38}$$

Utilizando la solución encontrada para (1.37) encontramos la ecuación a resolver para $\chi(x)$

$$\left(-\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial x} \pm i\left(k + \frac{m\bar{\epsilon_0}}{k}\right)\right)\chi = \frac{\partial \chi}{\partial x} \tag{1.39}$$

con $k = \sqrt{2m\epsilon_0 - (m\omega x)^2}$.

Para resolver esta ecuación suponemos una solución de la forma

$$\chi(x) = exp\left\{\int dx \left(-\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial x} \pm i\left(k + \frac{m\bar{\epsilon_0}}{k}\right)\right)\right\} \tag{1.40}$$

Integrando y reemplazando $\chi(x)$ en la solución encontrada para (1.37) obtenemos la autofunción $\Psi_{o.a}(x,\bar{x})$

$$\Psi_{o.a}(x,\bar{x}) = \frac{1}{k}exp\left\{\pm i\left[k\left(\frac{x}{2} + \bar{x}\right) + \frac{1}{\omega}\left(\epsilon_0 + \bar{\epsilon_0}\right)arctg\left(\frac{m\omega x}{k}\right)\right]\right\} \tag{1.41}$$

Que cumple con

$$H\Psi = \left(\epsilon_0 + \bar{\epsilon_0}\right)\Psi = \epsilon\Psi \tag{1.42}$$

Chapter 2

Mecánica Cuántica Supersimétrica

Supersimetría es una teoría que comienza a desarrollarse a comienzos de los años setenta y que aún no ha sido comprobada. Esta relaciona partículas de espín semientero con partículas de espín entero en supermultipletes de la misma masa, o sea, cada partícula tendría una supercompañera asociada con similares características pero sus espines difieren en $\frac{1}{2}$, por lo que el compañero de un bosón sería un fermión mientras que la de un fermión un bosón.

Antes de la invención de la supersimetría hubo muchos intentos por encontrar simetrías fundamentales que relacionaran partículas cuyos espines diferieran en un medio. Sin embargo, ninguna tuvo exito por diversos motivos, principalmente debido a que en la mayoría el número de dimensiones era muy alto y las teorías resultaban poco atractivas además, el teorema de Coleman-Mandula establecía que el algebra de Lie más general de las simetrías de la matriz S era la generada por el grupo de Poincaré[8]. La mayoría de estas dificultades pudieron ser superadas si se asociaba variables anticonmutativas a estas nuevas dimensiones. De esta manera, en supersimetría se consideran campos que están definidos sobre el producto de las cuatro cordenadas del espacio-tiempo usuales y un nuevo espacio compuesto por variables anticonmutativas [4]. Estas variables son conocidas como variables de Grassman y antes de introducirnos en mecánica cuántica supersimétrica(SUSY QM) veremos un breve repaso.

2.1 Variables y Álgebra de Grassman

Las variables de Grassman satisfacen la relación

$$\theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i \equiv \{\theta_i, \theta_j\} = 0 \tag{2.1}$$

y se dice que forman un álgebra de Grassman $\mathcal{G}_n$ con n generadores[1].Se puede verificar fácilmente de (2.1) que si θ_i y θ_j pertenecen al espacio entonces $\theta_i\theta_j$ también. Por esto, podemos considerar una base del espacio a los monomios

$$1, \theta_1, ..., \theta_n, \theta_1\theta_2, ..., \theta_{n-1}\theta_n, ..., \theta_1 \cdots \theta_n \tag{2.2}$$

con lo que la dimension del espacio resulta 2^n, y cualquier elemento f(x) del álgebra $\mathcal{G}_n$ puede ser representado por una combinación lineal de estos monomios mediante una expansión de la forma

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0 + \sum_k f_1(k)\theta_k + \sum_{k_1,k_2} f_2(k_1,k_2)\theta_{k_1}\theta_{k_2} + \cdots \\ &\quad + \sum_{k_i} f_n(k_1,\ldots,k_n)\theta_1\cdots\theta_n \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.1.1 Derivadas de variables de Grassman

Se define las derivadas por la izquierda para cualquier término de la base con respecto a θ_j por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_s} &= \delta_{i_1,j}\theta_{i_2}\cdots\theta_{i_s} \\ &\quad -\delta_{i_2,j}\theta_{i_1}\theta_{i_3}\cdots\theta_{i_s} + \cdots + (-1)^{s-1}\delta_{i_s,j}\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_{s-1}} \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde $\delta_{i,j}$ representa la delta de Kronecker. En pocas palabras, para derivar un monomio con respecto a θ_j debemos llevar este término hasta el primer lugar utilizando la relación (2.1) y luego eliminarlo, si el término no contiene θ_j entonces la derivada se anula. De la misma manera se define la derivada por la derecha sólo que en este caso la variable con respecto a la cual estamos derivando se debe llevar hasta el último puesto. Ambos son operadores lineales en este espacio.

[1]Para ver en más detalles el álgebra de Grassman y su origen ver [6]

2.1.2 Integrales de variables de Grassman

Para integrar con respecto a variables de Grassman, vemos primero que los infinitesimales también cumplen (2.1):

$$\{d\theta_i, d\theta_j\} = \{\theta_i, d\theta_j\} = 0 \tag{2.5}$$

Se definen las siguientes reglas de integración

$$\int d\theta_i \theta_j = \delta_{ij}, \int d\theta_i = 0 \tag{2.6}$$

En particular podemos ver que

$$\int d\theta_i d\theta_j \theta_j \theta_i = 1 \tag{2.7}$$

ya que

$$\begin{aligned} \int d\theta_i d\theta_j \theta_j \theta_i &= \int d\theta_i \Big(\int d\theta_j \theta_j \Big) \theta_i \\ &= \int d\theta_i \theta_i = 1 \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.2 Derivación de la acción en SUSY QM [5]

Si bien SUSY es una teoría de campos relativista y vive en cuatro dimensiones, la forma del lagrangiano en mecánica cuántica supersimétrica (SUSY QM) puede ser obtenida mediante el formalismo de supercampos en d=1 [8]. Usualmente los supercampos están definidos en el espacio (x_n, θ_α) , por lo que en una dimensión tenemos $x_n \to t$ y $\theta_\alpha \to \theta, \theta^*$ y cumplen con las siguientes relaciones de conmutación y anticonmutación

$$\{\theta, \theta^*\} = \{\theta^*, \theta\} = 0 \tag{2.9}$$

$$[\theta, t] = [\theta^*, t] = 0 \tag{2.10}$$

Las transformaciones supersymetricas quedan definidas por

$$\delta t = -i(\theta^* \epsilon - \epsilon^* \theta), \quad \delta\theta = \epsilon, \quad \delta\theta^* = \epsilon^* \tag{2.11}$$

y son el punto de partida del trabajo que realizaremos. El generador de una transformacion supersimétrica finita queda definido por

$$L = e^{i(\epsilon^* Q^* + Q\epsilon)} \tag{2.12}$$

Dado que tiene L debe ser hermítico, vemos que Q anticonmuta con ϵ, por lo que es un generador de carácter espinorial. Para $A = A(t, \theta, \theta^*)$ una funcion de los parámetros del espacio que transforma según $A' = LAL^\dagger$, tenemos para una transformación infinitesimal

$$\delta A = i[\epsilon^* Q^* + Q\epsilon, A] \tag{2.13}$$

Si comparamos esta última exprensión con la expansión

$$\delta A = \delta t \frac{\partial A}{\partial t} + \delta\theta \frac{\partial A}{\partial \theta} + \delta\theta^* \frac{\partial A}{\partial \theta^*} \tag{2.14}$$

, podemos identificar Q y Q^* como operadores diferenciales que actúan sobre funciones del superespacio y encontramos

$$Q = i\partial_\theta - \theta^* \partial_t \tag{2.15}$$

$$Q^* = -i\partial_{\theta^*} + \theta\partial_t \tag{2.16}$$

Con estas expresiones vemos que se cumplen las siguientes relaciones de conmutación y anticonmutación

$$\begin{aligned} \{Q, Q^*\} &= 2i\partial_t = 2H \\ & [Q, H] = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

que son similares a las encontradas en el álgebra supersimetrica en cuatro dimensiones para el caso particular $P^\mu = P^0 = H$.

Podemos distinguir las siguientes derivadas invariantes

$$D_\theta = \partial_\theta - i\theta^* \partial_t \tag{2.18}$$

$$D_{\theta^*} = \partial_{\theta^*} - i\theta\partial_t \tag{2.19}$$

ya que

$$
\begin{aligned}
D_\theta &= \partial_\theta - i\theta^*\partial_t \\
&= \frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta'} + \frac{\partial t'}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial t'} - i\theta^*\Big[\frac{\partial\theta'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\theta'} + \frac{\partial\theta'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\theta'}\Big] \\
&= \partial_{\theta'} - i\epsilon^*\partial_{t'} - i\big(\theta^{*\prime} - \epsilon^*\big)\partial_{t'} \\
&= \partial_{\theta'} - i\theta^{*\prime}\partial_{t'} \\
&= D_{\theta'} \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

Ahora, como dijimos al comienzo de este capítulo, podemos definir un supercampo escalar real expandiendo en los parámetros t, θ y θ^* .Debido a que los dos últimos son variables anticonmutativas, al realizar una expansión de la misma manera que en (2.3) el supercampo $\phi(t, \theta, \theta^*)$ debe ser de la forma

$$
\phi(t, \theta, \theta^*) = x(t) + i\theta\psi(t) - i\psi^*(t)\theta^* + \theta^*\theta D(t) \qquad (2.21)
$$

ya que términos de orden superior en θ y θ^* se anulan por ser variables anticonmutativas.

Al hacer operar las derivadas invariantes sobre el campo ϕ obtenemos la derivada por componentes

$$
\begin{aligned}
D_\theta\phi &= i\psi - \theta^* D - i\theta^*\dot{x} + \theta^*\theta\dot{\psi} \\
\big[D_\theta\phi\big]^* &= -i\psi^* - \theta D + i\theta\dot{x} + \theta^*\theta\dot{\psi}^* \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

Con todos estos elementos, podemos buscar ahora la acción invariante más general para el caso de SUSY QM. Esta debe ser de la forma

$$
\int dt d\theta^* d\theta \left(\frac{1}{2}|D_\theta\phi|^2 - f(\phi)\right) \qquad (2.23)
$$

debido a que en la expansión de ϕ las derivadas de orden mayor que uno con respecto a θ y θ^* se anulan y además se cumple que $dt d\theta^* d\theta$ es invariante supersimétrico. Debido a las reglas de integración para las variables de Grassman sólo los términos $\theta\theta^*$ no se desvanecerán ya que

$$
\begin{aligned}
\int d\theta^* d\theta(\theta\theta^*) &= 1 \\
\int d\theta^* d\theta\ \theta &= \int d\theta^* d\theta\ \theta^* = 0 \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

Estas últimas relaciones se deducen fácilmente de lo expuesto en la sección anterior.

Calculamos primero $|D_\theta\phi|^2 = [D_\theta\phi]^* D_\theta$ para luego reemplazarlo en (2.23) y obtenemos

$$\begin{aligned} [D_\theta\phi]^* D_\theta\phi &= \psi^*\psi + i\psi^*\theta^* D - \psi^*\theta^*\dot{x} + i\theta\theta^*\psi^*\dot{\psi} \\ &\quad -i\theta\psi D + \theta\theta^* D^2 - \theta\dot{x}\psi + \theta\theta^*\dot{x}^2 - i\theta\theta^*\dot{\psi}^*\psi \end{aligned} \tag{2.25}$$

,y considerando sólo los términos con $\theta\theta^*$, ya que el resto se anula al integrar sobre las variables de Grassman, obtenemos

$$[D_\theta\phi]^* D_\theta\phi = \theta\theta^*\left[\dot{x}^2 + D^2 + i(\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi)\right] \tag{2.26}$$

Para el caso de $f(\phi)$, podemos expandir $f(\phi) = f(x(t) + i\theta\psi(t) - i\psi^*(t)\theta^* + \theta^*\theta D(t))$ en torno a x utilizando

$$f(x+\eta) = f(x) + \eta f'(x) + \frac{1}{2}\eta^2 f''(x) + ... \tag{2.27}$$

con $\eta = i\theta\psi(t) - i\psi^*(t)\theta^* + \theta\theta^* D(t)$. Nuevamente guardamos sólo los términos con ambos θ y θ^* y expandiendo hasta segundo orden, ya que términos de orden superior se anulan por (2.9), obtenemos

$$f(\phi) = \theta\theta^*\big(-Df'(x) - \frac{[\psi^*,\psi]}{2} f''(x)\big) \tag{2.28}$$

Introduciendo (2.28) y (2.26) en (2.23) e integrando en las variables de Grassman utilizando (2.24) obtenemos la accion buscada

$$S = \int dt \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{D^2}{2} + \frac{i}{2}(\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi) + Df'(x) + \frac{[\psi^*,\psi]}{2} f''(x)\right) \tag{2.29}$$

De la ecuación de movimiento para D obtenemos $D = -f' = W(x)$, reemplazando en la ecuacion anterior se obtiene

$$S = \int dt \left(\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{W^2}{2} + \frac{i}{2}(\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi) - \frac{[\psi^*,\psi]}{2} W'(x)\right) \tag{2.30}$$

Si realizamos el cambio

$$\int dt\ (\partial_t\psi^*)\psi = \int dt[\ \partial_t(\psi^*\psi) - \psi^*\partial_t\psi] \tag{2.31}$$

y despreciamos la derivada total $\partial_t(\psi^*\psi)$ ya que que los campos se anulan en infinito, y además utilizamos que $\{\psi,\psi^*\} = 0$, podemos escribir la acción de la forma

$$S = \int dt\Big(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \psi^*\left[i\partial_t - W'(x)\right]\psi - \frac{1}{2}W^2\Big) \tag{2.32}$$

2.3 Energía, Momentos y Cargas Conservadas

Tenemos los momentos conjugados $P_q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ asociados al lagrangiano $L_0(x, \psi, \psi^*, \dot{x}, \dot{\psi}, \dot{\psi}^*)$ recién encontrado para S_0:

$$\begin{aligned} P_x &= \dot{x} \\ P_{\psi^*} &= 0 \\ P_\psi &= i\psi^* \end{aligned} \tag{2.33}$$

y el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}P^2 + \frac{W^2}{2} + \psi^* W'(x)\psi \tag{2.34}$$

Sabemos por el teorema de Noether que existen cargas asociadas a cada simetría interna de un sistema [2]. Para encontrar estas cargas, vemos primero el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} \delta L_0 &= \sum_i \delta X_i \frac{\partial L_0}{\partial X_i} + \delta \dot{X}_i \frac{\partial L_0}{\partial \dot{X}_i} \\ &= \sum_i \delta X_i \frac{\partial L_0}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial t}(\delta X_i \frac{\partial L_0}{\partial \dot{X}_i}) - \delta X_i \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{X}_i}) \\ &= \sum_i \frac{\partial}{\partial t}(\delta X_i \frac{\partial L_0}{\partial \dot{X}_i}) \end{aligned} \tag{2.35}$$

donde X_i representa a cada uno de los campos x, ψ, ψ^*. Por otro lado, podemos calcular la variacion de L_0 de manera explícita y obtenemos

$$\begin{aligned} \delta L_0 &= (\delta\dot{x})\dot{x} + WW'\delta x + \delta\psi^* \left[i\partial_t - W'(x)\right]\psi + \psi^* \big[- W''(x)\delta x\big]\psi \\ &\quad + \psi^* \left[i\partial_t - W'(x)\right]\delta\psi \end{aligned} \tag{2.36}$$

Debemos calcular la variación de cada campo por separado como función de los otros campos. Para esto, utilizamos los generadores Q y Q^* en su forma diferencial y desarrollamos

$$\begin{aligned} \delta\phi &= i\big[Q\epsilon, \phi\big] \\ &= -i\epsilon\big(i\partial_\theta - \theta^*\partial_t\big)\phi \\ &= -i\epsilon\big(- \psi - i\theta^* D - \theta^*\dot{x} + i\theta\dot{\psi} \\ &= \delta x + i\theta\delta\psi - i\delta\psi^* + \theta^*\theta\delta D \end{aligned} \tag{2.37}$$

[2]Este procedimiento se encuentra con mayor detalle en [7]

Comparando los coeficientes de θ y θ^* en las dos últimas igualdades y utilizando que $D = W(x)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \delta x &= i\epsilon\psi \\ \delta\psi &= 0 \\ \delta\psi^* &= -\epsilon(iW + \dot{x}) \end{aligned} \tag{2.38}$$

que, como vemos, relaciona la parte fermiónica ψ y ψ^* con la parte bosónica x de la teoría. Si reemplazamos estas expresiones en (2.36), vemos que podemos escribir δL_0 como una derivada total con respecto al tiempo

$$\delta L_0 = \epsilon \frac{d}{dt}(W\psi) \tag{2.39}$$

Además al expandir (2.35) e igualar con la relación recién encontrada obtenemos

$$\frac{d}{dt}\Big(p_x + iW\Big)\psi = 0 \tag{2.40}$$

con lo que hemos obtenido el generador Q en su forma canónica

$$\hat{Q} = \Big(p_x + iW\Big)\psi \tag{2.41}$$

Siguiendo el mismo procedimiento obtenemos

$$\hat{Q^*} = \Big(p_x - iW\Big)\psi \tag{2.42}$$

y utilizando las relaciones $\big[P_i, X_j\big] = -i\delta_{ij}$ y $\big\{\psi, \psi^*\big\} = 1$, ya que ψ y ψ^* representan la parte fermionica de la teoría, se verifica que

$$\begin{aligned} \Big\{\hat{Q}, \hat{Q^*}\Big\} &= P^2 + W^2 + 2\psi^* W'(x)\psi = 2H \\ \big[\hat{Q}, H\big] &= \big[\hat{Q^*}, H\big] = 0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

que es similar al álgebra encontrada en (2.17) pero ahora en la forma canónica. Hay que destacar que esta factorización nos permite sacar dos importantes conclusiones: que los autovalores del hamiltoniano son reales, ya que cumple con la propiedad de ser hermítico, y además, no tiene valores menores que cero para la energía.

Chapter 3

SUSY QM Semiclásica

En este capitulo intentaremos verificar si al aplicarle una transformación del tipo

$$S(\phi) = S_0(\phi) + \int dt \frac{\delta S_0}{\delta \phi} \delta\phi(x) \tag{3.1}$$

a una acción supersimétrica S_0 como la definida en (2.23), la nueva acción S sigue siendo invariante supersimétrica al tomar la variación del supercampo ϕ como un nuevo campo $\delta\phi = \bar{\phi}$ que vive en el mismo superespacio. Esta demostración es la parte central de esta práctica.

3.1 Derivación de la Acción

Tomamos como punto de partida la acción S_0 definida en (2.23) y al aplicarle la variación recien expuesta encontramos

$$\begin{aligned}
\bar{S}_0 &= \int dt d\theta d\theta^* \left[\left(\frac{1}{2} D_\theta \delta\phi \right)^* D_\theta \phi + \frac{1}{2} \left(D_\theta \right)^* D_\theta \delta\phi - f'(\phi)\delta\phi \right] \\
&= \int dt d\theta d\theta^* \left[\left(\frac{1}{2} D_\theta \bar{\phi} \right)^* D_\theta \phi + \frac{1}{2} \left(D_\theta \right)^* D_\theta \bar{\phi} - f'(\phi)\bar{\phi} \right]
\end{aligned} \tag{3.2}$$

ya que $\delta(D_\theta \phi) = D_\theta(\delta\phi)$.De esta manera, la nueva acción S resulta

$$S = S_0 + \bar{S}_0 \tag{3.3}$$

Ya sabemos, debido a su construcción, que la acción S_0 es invariante supersimétrica, es decir, $\delta S_0 = 0$, por lo que para que la nueva acción S también lo sea basta con verificar que $\delta \bar{S}_0$ también se anula para este tipo de transformaciones. Para esto, primero debemos encontrar la forma explicita de $\bar{S}_0$ y luego verificar si efectivamente $\delta \bar{S}_0 = 0$

Comenzamos definiendo el nuevo supercampo $\bar{\phi}$ de la misma manera que en (2.21)

$$\bar{\phi}(x,\theta,\theta^*) = \bar{x}(t) + i\theta\bar{\psi}(t) - i\bar{\psi}^*(t)\theta^* + \theta^*\theta\bar{D}(t) \tag{3.4}$$

y para la derivada invariante por componentes tenemos

$$D_\theta\bar{\phi} = i\bar{\psi} - \theta^*\bar{D} - i\theta^*\dot{\bar{x}} + \theta^*\theta\dot{\bar{\psi}} \tag{3.5}$$

Al igual que para derivar la acción en (2.23), sólo necesitamos los términos que contengan tanto θ como θ^*. Vemos primero el caso de $(D_\theta\bar{\phi})^* D_\theta\phi$ y utilizando las definiciones (2.22) y (3.5) encontramos

$$\begin{aligned}(D_\theta\bar{\phi})^* D_\theta\phi \quad &= \quad \theta\theta^*\big[i\bar{\psi}^*\dot{\psi} - i\dot{\bar{\psi}}^*\psi + i\bar{D}\dot{x} \\ &\qquad + \dot{\bar{x}}\dot{x} - i\dot{\bar{x}}D + \bar{D}D\big]\end{aligned} \tag{3.6}$$

habiendo despreciado los términos que se anularán al integrar sobre las variables de Grassman. De la misma forma encontramos

$$\begin{aligned}(D_\theta\phi)^* D_\theta\bar{\phi} \quad &= \quad \theta\theta^*\big[i\psi^*\dot{\bar{\psi}} - i\dot{\psi}^*\bar{\psi} - i\bar{D}\dot{x} \\ &\qquad + \dot{\bar{x}}\dot{x} + i\dot{\bar{x}}D + \bar{D}D\big]\end{aligned} \tag{3.7}$$

Para estudiar qué sucede con el término $f'(\phi)\bar{\phi}$, hacemos una expansión de la misma manera que en (2.28) pero en este caso tenemos

$$f'(x+\eta) = f'(x) + \eta f''(x) + \frac{\eta^2}{2}f'''(x) \tag{3.8}$$

y η es el mismo que definimos en el capítulo anterior.

Dado que estamos multiplicando por $\bar{\phi}$, debemos ver cuales términos dentro de esta multiplicación, y no sólo en la expansión de f'(x), contienen ambos θ y θ^* ya que estos términos no se anulan al integrar sobre las variables de Grassman. En primer lugar, para $f'(x)\bar{\phi}$ consideramos sólo

$$f'(x)\bar{\phi} = -\theta\theta^* f'(x)\bar{D} \tag{3.9}$$

Luego, para el segundo término consideramos

$$\eta f''(x)\bar{\phi} = \theta\theta^* f''(x)\big[\psi\bar{\psi}^* - \psi^*\bar{\psi} - D\bar{x}\big] \tag{3.10}$$

y finalmente para el tercer término tenemos

$$\frac{\eta^2}{2}f'''(x)\bar{\phi} = \theta\theta^* f'''(x)\frac{\big[\psi\psi^* - \psi^*\psi\big]}{2}\bar{x} \tag{3.11}$$

Ahora, si reemplazamos en (3.2) e integramos sobre θ y θ^* obtenemos

$$\begin{aligned}
\bar{S}_0 &= \int dt \frac{i}{2}(\bar{\psi}^* \dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}^* \psi) + \frac{i}{2}(\psi^* \dot{\bar{\psi}} - \dot{\psi}^* \bar{\psi}) + \dot{\bar{x}}\dot{x} + D\bar{D} \\
&\quad - f'''(x)\frac{\left[\psi\psi^* - \psi^*\psi\right]}{2}\bar{x} - f''(x)\left[\psi\bar{\psi}^* - \psi^*\bar{\psi}\right] \\
&\quad + f''(x)D\bar{x} + f'(x)\bar{D} \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Si vemos las ecuaciones de movimiento para D y $\bar{D}$ tenemos

$$\bar{D} + f''(x)\bar{x} = 0 \qquad (3.13)$$

$$D + f'(x) = 0 \qquad (3.14)$$

,vemos que nuevamente podemos hacer el reemplazo $D = -f'(x) = W(x)$, con lo que obtenemos $\bar{D} = W'\bar{x}$. Si procedemos al igual que en (2.31) y reordenamos (3.12) obtenemos

$$\begin{aligned}
\bar{S}_0 &= \int dt \big(\dot{x}\dot{\bar{x}} + \bar{\psi}^* \left[i\partial_t - W'(x)\right]\psi + \psi^* \left[-W''(x)\bar{x}\right]\psi \\
&\quad + \psi^* \left[i\partial_t - W'(x)\right]\bar{\psi} - WW'\bar{x}\big) \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

, habiendo utilizado además que $\psi^*, \psi, \bar{\psi}^*$ y $\bar{\psi}$ anticonmutan todos entre sí.

3.2 Energía, Momentos y Cargas Conservadas

Los momentos asociados al nuevo lagrangiano $L_0 + \bar{L_0}$ son

$$P_x = \dot{x} + \dot{\bar{x}} \qquad (3.16)$$

$$P_{\bar{x}} = \dot{x} \qquad (3.17)$$

$$P_\psi = i\psi^* + i\bar{\psi}^* \qquad (3.18)$$

$$P_{\bar{\psi}} = i\psi^* \qquad (3.19)$$

$$P_{\psi^*} = 0 \qquad (3.20)$$

$$P_{\bar{\psi}^*} = 0 \tag{3.21}$$

y el Hamiltoniano asociado es

$$\begin{aligned} H &= \frac{P_{\bar{x}}^2}{2} + P_{\bar{x}}\big(P_x - P_{\bar{x}}\big) + \psi^*(W'(x) + W''(x)\bar{x})\psi + \bar{\psi}^* W'(x)\psi \\ &\quad + \psi^* W'(x)\bar{\psi} + \frac{1}{2}W^2 + WW'\bar{x} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Ahora, debemos ver si la acción encontrada es o no invariante frente a una transformación supersimétrica y, en caso de que lo sea, encontrar las cargas conservadas asociadas a esta simetría. Para esto, realizamos el mismo procedimiento que en el capítulo anterior. Tenemos las relaciones ya encontradas en (2.38) y de la misma forma encontramos las variaciones para los nuevos campos asociados a $\bar{\phi}$

$$\begin{aligned} \delta\bar{\phi} &= i\big[Q\epsilon, \bar{\phi}\big] \\ &= -i\epsilon\big(i\partial_\theta - \theta^*\partial_t\big)\bar{\phi} \\ &= -i\epsilon\big(-\bar{\psi} - i\theta^*\bar{D} - \theta^*\dot{\bar{x}} + i\theta\dot{\bar{\psi}}\big) \\ &= \delta\bar{x} + i\theta\delta\bar{\phi} - i\delta\bar{\phi}^* + \theta^*\theta\delta\bar{D} \end{aligned} \tag{3.23}$$

comparando y al reemplazar $\bar{D} = W'(x)\bar{x}$ encontramos las relaciones buscadas:

$$\begin{aligned} \delta\bar{x} &= i\epsilon\bar{\psi} \\ \delta\bar{\psi} &= 0 \\ \delta\bar{\psi}^* &= -\epsilon(iW'\bar{x} + \dot{\bar{x}}) \end{aligned} \tag{3.24}$$

Para que el nuevo lagrangiano L sea invariabnte supersimétrico, nos basta con demostrar que $\delta\bar{L_0} = 0$, ya que está demostrado que L_0 lo es y $\delta L = \delta L_0 + \delta\bar{L_0}$. Calculamos la variación del lagrangiano $\bar{L_0}$ utilizando las relaciones recién encontradas explícitamente y obtenemos

$$\begin{aligned} \delta\bar{L_0} &= i\epsilon\dot{\psi}\dot{\bar{x}} + i\epsilon\dot{\bar{\psi}}\dot{x} - \epsilon\big(iW'\bar{x} + \dot{\bar{x}}\big)\big[i\partial_t - W'\big]\psi - \epsilon\big(iW + \dot{x}\big)\big[-W''\bar{x}\big]\psi \\ &\quad -\psi^*\big[-W''i\epsilon\bar{\psi}\big]\psi - \epsilon\big(iW + \dot{x}\big)\big[i\partial_t - W'\big]\bar{\psi} + \psi^*\big[-W''i\epsilon\psi\big]\bar{\psi} \\ &\quad -W'i\epsilon\psi W'\bar{x} - iWW''\epsilon\psi\bar{x} - iWW'\epsilon\bar{\psi} \\ &= \epsilon W'\bar{x}\dot{\psi} + \epsilon\dot{\bar{x}}W'\psi + \epsilon\dot{x}W''\bar{x}\psi + \epsilon W\dot{\bar{\psi}} + \epsilon\dot{x}W'\bar{\psi} \\ &= \epsilon\frac{d}{dt}\Big(W'\bar{x}\psi + W\bar{\psi}\Big) \end{aligned} \tag{3.25}$$

Este resultado muestra que el nuevo lagrangiano $L = L_0 + \bar{L_0}$ es invariante frente a transformaciones supersimétricas, ya que su variación al ser una derivada total con respecto al tiempo se puede despreciar por condiciones de borde.Ahora buscamos la carga conservada asociada a esta simetría. Utilizando (2.39) obtenemos la variación del lagrangiano total L

$$\delta L = \epsilon \frac{d}{dt}\Big(W\psi + W'\bar{x}\psi + W\bar{\psi}\Big) \tag{3.26}$$

Al igual que para L_0, utilizamos la relación (2.35) pero esta vez para L y expandiendo obtenemos

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{d}{dt}\sum_i(\delta X_i \frac{\partial L_0}{\partial \dot{X}_i}) \\ &= i\epsilon \frac{d}{dt}(\psi P_x + \bar{\psi} P_{\bar{x}}) \end{aligned} \tag{3.27}$$

Igualando con (3.25) obtenemos

$$\epsilon \frac{d}{dt}\Big(W\psi + W'\bar{x}\psi + W\bar{\psi}\Big) \quad = \quad i\epsilon \frac{d}{dt}(\psi P_x + \bar{\psi} P_{\bar{x}}) \tag{3.28}$$

y despejando encontramos la carga conservada $\hat{Q}$ asociada a esta teoría semiclasica

$$\hat{Q} = \Big(P_x + iW\Big)\psi + P_{\bar{x}}\bar{\psi} + i\Big(W'\bar{x}\psi + W\bar{\psi}\Big) \tag{3.29}$$

De la misma manera obtenemos

$$\hat{Q}^* = \Big(P_x - iW\Big)\psi^* + P_{\bar{x}}\bar{\psi}^* - i\Big(W'\bar{x}\psi^* + W\bar{\psi}^*\Big) \tag{3.30}$$

LLama la atención que en este caso el cálculo explícito de $\left\{\hat{Q}, \hat{Q}^*\right\}$ no reproduce el Hamiltoniano encontrado en (3.22). Esto plantea nuevas interrogantes para seguir trabajando en este problema, como por ejemplo, verificar si podría haber otras cantidades conservadas que hasta aqí no hemos encontrado o que estas transformaciones no produjeran traslaciones temporales.

Chapter 4

Conclusiones

Con lo encontrado en el último capítulo podemos decir que la conclusión es positiva, ya que se pudo demostrar que al aplicarle una transformación semiclásica a una acción asociada a SUSY QM, esta acción mantiene su invarianza frente transformaciones supersimétricas y con esto el sistema en cuestión mantiene la propiedad de tener un espectro de energía acotado con valores reales mayores que cero. Este resultado no es trivial y deja abierta la puerta a futuros trabajos.

También queda abierta la puerta a intentar factorizar el Hamiltoniano asociado a esta teoría de la manera $\left\{\hat{Q}, \hat{Q}^{*}\right\}$, ya que este tipo de factorizaciones son características de SUSY QM, tomando en cuenta que SUSY es una teoría de campos en cuatro dimensiones y SUSY QM es un acaso partícular en d=1.

Este último punto induce un nuevo problema, que sería el ver el comportamiento del modelo semiclásico aplicado a una teoría supersimétrica en más dimensiones.

Además, el caso visto en el apéndice muestra que la supersimétrica tiene aplicaciones prácticas en mecánica cuántica, ya que se puede resolver la ecuación de Schrodinger para potenciales muy conmplejos utilizando una relación de recurrencia.

Appendix A

Otro punto de vista para SUSY QM

En este apéndice veremos una utilidad práctica de SUSY QM, que si bien no fue necesaria para el desarrollo principal de la práctica, tiene importancia ya que permite resolver cierto tipo de problemas con potenciales muy complejos y por esta razón incluímos aquí algo de lo visto respecto a este tema [9]. Consideremos un Hamiltoniano del tipo

$$H_1 = -\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx} + V_1(x) \tag{A.1}$$

y que cumpla con la relación

$$H_1\Psi_0 = 0 \tag{A.2}$$

Si el Hamiltoniano orignal no cumple con esta relación, se puede realizar una traslación restando al Hamiltoniano original la energía base. Suponiendo cierta la relación (A.2) podemos despejar el potencial V_1 y obtenemos

$$V_1(x) = \frac{1}{2m}\frac{\Psi_0''}{\Psi_0} \tag{A.3}$$

Se define A y $A^\dagger$ en función del superpotencial W(x)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + W(x) \tag{A.4}$$

$$A^\dagger = -\frac{1}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + W(x) \tag{A.5}$$

Si utilizamos el ansatz $H = A^\dagger A$, vemos que podemos definir el potencial V_1 en funcion del nuevo potencial W

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{1}{\sqrt{2m}} W'(x) \tag{A.6}$$

Y comparando con la ecuacion (A.3) obtenemos

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \frac{\Psi_0'}{\Psi_0} \tag{A.7}$$

de donde además se puede comprobar que $A\Psi_0 = 0$.Construimos ahora un nuevo operador $H_2 = AA^\dagger$ con lo que obtenemos

$$H_2 = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx} + V_2(x) \tag{A.8}$$

con

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{1}{\sqrt{2m}} W'(x) \tag{A.9}$$

y V_1 y V_2 son conocidos como potenciales supercompañeros el uno del otro. Sin mucha dificultad se pueden derivar las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} H_2(A\Psi_n^{(1)}) &= E_n^{(1)}(A\Psi_n^{(1)}) \\ H_1(A^\dagger \Psi_n^{(2)}) &= E_n^{(2)}(A^\dagger \Psi_n^{(2)}) \end{aligned} \tag{A.10}$$

y de aquí, podemos encontrar la relación entre las funciones de onda y las energias asociadas a H_1 y H_2

$$\begin{aligned} E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)} \qquad &, \qquad E_0^{(1)} = 0 \\ \Psi_n^{(2)} &= [E_{n+1}^{(1)}]^{\frac{-1}{2}}(A\Psi_{n+1}^{(1)}) \\ \Psi_{n+1}^{(1)} &= [E_n^{(2)}]^{\frac{-1}{2}}(A^\dagger \Psi_n^{(2)}) \end{aligned} \tag{A.11}$$

Como ejemplo veamos la partícula libre de masa m en una caja de largo L. Para este caso, podemos definir el potencial como

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty \qquad && -\infty < x < 0\ ,\ x > L \\ &= 0 && 0 \leq x \leq L \end{aligned} \tag{A.12}$$

Este ejemplo es conocido y tiene una energía fundamental $E_0 = \frac{\hbar\pi^2}{2mL^2}$ y una función de onda

$$\psi_0 = (\frac{2}{L})^{\frac{1}{2}} sin(\frac{\pi x}{L}) \tag{A.13}$$

Si hacemos el cambio $H_1 = H - E_0$ la autofunción asociada queda

$$\psi_n^{(1)} = (\frac{2}{L})^{\frac{1}{2}} sin(\frac{(n+1)\pi x}{L}) \tag{A.14}$$

y la energía asociada a cada estado n del sistema es

$$E_n^{(1)} = \frac{n(n+2)}{2mL^2}\hbar^2\pi^2 \tag{A.15}$$

donde vemos que se cumple que $E_n^{(1)} = 0$. Utilizando (A.7) podemos encontrar el superpotencial W(x)

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{\pi}{L} cot\Big(\frac{\pi x}{L}\Big) \tag{A.16}$$

y con este superpotencial podemos encontrar el potencial V_2 utilizando (A.9)

$$V_2(x) = -\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}[2cosec\Big(\frac{\pi x}{L}\Big) - 1] \tag{A.17}$$

Utilizando (A.11) podemos encontrar la autofunción asociada a ψ^2. La ventaja de este metodo, es que nos permite encontrar la autofunción asociada a un sistema con un potencial tan complejo como el recién encontrado de manera sencilla.

Hasta ahora, no queda claro por qué este metodo puede tener algo que ver con supersimetría, pero esto quedará claro con el siguiente argumento.Podemos considerar una matriz diagonal Hamiltoniana de la forma

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix}$$

(A.18)

Si consideramos los operadores

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

(A.19)

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(A.20)

junto con H, vemos que se forma el superalgebra cerrada con las siguientes relaciones de conmutacion y anticonmutacion:

$$\begin{aligned} [H, Q] = [H, Q^\dagger] &= 0, \\ \{Q, Q^\dagger\} &= H, \\ \{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} &= 0 \end{aligned} \tag{A.21}$$

que representan el álgebra supersimétrica usual. Si bien en este ejemplo no se ve explicitamente que Q y Q^* intercambien grados de libertad bosónicos por fermiónicos, se puede hacer una extensión sin dificultad definiendo $Q = A\psi^\dagger$ y $Q = A^\dagger\psi$ donde ψ y ψ^* repreentan la parte fermionica de la teoría y cumplen $\{\psi, \psi^*\} = 1$. Haciendo esta extensión, se recupera el Hamiltoniano encontrado en (2.34)

Bibliography

[1] A. Pich, arXiv:0705.4264 [hep-ph].

[2] J. Alfaro and P. Labrana, Phys. Rev. D **65**, 045002 (2002) [arXiv:hep-th/0104137].

[3] S. Wieder, The Foundation of Quantum Theory, Fairleigh Dickinson University, Academic Press (1973)

[4] A. Salam and J. A. Strathdee, Fortsch. Phys. **26**, 57 (1978).

[5] F. Cooper and B. Freedman, Annals Phys. **146**, 262 (1983).

[6] F. A. Berezin, The Method of Second Quantization, Moscow State University, Acadenic Press (1966)

[7] M. E. Peskin D. V. Scroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Addison-Wesley (1995), cap. 2

[8] J. Wess J. Bagger, Supersymmetry and Supergravity, Princeton University Press (1983)

[9] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, *Singapore, Singapore: World Scientific (2001) 210 p*