Aspectos macroscópicos provenientes de leyes cinemática deformadas.

Aplicaciones de modelos efectivos para partícula libre en el vacío gravito-cuántico.

por

SEBASTIÁN EDUARDO GÁLVEZ AVENDAÑO

Tesis presentada a la Facultad de Física de la Pontificia Universidad Católica de Chile como requisito para optar al grado académico de Magíster en Ciencias Exactas con mención en Física.

Tesis presentada a la comisión integrada por los profesores:

Profesor Guia	Dr.	Jorge Alfaro
Comisión Examinadora	Dr.	Max Bañados
	Dr.	Olivier Espinosa

Abril, 2003

SANTIAGO – CHILE

por llenar

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

0. PREFACIO.

Frecuentemente se escucha decir que la física enseña a predecir fenómenos, a adelantar numeros medibles en el laboratorio, a modelar "lo que se ve por la ventana"... Sin embargo, es mi opinión personal que estas afirmaciones tienden a dejar un poco de lado la parte creativa del pensamiento de la física. Para la comunidad física, el deseo de explicar una causa, un fenómeno, un experimento, raramente induce un proceso cuyo único objetivo es el proponer un modelo predictivo para el fenómeno en cuestión. Si fuese así, variados descubrimientos revolucionarios no habrían visto la luz. Es cierto que los datos experimentales son necesarios para catalizar los descubrimientos científicos, pero a lo largo de la evolución de teorías fundamentales (La Cuántica para lo microscópico, y la Relatividad General en lo macroscópico), claramente fueron determinantes otras consideraciones de índole más teórico. No solamente fue el querer explicar los datos de la época, sino también el de proponer un marco teórico *autoconsistente, y elegante a la vez* que pudiera acoger estos mismos datos. No bastaba con agregar complejidad gratuita tal que se explicase los observables en cuestión; la explicación de estos debiera surgir de manera natural al considerar aquella teoría por descubrir. Fue así que las "grandes mentes" de la física (Einstein, Dirac, Heisenberg, ...) lograron extender la comprensión científica de la naturaleza: No solo buscaban modelos precisos basados en datos "duros", sino que estos "seguían su nariz´´ hacia lo desconocido, dejándose llevar por principios más evanecientes[1].

[1] por algo diría Einstein que la imaginación resulta ser más importante que la sabiduría ...

Bajo esta luz, es posible entender variados acontecimientos revolucionarios en la historia de la física, en los cuales tanto consideraciones de precisión respecto del modelo propuesto, como juicios estéticos respecto de la teoría subyacente, jugaron un rol importante. Por ejemplo, tanto en la astronomía geométrica de la Grecia antigua, como la justificación teológica de Maupertuis para los principios variacionales de la mecánica, e incluso el desarrollo de la cosmología primordial moderna basada en supuestos de simetrías universales, hubo simbiosis entre pensamiento "creativo" y preciosismo científico. Se lograba tanto predecir, como explicar, y a la vez maravillarse con la teoría propuesta. Como se ve en estos ejemplos, al querer el científico profundizar la comprensión de los fenómenos físicos, este debió complementar sus razonamientos basados en crudos dato experimentales con principios subjetivos más abstractos. La mente científica debió apelar a la imaginación, para así penetrar aun más en la descripción de la naturaleza.

La historia de la Física moderna nos a mostrado que tal manera de hacer ciencia cundió sus fruto, sobre todo en el contexto de teorías de física fundamental. Tanto la Relatividad General como la Cuántica le deben respeto a esta dimensión de la creatividad científica.

El trabajo aquí desarrollado se inspira por este espíritu constructivo.

1. RESUMEN DEL TRABAJO.

Este trabajo pretende extender ciertas ideas especulativas vigentes en la literatura física de actualidad, las cuales se basan en en un enfoque de teoría efectiva construida heurísticamente. Se presentaran las ideas medulares, para luego darles plausibilidad con el debido sustento teórico. Finalmente, se exhibirá un modelo particular que ilustra estos conceptos de manera explícita, en un contexto cinemático simplificado. A partir de este ultimo, se le extraerá consecuencias fenomenológicas.

Se perseguirá así extender la descripción cuántica de la naturaleza fundamental, vía incorporación de una cinemática de partícula libre modificada. Esta cinemática modificada, o "deformada", se justificara como proveniente de una incorporación de elementos gravito-cuanticos asociados a aspectos discretos del espacio-tiempo microscópico. Tal "deformación" cinemática se proyectara a nivel macroscópico vía la estadística de muchos cuerpos, posibilitando conocer aun más las consecuencias de la propuesta descriptiva empleada. A pesar de no contar con extensos fenómenos observados que ameriten ser explicados en este contexto[1], se verá como al dejarse guiar por principios heurísticos judiciosos, es posible vislumbrar aspectos característicos de la cinemática de partícula libre en el vació gravito-cuántico. Más aún, se hará explícito el tipo de implicancias que esto conlleva para estructuras macroscópicas.

En particular, visitaremos de nuevo el problema de Chandrasekhar, el cual establece equilibrio hidrostático para una conjunto de fermiones no in-

[1] volveremos a este punto en su debido momento ...

teractuantes, equilibrados por el campo gravitacional que estos engendran. Se verá, por lo menos a nivel formal, como las ideas nuevas por introducir se traducen ahora en una relaciones masa-radio que acepta una cota inferior para el radio. También se analizará las falencias de la descripción elaborada, y se explicitara propuestas para mejorar lo descrito. Finalmente, se discutirá aspectos del modelo de difícil interpretación, las cuales pudieran aludir a consecuencias profundas en un contexto cosmológico.

Estos fenómenos, entre otros más simples, forman parte medular de los resultados que serán presentados, y elaborados, en el transcurso de este trabajo.

Parte I

MOTIVACIÓN AL TEMA

2. TEORÍAS FUNDAMENTALES Y PRINCIPIOS DE HEURÍSTICA.

2.1. La Teoría Cuántica

La descripción moderna de las interacciones fundamentales acude a teorías cuánticas de gauge con un *modus operandi* conceptual bien particular, el cual acomoda en su lenguaje descriptivo nociones de indeterminismo, y *suma sobre historias*, entre otros. Eso si, tal como lo expresaba Bohr al invocar su principio de correspondencia entre *micro* y *macro* mundo, por muy extraña que resulte la Cuántica, sus predicciones deben coincidir—bajo condiciones características a los sistemas clásicos—con los resultados clásicos. Esto implica entonces que la naturaleza cuántica, aun que siendo correctamente descrita por operadores lineales sobre un espacios de Hilbert, debe poder *expresarse* en términos consistentes con un análisis clásico bajo aquellas condiciones de características clásicas (valga la redundancia). Así pues, se ve como desde los comienzos de la teoría cuántica, fue de relevancia considerar heurísticamente un criterio de "transición" entre ambas teorías. Para estos fines, la teoría cuántica introdujo la constante de Planck, la cual cuantificó esta transición fijando una escala de *acción* universal, la cual permitió establecer cuantitativamente el principio de correspondencia de Bohr. Este dice que en aquellos sistemas cuyas escalas de acción características sean mayores a $\hbar$, la descripción clásica basta para explicar los *observables* asociados. Análogamente, para aquellos sistemas cuyas escalas de acción sean mucho menor a $\hbar$, es necesario la teoría cuántica completa para acertar en la descripción de los *observables* relevantes del fenómeno.

Esta idea, la de establecer un "puente" entre la teoría desconocida (cuántica) y la conocida (clásica) vía algún principio guía, permitió pues ayudar en la construcción de la teoría cuántica completa, permitiendo tener nociones que sirviesen de apoyo para avanzar hacia la nueva comprensión física. La zona "nebulosa" de transición delimitada por una escala de acción $\sim \hbar$ marco así los limites de la validez descriptiva para la teoría clásica ahora desplazada. Así, aunque se considerase la descripción cuántica como **la** teoría correcta, y a la mecánica clásica como una consecuencia de ésta bajo cierto límite, la naturaleza física quedo particionada en dos tipos, cada uno explicable con su respectiva teoría. Desde un punto de vista fenomenológico, los eventos denominados cuánticos serían descritos por la Cuántica, y aquellos del índole clásico por la vieja y aún efectiva mecánica analítica clásica que tanto éxito había tenido en ordenar las ciencias naturales hasta entonces. Más aún, se estableció el régimen denominado *semiclásico* como aquel donde los fenómenos son descriptible en términos clásicos, a cambio de admitir "deformaciones´´ o "perturbaciones´´ de las ecuaciones y nociones clásicas conocidas[1].

2.2. La Relatividad General

Otro ejemplo notable donde también se tuvo que apelar a cierto criterio heurístico fue el descubrimiento de la Relatividad General. Esta, aun más que la teoría Cuántica, fue la obra de un intelecto brillante, pues por más que se diga que se conocía una inexplicable precesión del perihelio en la orbita de Mercurio, claramente no se requería refutar la gravedad de Newton para explicar las observaciones! Bastaba que elementos no considerados (orbitas de objetos oscuros por ejemplo) perturbasen las orbitas puras predichas por Newton (para un ejemplo, véase [1]), para que el fenómeno siguiese bajo

[1] Ecuaciones WKB para electrón semiclásico, o operadores de masa para electrones en red de cristalina ldots

el dominio descriptivo de la gravedad tal como se conocía hasta entonces. Sin embargo, haber aceptado la existencia de perturbaciones desconocidas solo agregaba complejidad a la descripción armoniosa de Newton. Al exigir Einstein[2] que la relatividad especial se cumpliese para **todo** observador—incluso para aquellos en la vecindad de fuentes gravitacionales—se dio inicio al descubrimiento de la geometrodinámica, la cual no solo presentaba una belleza particular, sino también explicaba la precesión. Así, una vez más se ve como para encontrar la teoría correcta, fue de suma utilidad la buena heurística y el agudo olfato de Einstein; el conjunto de datos de la anomalía solo recibió su merecida explicación en este contexto. Al igual que para la cuántica, mediante principios profundos y creativos, se logró extender los conceptos fundamentales de la física, generando un teoría con mayor poder predictivo/descriptivo que aquella desplazada.

Una vez más se delimito la fenomenología descriptible a aquellas manejables con las herramientas antiguas (calculo diferencial y geometría euclidiana), y a aquellas que requiriesen de las extensiones geométricas propias de la nueva teoría. Esta no solo trajo nuevas "ecuaciones", sino que tal como la Cuántica, trajo un nuevo marco conceptual. La gravedad general se vio obligada a introducir nociones nuevas en física, tales como un espacio-tiempo dinámico ligado al contenido energético en su "interior", o la noción de un universo en eterna expansión...

En analogía con la Cuántica y su régimen semiclásico delimitado por $\hbar$, las nuevas nociones introducidas por la teoría estarían delimitadas por una nueva escala de distancia. En aquellos sistemas donde las longitudes características fuesen mucho mayores que el radio de Schwarzschild[3] correspondiente

[2] al cual se le atribuye las palabras

> Any intelligent fool can make things bigger, more complex, and more violent. It takes a touch of genius – and a lot of courage – to move in the opposite direction.

[3] Para una configuración esférica, el radio de Schwarzschild representa aquel radio limite

al contenido energético, la vieja teoría de Newton seria el lenguaje descriptivo adecuado. Para el caso opuesto, donde el sistema de interés involucrase longitudes del orden del radio de Schwarzschild, entonces se haría imprescindible el uso de la teoría "completa" (hasta donde se cree completa...), con el despliegue de toda la parafernalia conceptual asociada.

2.3. *Unificación y unidades de Planck.*

Surgió como consecuencia natural el tratar de unificar estos dos gigante de la física -la cuántica y la gravitación de Einstein-, en una sola teoría que presentase el potencial de ambas. Que esta exhibiese no solo el potencial predictivo y descriptivo de cada teoría en su respectivo dominio de validez, sino además de un marco conceptual unificado que fuese capaz de incorporar la riqueza de la Cuántica, con la elegancia de la geometrodinámica. Para tratar de hallar tal teoría—suponiendo que exista—claramente se tendría que ser muy valiente, pues sin entrar en detalles, se vislumbran problemas profundos. Por ejemplo, la cuántica habla de interacciones **a través** del espaciotiempo, mientras que la gravedad describe **el** espacio-tiempo. Consecuentemente, a modo de facilitar el avance hacia una posible unificación gravito-cuántica, parece natural que cierto principio guía ha de ser invocado/inventado.

La literatura científica nos enseña que un enfoque a ciegas basado en meras consecuencias teóricas resulta inmensamente engorroso—incluso para los expertos *del área*—haciendo de aquellos caminos parciales basados en principios heurísticos **la** alternativa del momento (véase en particular el trabajo [2] sobre este punto, o en más alcance en [3]). Es por eso que se postula aquí que se debe proceder apoyándonos en toda piedra de apoyo razonable, que se encuentre a nuestra disposición. Es en este espíritu que centramos nuestro interés en las unidades de Planck.

Resulta que al incorporar las constantes universales propias de cada una

ínfimo del sistema que al ser cruzado, implica la constitución de un hoyo negro.

de las teoría presentadas ($\hbar$, c, G), surge un conjunto de unidades base denominadas unidades de Planck, reemplazando las MKS (o CGS) que delimitan la fenomenología de nuestro entorno cotidiano. Estas unidades se resumen en

$$\begin{aligned} m_{pck} &= \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} \simeq 1{,}2 \times 10^{19}\text{GeV} \\ l_{pck} &= \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{1/2} \simeq 1{,}6 \times 10^{-33}\text{cm} \\ t_{pck} &= \left(\frac{\hbar G}{c^5}\right)^{1/2} \simeq 5{,}4 \times 10^{-44}\text{s} \end{aligned}$$

las cuales aluden a fenómenos que ciertamente requieren una teoría unificada entre Gravedad y Cuántica.

Por ejemplo, para el caso de que se tenga solo una partícula fundamental, cuando su longitud de Compton (una característica cuántica) de esta

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc}$$

se iguala a el correspondiente radio de Schwarzschild (una característica gravitacional)

$$R = \frac{2Gm}{c^2}$$

se tiene que la interpretación usual exige que la partícula "forme" un hoyo negro, lo cual invalida el punto de partida que establecía que se trataba de una partícula fundamental. Salvo querer lidiar con *situaciones* como la ya descrita (o otra más explicada en el apéndice A), se requiere que las descripciones basada en los conocimientos de ambas teorías sean reformuladas.

A modo de ganar cercanía con tal reformulación, podemos "extrapolar" lo sucedido en las teorías fundamentales ya presentadas, y postular naturalmente que

- se asocia fenomenología gravito-cuántica a aquellos fenómenos descritos en ordenes de las unidades de Planck.

- postulamos que existen fenómenos *semiclásicos desde un punto de vista gravito-cuántico* los cuales puedan ser descritos solo incorporando deformaciones/perturbaciones a las ecuaciones/nociones ya conocidas.

Tomando en cuenta lo anterior, se cree poder ganar intuición al problema de la unificación mediante implementaciones fenomenológicas de estados gravito-cuánticos semiclásicos. En particular, en la literatura se ha tratado de postular una cinemática de partícula libre "deformada" que incorporase aspectos no estándar debido a aspectos no triviales del espacio-tiempo. Así, han surgido variados trabajos que tratan el temas de la fenomenología gravito-cuántica desde el punto de vista aquí esbozado. Estos trabajos han últimamente ganado confianza en el enfoque seguido pues ciertos datos recientes (gamma ray busts, UHECR y violación GZK entre otros /ldots) permiten ponerlos a prueba.

Se verá en este trabajo como tales deformaciones surgen, y se sustentan, en ciertas propuestas teóricas, y exploraremos algunas consecuencias de estas en un contexto astrofísico.

2.4. La situación actual.

El consenso actual es que la unificación no se ha logrado. Es cierto que han habido avances significativos que pretenden exhibir nociones de unificación, dejando un gran legado de conocimiento en el camino—léase teorías de cuerda, cuantización canónica de lazos, relación entre los invariantes de nudos (*knot theory*) y la Gravitación, etc.—pero nada concluyente ha surgido hasta ahora. Eso si, hay un consenso generalizado en el área: que las unidades de Planck deben aparecer de alguna forma en la descripción final, delimitando fenómenos donde ambas teorías—Cuántica y Gravitación—**deben** ser consideradas en unísono para una correcta descripción y comprensión.

En el trabajo aquí presentado, se tratara de explotar este hecho que delimita claramente los ordenes de magnitud característicos a una posible versión cuántica de la gravedad. Las deformaciones cinemáticas por presentar harán uso explícito de tales unidades tal que se permita la incorporación *a priori* de las magnitudes de Planck como frontera para las teorías convencionales (cuántica y gravedad). Adelantamos al lector que se trabajara en un marco de teoría efectiva, aceptando la posibilidad de que otra escala (que denotaremos por $\mathcal{L}$) posiblemente tenga relevancia[4] en un sentido por detallar.

[4] vía enfoque de coarse-graining microscópico

Parte II

SUSTENTO TEÓRICO

3. ENFOQUE TEÓRICO DEL TRABAJO.

Cualquier posibilidad de concebir algún principio guía razonable respecto de una posible unificación entre Gravedad y Cuántica, **debe** ser explotado. Se postula que de existir tal teoría unificadora, esta deberá incorporar las unidades de Planck de manera natural. También se asume la posibilidad de expresar *a lo menos* cierta fenomenología gravito-cuántica de forma *semi-clásica*, mediante deformaciones continuas de relaciones cinemáticas clásicas para partícula libre. Quizás no sea un camino muy "elegante" de enfrentar el problema de la cuantización gravitacional... No solo no se cuantiza nada, sino que además sucede que **no** se logra el ideal platónico: concebir una teoría madre que exhiba como consecuencia a las unidades de Planck como fundamentales... El enfoque proseguido aquí más bien impone *a priori* a las unidades de Planck como fundamentales... pero a falta de teoría completa, se verá como el forjar el enfoque efectivo aquí empleado, inspirado *a priori* en la relevancia de las unidades de Planck, se presenta como una alternativa menor con la cual efectuar avances interesantes. El poder generalizar/deformar ciertas ecuaciones usuales (en particular: relaciones de dispersión para partículas libres) a modo de extender sus dominios de validez hacia situaciones gravito-cuánticas *razonablemente*, y asegurarse que tal extensión sea de manejo semi-clásico, nos habilita para extraer fenomenología.

Tal fenomenología quizás no sea directamente observable por ahora, pero si debiera entregar nociones e intuiciones de potencial interés teórico. Más aún, dentro del contexto cosmológico, esta fenomenología seria de particular interés, pues variados parámetros de los modelos modernos dependen de evolución cósmica primordial, la cual solo concebir a través de especulaciones teóricas. Más aún, si uno pudiera *razonablemente* concebir extensiones genéricas (en el sentido de no depender fuertemente de algún supuesto, o que fuese interpretable bajo variadas perspectivas teóricas), uno podría pretender exhibir una fenomenología "universal" al fenómeno bajo estudio. Por "universal´´ se quiere dar a entender que aunque el detalle no este al alcance de la descripción, el grueso si lo este.

Por la naturaleza de lo propuesto entonces, se considerara situaciones que involucren partículas libres, y vía ciertas extensiones a sus relaciones energía-momento se pretenderá asociarles fenomenología no estándar. Más aún, al considerar situaciones macroscópicas formadas por muchas partículas libres, se pretenderá extraer consecuencias a las deformaciones desarrolladas en este trabajo. La naturaleza y justificación de las deformaciones en la cinemática de partículas libres, y su respectiva fenomenología asociada, forman parte central de este trabajo.

3.1. Un poco de historia.

A pesar de los casi nulos datos experimentales asociables a aspectos cuánticos de la gravedad, la búsqueda de modelos teóricos que incorporen aspectos tanto cuánticos, como gravitacionales, se presenta como uno de los más grandes desafíos de la física moderna. Tradicionalmente se han presentados escasos escenarios que pudieran requerir una gravedad cuántica; la descripción de la materia en tiempos primordiales cercanos al *Big Bang*, o la predicción de la radiación de Hawking para Agujeros Negros de manera estadística, claramente requieren un manejo que incorpore a la Gravedad Cuántica. Sin embargo, a pesar de la poca necesidad experimental, la búsqueda científica de una teoría que unifique las fuerzas fundamentales de la naturaleza en un solo marco conceptual sigue vigente. Tal búsqueda ha dejado una vasto legado de conocimiento, el cual hasta el día de hoy sigue en expansión. Por ejemplo, se ha tenido que estudiar aspectos técnicos formidables acerca de lo que se denomina "cuantizar una teoría", en la esperanza de poder proseguir con una cuantización exitosa de la gravedad. Los estudios basados en este enfoque, sobre todo aquellos basados en la cuantización canónica de Dirac para sistemas con constricciones, han dado nacimiento al lo que en la actualidad se denomina Loop Quantum Gravity, del cual tendremos más que decir en las secciones siguientes. Otra frente de avance hacia la gravedad cuántica de vigencia de estos días es aquella basada en teorías de cuerda, claro que estas no solo buscan una teoría cuántica de la gravedad, sino que también esperan construir una "teoría del todo"... Ahora bien, estos dos enfoques no solo ofrecen marcos conceptuales con potencial teórico, sino que teorías ofrecen terreno para elaborar razonamientos vía "handwaving"[1] y sacar resultados heurísticos a nivel efectivo. En particular, relaciones de dispersión energía-momento para partículas libres pueden ser exhibidas, las cuales pudimos interpretar como una manifestación efectiva (bajo supuestos por explicitar) de la teoría subyacente, proyectada a nivel cinemático.

Históricamente, la cuantización completa de la teoría electromagnética ilustró cuan útil puede ser la descripción canónica, a pesar de tratarse de una teoría relativista que no debiese resaltar un tiempo en particular. Recuérdese que la descripción canónica de la mecánica analítica requiere una función hamiltoniana H del cual el sistema obedece

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{3.1}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{3.2}$$

definiendo así (dado condiciones iniciales) la evolución futura. Este enfoque claramente exhibe un tiempo t, con lo que la evolución que surge al integrar el problema es referida a un cierto observador en particular. Análogamente, la teoría de campos clásica por excelencia, la electrodinámica, exhibe en su

[1] es decir que se elabora una línea de razonamiento heurístico más bien motivada en cautivar la atención, que de convencer por la fuerza de los argumentos.

versión $3+1$ canónica una densidad hamiltoniana $\mathcal{H}$, la cual permite definir la teoría según

$$\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \overrightarrow{E}} \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \overrightarrow{A}} \tag{3.4}$$

.

A través de las expresiones anteriores, es posible desarrollar un "algoritmos de cuantización" que resulto ser exitoso para promover las teorías "simples" (partículas libres, o campos de gauge no abelianos) a sus análogos cuantizados. No solo la cuántica no relativista fue así engendrada, según la vía canónica, sino que al incorporar cuántica y relatividad, Dirac fue capaz de introducir la noción de campos como un ingrediente fundamental de las interacciones (el famoso /textitmar de Dirac asociado a la partícula libre fermionica). Así pues, la cuantización canónica, a pesar de ambigüedades (de ordenamiento a nivel de operadores por ejemplo), paso a la historia como *EL* algoritmo de cuantización "par excelence"[2]. Más aún, la correspondencia clásica quedaba asegurada de un principio pues el algoritmo proponía partir con el hamiltoniano clásico de la teoría para luego cuantizar mediante la "operadorizacion" de este. Así pues, nada más natural que proseguir por esta vía para cuantizar la gravedad...

Así bien, a pesar de que la geometrodinámica se presta preferentemente a una descripción geométrica según

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{3.5}$$

la cual se interpreta en el marco de una variedad 4-dimensional con invariantes geométricos asociados a la física real, la exhibición de esta misma teoría en un marco canónico resulta ser relevante. Más allá de la justificación académica de reformular la teoría bajo otra luz, se encuentra la esperanza

[2] dejemos el enfoque covariante de la integral de camino de lado por ahora...

de hallar un posible camino hacia la cuantización de la gravedad según el algoritmo canónico. Eso si, se recuerda que tradicionalmente se ha cuantizado canónicamente las teorías libres (campo fermionica y bosonico), en donde las interacciones (asociadas a los términos no lineales del lagrangiano) se tratan perturbativamente. De este modo, se imito tal enfoque tomando a la gravedad como una teoría donde el campo a cuantizar es el $G_{\mu\nu}$ linealizado

$$G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

con $h_{\mu\nu}$ "pequeño", y se prosigue a elaborar una teoría descrita en base a bosones de spin 2, con autointeracción proveniente de los términos no lineales de la teoría clásica. Ahora, resulta un hecho interesante que a pesar de poder justificar este proceso acudiendo a la similitud del algoritmo empleado para forjar la QED, ocurre una grave desgracia. **La teoría resultante es no renormalizable**, lo que en pocas palabras significa que esta no puede tomarse en serio. Y así fue como a pesar de haber seguido el esquema canónico basado explicitar en cuantizar la teoría lineal, e incorporar perturbativamente lo nolineal, no se podía pretender haber encontrado una extensión cuántica a la gravedad.

Así fue como se abandono por años la idea de cuantizar la gravedad a lo Dirac. Aquellos lo suficientemente porfiados para insistir en promover a la gravedad a un marco cuántico ahora seguían otras vías, como la de incorporar mayores simetrías no observadas aun en la naturaleza (ej: la supersimetría), o buscar una teoría de cuerdas. Sin embargo, en 1984 se introdujeron unas nuevas variables para describir a la gravedad canónicamente, lo cual permitían expresar a la gravedad *como* una teoría de Yang-Mills con grupo de gauge SU(2), y según la elección particular de alguna constante (conocida como parámetro de Immirizi) se hacia polinomial la constricción Hamiltoniana. Este pues abría rutas insospechadas, las cuales fueron explotadas al máximo en la búsqueda de hallar una teoría cuántica para la gravedad. Así fue como resurgió la idea de enfocarse en el camino canónico para cuantizar la gravedad, pero esta vez dejar de lado el mantra admitido hasta la fecha para teorías cuánticas de campos: que la teoría fuese perturbativa por construcción. Un resumen de la teoría cuántica de lazos para la gravedad será expuesta en la sección siguiente, a modo de dejar justificado el modelo cinemático por ser usado en los cálculos más adelante.

Aprovechamos a hacer notar que los avances teóricos propuestos hacia una gravedad cuántica han sido recientemente asociados a ciertas anomalías. Amelino-Camelia *et al* hizo notar[3] que la detección en tierra de objetos denominados *gamma ray burts* pudiesen servir como medio para exhibir manifestaciones cuánticas de la gravedad. La idea central es que estos objetos extragalácticos sirven de “faroles” de muy alta energía, que al emanar fotones desde distancias tan lejanas, permiten que estos acumulen fenomenología no estándar al atravesar las distancias cosmológicas hasta llegar a la tierra. Aún se desconoce con certeza el origen de estos destellos, pero si se ha detectado estructura temporal en su pulsos del orden de los milisegundos. Amelino-Camelia hizo notar que tales estructuras pudieran tener un trasfondo asociados con procesos del índole gravito-cuántico. El hizo notar que bastaría deformaciones en las relaciones de dispersión usual para así otorgarles un“time delay” a los fotones, el cual pudiera explicar el “por que” de la estructura temporal. Más aún, esencialmente la misma idea aplicada para los rayos cósmicos de muy alta energía ($\gg 5 \times 10^{19} eV$) pudiese servir como explicación para la anomalía GZK, la cual esta asociada a el hecho que el fondo de micro ondas cósmico *debiera* disminuir drásticamente nuestra percepción terrestre de rayos cósmicos de energías altas. Así pues, no solo se ha iniciado en los últimos diez anos un nuevo auge a las teorías abstractas que proponen cuantizar a la gravedad, sino que se les ha vinculados con fenómenos medidos, los cuales pudieran estar exhibiendo aspectos gravito-cuánticos.

quistas explicitar en apéndice anomalía GZK en apéndice

En este trabajo de tesis se tratara de dejarle al lector un *background cultural* acerca de estos acontecimientos tanto teóricos como fenomenológicos actuales, para luego ver como podemos adelantarnos a la actualidad. Hasta ahora la literatura discute aspectos gravito-cuánticos encapsulados en de-

[3] amelino 1

formaciones de las relaciones energía-momento de partícula libre, las cuales aplicadas a fenómenos **microscópicos** que involucren a rayos cósmicos de alta energía

$$(\gg 5 \times 10^{19} eV)$$

, o a fotones energéticos

$$\gg\sim 10^{12} eV$$

, exhiben fenomenología no estándar la cual permite explicar ciertas anomalías aparentes. La idea de este trabajo es extender estos resultados al considerar situaciones **macroscópicas** basadas en partículas libres fermionicas. De este modo, se espera abrir un frente no explorado a la fenomenología cuántica, permitiendo aumentar la intuición que tales trabajos pueden ofrecerle a la física moderna.

Respecto del enfoque basado en la teoría de Cuerdas, no se hará más que indicar al lector hacia las referencias estándares. Solo en aquellos casos en donde coinciden predicciones de estas teórico con aquellas que surgen del enfoque de lazos se volverá a este tema. Este tratamiento se justifica en este trabajo no solo dado el poco manejo personal de los rudimentos de la teoría de cuerdas, sino que se percibe una “conflicto de intereses” inherente al esquema cuerdas respecto de los objetivos perseguidos en este trabajo. La teoría de cuerdas se sustenta esencialmente en reformular radicalmente los cimientos de la teóricos fundamental (a nivel de la acción fundamental, o de la dimensionalidad de la variedad fundamental. . .), para así cosechar una teoría mucho más rica, la cual incorporase la gravedad y la cuántica a la vez. Este trabajo esta más bien orientado en la otra dirección, en donde para cosechar resultados novedosos, se “obliga” que circunstancias extremas (altas energías, pequeñas escalas de longitud) sean expresables como deformaciones de resultados conocidos para contextos pequeñas. De esta forma, podemos avanzar modestamente vía el uso de conceptos reciclados, hacia regiones extremales que pudiesen exhibir rasgos debido a la teoría completa. Solo el uso juicioso de deformaciones basadas en alguna heurística acertada garantizara algún éxito en este camino.

Parte III

EL MODELO

4. DEFORMACIONES EN LAS RELACIONES DE DISPERSIÓN CINEMÁTICAS.

4.1. Medio de manifestación efectiva para la gravedad cuántica.

Se asume un marco de trabajo que en resumidas cuentas estipula la existencia de relaciones de dispersión deformadas para partículas libres. En aquellas situaciones donde las energías de estas partículas son lo suficientemente *altas* como para abordar el dominio de validez gravito-cuántico

$$(\lambda_{deBrolie} \sim \mathcal{L} \gg \ell_p)$$

, se hace necesario invocar una deformación de la relación de dispersión energía-momento usual. Aquí $\mathcal{L}$ sirve pues de escala semiclásica, en la cual los conceptos clásicos son aún validos, salvo correcciones perturbativas encapsuladas en las deformaciones por presentar. Se hace notar que al parecer se requiere algún observador absoluto con el cual definir objetivamente lo de "altas energías", así violando la simetría de Lorentz[1] que rechaza la idea de algún marco de referencia absoluto tipo *éter*. De existir tal marco, este seria naturalmente asociado con aquel sistema co-móvil con el fondo cósmico universal, a modo de conciliar la idea que esta deformaciones sean en algún modo fundamentales. También, estas deformaciones se construyen a modo de involucrar a las unidades de Planck explícitamente. De esta forma, se logra esconder toda manifestación significativa debido a las deformaciones a régimen de bajas energías[2], pero a su vez permitiendo que a régimen de altas

ligar con weave de parte teoría

ligar con MCBR frame

[1] tema tratado en apéndice C

[2] aunque esto sea lo deseado, en [4] se hace notar como no siempre se cumple ...

energías ($\sim$ de Planck), *si* las haya. A pesar del poco rigor involucrado en el enfoque seguido, se sustenta tal camino en los variados trabajos[3] que apuntan a que tales deformaciones son una consecuencia "natural" de los aspectos gravito-cuánticos del espacio-tiempo. De esta forma, se toma como hecho que la simetría de Lorentz que exhiben las relaciones de dispersión usuales se encuentra rota, por lo menos a nivel de la teoría efectiva construida.

Por el intermedio de un modelo explícito [5, 6] motivado en la Gravedad cuántica de lazos (Loop Quantum Gravity), se explotara la relación de dispersión microscópica deducida para una partícula fermionica, para luego incorporar física estadística correspondiente. El calculo se sustenta en suposiciones que reposan sobre un contexto semiclásico (denominados configuraciones de *weave*) del espacio tiempo, el cual es construido a partir del espacio cuántico representativo a la geometría plana subyacente (solo se considera una partícula en un espacio sin fuentes para $G_{\mu\nu}$). De esta forma, se podrá proyectar la física nueva asociada las deformaciones a nivel macroscópico mediante la descripción de sistemas de muchos cuerpos. El tipo de configuraciones consideradas serán aquellas propias de una descripción de estructuras estelares.

4.2. Relación de dispersión de interés para describir un gas de fermi "deformado"

Se considera relaciones de dispersión de la forma $\varepsilon_\pm$ (donde $\varepsilon_\pm$ denota la dependencia en helicidad para partículas de spin $\frac{1}{2}$), con

$$\varepsilon_\pm^2 = \eta c^2 p^4 + B^2 c^2 p^2 \pm 2\lambda c^2 p + m^2 c^4 \tag{4.1}$$

donde

$$\lambda = \frac{\kappa_5 \ell_p}{2\mathcal{L}^2}\hbar \qquad B^2 = 1 + \kappa_1\, \ell_p/\mathcal{L} \qquad \eta = \kappa_3 \frac{\ell_p^2}{\hbar^2}$$

[3] ver resumen teórico

y nos restringimos a estudiar el régimen relativista de altas energías. Bajo tal supuesto, esta en nuestro interés escribir la ecuación 4.1 en su forma simplificada

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\pm}^2 &= c^2p^2\left(B^2 + \eta p^2 \pm \frac{2\lambda}{p} + \frac{m^2c^2}{p^2}\right)\\ &= c^2p^2\left(1 + \left\{\kappa_1\, \ell_p/\mathcal{L} + \eta p^2 \pm \frac{2\lambda}{p} + \frac{m^2c^2}{p^2}\right\}\right)\end{aligned}$$

para luego tratar perturbativamente el termino dentro de las llaves. De esta forma, se logra la expresión aproximada

$$\varepsilon_{\pm} \simeq cp\left(B + \frac{1}{2}\eta p^2 \pm \frac{\lambda}{p} + \frac{m^2c^2}{2p^2}\right) \tag{4.2}$$

que usaremos en lo que sigue, dado que solo nos interesa estudiar fenómenos de alta energía.

El modelo aquí expuesto corresponde al resultante de une esquema de aproximación particular que asume un régimen semiclásico para la propagación de neutrinos de majorana, tratados *a la* Loop Quantum Gravity [5]. En este trabajo se prosigue bajo la luz de considerar este resultados como representativo de lo que la teoría de lazos tiene que decir para propagación libre de partículas de spin semientero. De este modo, haremos extensivo este resultado a partículas fermionicas, a modo de otorgarle validez para describir electrones y nucleones.

La ecuación 4.1 exhibe explícitamente la escala $\mathcal{L}$, la cual debe entenderse como una escala de “coarse graining” para los estados cuánticos microscópicos subyacentes a la teoría. Su naturaleza por ahora nos es desconocida, pero se asume que tal escala pudiera emerger de promedios sobre aspectos no triviales del vacío gravito-cuántico para el espacio-tiempo. Aquella física que involucra una escala de distancia mayor que $\mathcal{L}$ puede considerarse en un contexto descriptivo de espaciotiempo continuo con geometría clásica. En consecuencia, aquellos fenómenos con escalas menores a $\mathcal{L}$ están fuera de un marco descriptible canónico, y por ende requieren de una lenguaje y operatoria fuera del alcance que otorgan las relaciones clásicas... Tales fenómenos exóticos (descripción del universo temprano [7], radiación de Hawking, etc...) claramente requieren de una teoría completa, la cual aún no se conoce. Sin embargo, como se verá en este trabajo, bajo supuestos semiclásico en un contexto "mesoscópico" de la gravedad cuántica (pues no se considera l_p—lo cual delimita aspectos *microscópicos* de la gravedad fundamental—sino que $\mathcal{L}$, la cual más bien se asocia con aspectos mesoscópicos) se es posible hacer predicciones tanto cualitativas como cuantitativas.

Para completitud con la literatura, se hace notar que en principio, los coeficientes λ, η y B pudieran ser especie-dependientes; así, en particular con

$$\lambda = \eta = 0 \quad \text{y} \quad B \to B_i$$

[4] se obtiene el esquema con violación de la simetría de Lorentz de Coleman y Glashow [8]. Este modelo a acaparado el interés de la literaturas puesto que surge al tratar de extender el modelo estándar, sin apelar a nociones de gravedad. Más aún, en [4] se argumento que el modelo de Coleman y Glashow es aquel con mayor sustento experimental.

Este tipo de deformaciones se presentan no solo en aquellos esquemas motivado en lo gravito-cuántico, sino que genéricamente en todo intento de modificar el modelo estándar violando simetrías "sagradas" (cosa estudiada por ejemplo en [9], lo cual no asume consideraciones gravitacionales). Así, en principio los resultados por obtener en este trabajo son también validos para toda posible extensiones del modelo estándar que incorpore deformaciones del invariante $p_\mu p^\mu$ similares a las exhibidas en 4.1 o 4.2.

[4] donde (i) rotula la especie en cuestión; por ejemplo fotón, quark, neutrino, ...

Parte IV

APLICACIONES

5. EL PROBLEMA DE CHANDRASEKHAR.

Presentamos el problema de Chandrasekhar, a modo de motivar los cálculos que presentaremos. Estos persiguen extender los resultados que surgen al considerar este problema importante de la astrofísica.

5.1. *El problema.*

Al considerar en un marco conjunto a las características propias de un sistema de muchos cuerpos (en particular de fermiones), como también los requerimientos para que exista un equilibrio hidrostático estelar, Chandrasekhar pudo predecir objetos astrofísicos bien particulares. Estos sistemas —hoy en día conocidos como enanas blancas (si la presión de degeneración proviene de electrones) o estrellas de neutrones (si la presión de degeneración proviene de nucleones)— son consecuencia de que tanto la gravedad, como la cuántica cooperan para configurar un equilibrio del fluido material estelar; mientras la gravedad comprime, la presión de degeneración compensa. De este modo, Chandrasekhar relativisó la premisa comúnmente difundida que dice que *la gravedad solo actúa sobre lo grande, mientras que la cuántica solo dicta lo pequeño*, mostrando como ambas teorías **pueden** servir en unísono para entregar una descripción teóricas de configuración estelar. Para entender estos sistemas, se debe trabajar en un contexto de evolución/configuración estelar, lo que implica manejar ecuaciones hidrodinámicas de sistemas autogravitantes, y tomar en cuenta la ecuación de estado del fluido material bajo estudio. Al establecer las condiciones de equilibrio, emergen resultados que pueden ser resumidos en una relación masa-radio, que hace explícito la existencia de una masa limite para tales sistemas en equilibrio (véase tratamiento formal de [10], o en su versión informal y entretenida presentada en [11]).

Para complementar las ecuaciones de la hidrodinámica del fluid material, se incorpora las expansiones debido a la presión de degeneración mediante una ecuación de estado semiclásica (no intervienen operadores, solo observables) $P(\rho)$ adecuada. De este modo, al establecer el equilibrio se hace explícito como al contrarrestar la contracción gravitacional proveniente del auto-campo engendrado, se engendran solo ciertas geometrías hidrodinámicas posibles. Al escribir este resultado expresado en base a la masa y radio correspondiente, se logras así una relación $M(R)$, la cual exhibe una sola masa limite posible a medida que las densidades $\rho \to \infty$. Esta característica notable define la masa de Chandrasekhar.

En términos resumidos, para el caso de grandes masa/energía[1] se tiene que como buena aproximación, la ecuación de estado se torna politrópica $P = \rho^{\gamma}$ con índice adiabático γ. En un contexto Newtoniano se tiene que $\gamma = \frac{4}{3}$, mientras que en el enfoque de la gravitación general se tiene $\gamma = 1$. Con tales resultados, se concluye el análisis hidrostático con la existencia de configuraciones limites en donde aparece el concepto de la masa de Chandrasekhar, siendo esta la masa máxima que puede adquirir una estrella viable, sostenidas por el equilibrio entre su gravedad, y presión de degeneración. Obviamente, estos modelos simplificados, con solo presión de fermi y gravedad, constituyen solamente el inicio de las descripciones más detalladas de las estrellas altamente densas [12]. Esta temática no solo presenta relevancia en un contexto astrofísico, sino que también en el ámbito de teorías fundamentales de interacción. Esto pues los sistemas cosmológicos se presentan actualmente como las únicas vitrina hacia fenomenología de extrema alta energía. get reference

[1] i.e. que la energía de fermi involucrada sea mucho mayor que las energías en reposo de las partículas.

5.2. Extensión en un contexto de cinemática deformada.

La idea involucrada en la descripción, y comprensión, de estos objetos estelares exóticos se basa en la fuerzas gravitacionales, actuando clásicamente (como campo de fuerza vectorial/tensorial) sobre materia que exhibe los aspectos macroscópicos provenientes de la naturaleza cuántica de sus constituyentes microscópicos. Claramente no se trata, ni remotamente, de una descripción que involucre aspectos cuánticos de la gravedad! Sin embargo, en este trabajo se argumentará que aquellas configuraciones limites que surgen en los estudios para sistemas *tipo Chandrasekhar*, pueden considerarse sistemas que potencialmente exhiben aspectos fenomenológicos de la gravedad cuántica. Esto pues al incorporar ideas recientes acerca de las fenomenología gravito-cuántica a nivel microscópica, se verá como es posible proyectar ésta a nivel de ecuaciones de estado para materia altamente densa. Se demostrará entonces que a medida que exista equilibrio hidrostático estelar para tal materia—ahora descrita en un contexto que incorpora riqueza adicional debido a aspectos gravito-cuánticos—, se debiera aceptar consecuencias novedosas para el sistema macroscópico global.

Para poder elaborar tal trabajo, se presentara un modelo particular que incorpora una deformación cinemática microscópica, la cual se propaga hacia lo macroscópico a medida que uno modela el sistema de muchos cuerpos.

6. ESTRUCTURA ESTELAR DE UN GAS DE FERMI DEFORMADO: MARCO DE NEWTON.

Bajo la premisa de una degeneración cuántica absoluta en la materia que constituye el fluido gravitacionalmente sostenido, se puede fácilmente establecer aquellas características físicas tal que el sistema sea viables y estables. Las fuerzas relevantes para forjar tales sistemas vienen dadas por la gravedad y la respectiva presión de fermi. La presión de degeneración se manifiesta a través de una ecuación de estado (EdE) la cual bajo supuesto de degeneración completa, nos permite trabajar con $T = 0$. De este modo la EdE se reduce a una relación de un solo grado de libertad termodinámico $P(\rho)$ de fácil manejo. Respecto de las fuerzas gravitacionales, se adoptara por ahora el marco de Newton, para luego tomar las extensiones debido al marco de Einstein en la sección 7. Así, el fluido material en cuestión servirá tanto como fuente de gravedad debido a su contenido de materia (Newton) como de energía (Einstein), las cuales quedan expresadas en sus respectivas distribuciones ρ_{masa} y $\rho_{energia}$.

Debido a la naturaleza perturbativa de los términos correctivos en las relaciones de dispersión deformadas, es de sospechar de antemano que solamente objetos altamente densos serán de relevancia para exhibir consecuencias de estas. Así, se torna natural enfocarse en los modelos teóricos propios a los estudios de las enanas blancas y estrellas de neutrones, o quizás incluso estrellas *extrañas*[1]. Se verá en lo que sigue de este capítulo como las descripciones teórica basados en modelos estelares simplificado—donde solo se considera

[1] Strange stars, también conocidas como *quark star*; ver capítulo 8 de [12]

la presión de degeneración en la EdE—adquieren fenomenología no estándar al incorporarse las deformaciones provenientes de la gravedad cuántica motivada en la teoría de lazos.

6.1. EdE politrópicas: enanas blancas deformadas.

Las enanas blancas son caracterizadas por ser forjadas a partir de la presión de degeneración electrónica, en donde se considera a la materia estructurada en su forma atómica. Así, por cada átomo en la red cristalina, se tiene por un lado a los electrones que ofrecen presión de fermi, y por otro lado a los nucleones, que al ser mucho más pesados, son aquellos responsables de engendrar la gravedad. Bajo un enfoque de Newton, que resulta ser una muy buena aproximaciones para las enanas blancas , consideraremos a ρ como la densidad de masa, la cual solo incorpora a la masa nuclear. Así, considerando materia cuyos átomos constan de Z electrones y peso atómico Am_n (A es el peso atómico, y m_n es la masa de los nucleones), se tendrá entonces que la densidad de masa resulta ser

argumentar en caso no deformación

$$\rho = \left(\frac{N}{V}\right)\frac{Am_n}{Z} \tag{6.1}$$

donde $\frac{N}{V}$ es la densidad de electrones por volumen de materia. Obviamente, esta densidad se relaciona directamente con el radio de la esfera de fermi en espacio momento según

$$p_f = \left(3\pi^2\hbar^3\right)^{1/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3} \tag{6.2}$$

. Tal configuración de partículas tiene a su vez un contenido energético macroscópico debido a la energía cinética de los constituyentes microscópicos, por ende

$$E = 2V\int_0^{p_f}\varepsilon_{\pm}(p)\frac{p^2dp}{2\pi^2\hbar^3}$$

lo cual al ser expandido apropiadamente para un régimen de alta energía considerando la relación 4.2 queda como

$$
\begin{aligned}
E &= 2V \int_0^{p_f} \left(B\frac{cp^3}{2\pi^2\hbar^3} + \eta\frac{cp^5}{4\pi^2\hbar^3} \pm \lambda\frac{cp^2}{2\pi^2\hbar^3} + \frac{m^2c^3p}{4\pi^2\hbar^3} \right) dp \\
&= 2V \left(B\frac{cp_f^4}{8\pi^2\hbar^3} + \eta\frac{cp_f^6}{24\pi^2\hbar^3} \pm \lambda\frac{cp_f^3}{6\pi^2\hbar^3} + \frac{m^2c^3p_f^2}{8\pi^2\hbar^3} \right)
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

.

Dado que solo consideramos el estado de fermi fundamental para la configuración electrónica, reemplazamos p_f por su valor según 6.2, lo cual permite que la ecuación 6.3 arroje una forma polinomial en términos de $\frac{N}{V}$

$$
E = V \left(B\bar{\alpha} \left(\frac{N}{V}\right)^{4/3} + \eta\bar{\beta} \left(\frac{N}{V}\right)^2 \pm \lambda c \left(\frac{N}{V}\right) + \bar{\gamma} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \right)
$$

donde

$$
\bar{\alpha} = \frac{3}{4}\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{1/3}(\hbar c) \qquad \bar{\beta} = \frac{3}{2}\frac{\pi^2\hbar^3 c}{g} \qquad \bar{\gamma} = \frac{3}{4}(6\pi g)^{1/3}\frac{m^2c^3}{\hbar}
$$

.

Tal resultado nos permite así calcular una presión de degeneración según la característica relación definitoria de una presión macroscópica

$$
P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_N
$$

que en este caso resulta ser

$$
P = \frac{1}{3}B\bar{\alpha}\left(\frac{N}{V}\right)^{4/3} + \eta\bar{\beta}\left(\frac{N}{V}\right)^2 - \frac{1}{3}\bar{\gamma}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}
$$

.

Finalmente, vía uso de la relación 6.1, se concluye con la ecuación de relevancia para los fines de este trabajo: una EdE $P(\rho)$

$$
P = \alpha\rho^{4/3} + \beta\rho^2 - \gamma\rho^{2/3} \tag{6.4}
$$

en donde se ha usado la relación 6.1 para sustituir $\frac{N}{V}$ por ρ, y se ha introducido las constantes

$$\alpha = \frac{B\pi^{2/3}\hbar c}{12}\left(\frac{3Z}{Am_n}\right)^{4/3}$$
$$\beta = \frac{\eta\pi^2\hbar^3 c}{2}\left(\frac{Z}{Am_n}\right)^{2}$$
$$\gamma = \frac{(12\pi)^{1/3}}{4}\frac{m^2c^3}{\hbar}\left(\frac{Z}{Am_n}\right)^{2/3}$$

.

Se hace notar que el termino λ ha desaparecido de los resultados, a pesar de estar presente en la ecuación 4.1. El resultado 6.4 no involucra a λ debido a consecuencias del tratamiento newtoniano; se verá que tal evento ya no ocurre al trabajar bajo la luz de la teoría general de la gravitación. Esta simplificación nos permite así justificar el trato ambiguo que se ha hecho de $\varepsilon_\pm$, pues se debiera en el estricto rigor haber expresado $E = E_- + E_+$ dónde E_i solo considera la energía proveniente de los estados de helicidad (i). Así, de haber asimetrías en la distribución de los estados (i) (vía una ruptura de la simetría de paridad), se tendría que tomarlos en cuenta para un calculo de E. Sin embargo al ser el termino proporcional a λ independiente del volumen v, este no contribuye a la presión de degeneración. Recordemos que este termino es aquel que en el contexto Gamibi y Pullin [13] proviene al considerar como aceptable una violación a la simetría bajo paridad en el distribución de vértices de la red que constituyen el weave [13]. Se ve entonces que para los fines de describir una enana blanca, tal posible peculiaridad no es relevante, pues no se manifiesta a nivel de EdE.

La EdE aquí exhibida ha de ser ahora considerada al establecer un equilibrio hidrodinámica para configuración esférica. A través de la ecuación relevante para el equilibrio hidrostático del fluido material

$$\rho^{-1}\nabla P = -\nabla\phi \tag{6.5}$$

donde el potencial gravitacional de Newton satisface

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$$

y complementadas con la respectiva EdE 6.4 asumiendo simetría esférica, se obtiene la ecuación medular

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(\frac{r^2}{\rho}\partial_r P\right) = -4\pi G\rho \tag{6.6}$$

con lo que se prosigue a calcular las configuraciones posibles. De hecho, al incorporar las condiciones de borde natural para estrellas de radio R

$$P\left(r\right)_{r\to R} = 0,\ \text{ lo que define el radio.} \tag{6.7}$$

$$\left.\frac{dP}{dr}\right._{r\to 0} = 0,\ \text{ establece presión máxima en el centro.} \tag{6.8}$$

la ecuación 6.6 define un problema matemático preciso por resolver. Habiéndose integrado el problema, se establece así la relación masa-radio que investigaremos en lo que sigue.

6.1.1. La masa de Chandrasekhar

En los cálculos usuales sin considerar deformaciones tipo 4.1 (equivale a $B\to 0$ y $\beta\to 0$), el termino dominante en la EdE se presenta como una politrópica con índice adiabático $\gamma = \frac{4}{3}$

$$P = \alpha\rho^{4/3}$$

. De este modo, el problema hidrodinámico descrito en 6.6 se torna

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\left(\frac{4}{3}\alpha\rho^{-2/3}\right)\partial_r\rho\right) = -4\pi G\rho \tag{6.9}$$

, lo cual podemos manejar vía reescalar las variables de manera adimensional según

$$r = Rx$$

$$\rho\left(r\right) = \rho_0 f\left(x\right)$$

donde R será definida como el radio de la estrella, pues imponemos que $f\left(x\right)|_{x=1}=0$.

Agrupando términos

$$\frac{1}{x^2}\partial_x\left(x^2\left(f^{-2/3}\right)\partial_x f\right)=-\left(\frac{\pi G}{3\alpha}R^2\rho_0^{2/3}\right)f$$

notamos que si

$$\rho_0\rightarrow\left(\frac{3\alpha}{\pi G}\right)^{3/2}\frac{1}{R^3} \tag{6.10}$$

entonces $f\left(x\right)$ satisface

$$\frac{1}{x^2}\partial_x\left(x^2\left(f^{-2/3}\right)\partial_x f\right)=-f \tag{6.11}$$

. Consecuentemente, se ve que $f\left(x\right)$ es una función *sin dimensión* la cual queda definida enteramente por la ecuación anterior, y las respectivas condiciones de borde

$$f\left(x\right)|_{x=1}=0 \tag{6.12}$$

$$\frac{df}{dx}|_{x=0}=0 \tag{6.13}$$

De este modo, la masa de la estrella queda escrita como

$$\begin{aligned}M&=4\pi\int_0^R\rho\left(r\right)r^2dr=4\pi\rho_0R^3\int_0^1 f\left(x\right)x^2dx\\&=4\pi\left(\frac{3\alpha}{\pi G}\right)^{3/2}\int_0^1 f\left(x\right)x^2dx\end{aligned}$$

con lo que se concluye —al omitir factores numéricos incluyendo la integral sobre f— la relación que establece el orden de magnitud

$$M\sim\left(\frac{\alpha}{G}\right)^{3/2}$$

.

Al no exhibir dependencia del radio, y solo aceptar una masa fija posible, se conlleva a la existencia de la masa limite de Chandrasekhar. La naturaleza de tal masa limite quedara mejor definida al considerar el esquema variacional explicitado en el apéndice B, el cual permite incorporar las EdE 6.4 entera (con o sin términos deformados), haciendo manifiesto que esta masa aquí deducida *es* la mayor masa posible para sistemas físicos viables.

6.1.2. De masa limita a radio limite...

En el caso de considerar las deformaciones en cuestión, la EdE 6.4 sigue presentando un limite dominante tipo politrópico para el régimen de alta energía,

$$P_{\rho\to\infty} \sim \beta\rho^2$$

salvo que ahora el índice adiabático resulta ser $\gamma = 2$. Tal EdE politrópica permite que el problema 6.6 presente una solución exacta[2], pues el problema 6.6 se lleva a

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\left(2\beta\right)\partial_r\rho\right) = -4\pi G\rho \tag{6.14}$$

la cual podemos resolver con

$$\rho\left(r\right) = \frac{M}{4R^2}\frac{\sin\left(\pi\frac{r}{R}\right)}{r} \tag{6.15}$$

en donde se otorga sentido físico a $r \in (0, R)$ a modo de satisfacer las condiciones de borde.

La solución 6.15 tiene la notable característica de exhibir un radio fijo,

$$R_\eta \equiv \pi\left(\frac{\beta}{2\pi G}\right)^{1/2}$$

independiente de la masa del sistema. Así, esta solución se comporta de manera complementaria a la solución de Chandrasekhar la cual presenta una *masa* limite, mientras que la solución 6.15 presenta un *radio* limite.

[2] en términos de funciones simples, y no acudiendo a funciones de Lane-Emden como ocurre para γ genérico.

En términos de orden de magnitud, el radio limite se expresa como

$$R_\eta^2 = \kappa_3 \frac{\pi^2 Z^2}{8A^2} \left(\frac{m_{pck}}{m_n}\right)^2 \ell_p^2 \sim \left(\frac{m_{pck}}{m_n}\right)^2 \ell_p^2$$

lo cual se lleva a

$$R_\eta \sim 10^{-16}\mathrm{m}$$

con lo que se despliega el radio limite en cuestión. Resulta interesante el hecho que este radio sea del orden de la física nuclear; a pesar del inmensamente pequeño valor η, la "predicción" del calculo para el radio limite asociado se presenta razonable desde un punto de vista físico... ¡Por lo menos se trata de escalas de longitudes relevantes para describir la naturaleza que conocemos! en particular la física nuclear. Obviamente, el modelo aquí esbozado tiene muy poco sentido físico, pues se ha dejado de lado varios hechos que **debieran** ser considerados para describir configuraciones tan "exóticas" como la recientemente presentada. De hecho, no hemos incorporado la neutronización[3] que claramente debe considerarse al tratar de estrellas tan densas. Aún más, como se verá más adelante, este sistema geométrico se encuentra dentro de su horizonte de eventos, con lo que se invalida masivamente —valga la redundancia— el modelo aquí descrito en su contexto newtoniano.

Nótese que el radio limite aquí presentado define una cota inferior[4] para densidades másicas. Esto pues en orden de magnitud

$$\rho \sim \frac{M}{R_\eta^3} \sim 10^{75} \frac{g}{cc}$$

lo que surge al tomar $M \sim M_\odot$ que en orden corresponde a la masa de Chandrasekhar. Esta densidad es de ser comparada con aquella densidad que hace dominante (en orden de magnitud) a los términos perturbativos del la EdE 6.4. De la EdE en cuestión, se ve que el termino proporcional a β

[3] reacciones β-inversa que hacen que la materia de la estrella se transmute a neutrones vía la conversión $p + e \to n$.

[4] en un sentido de orden de magnitud $\sim \frac{M}{R_\eta^3}$

domina bajo condición de que

$$\rho \sim \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{3/2} \sim \frac{m_n}{\ell_p^3} \sim 10^{74}\frac{g}{cc}$$

o mayor. En consecuencia, en cuanto se adquieren tales altas densidades, los términos provenientes de las deformaciones mandan, estipulando la existencia del radio limite. Curiosamente, las densidades aquí necesarias para hacer exhibir los efectos provenientes de la gravedad cuántica manifestada en las deformaciones, son "sub-planckianas". Esto pues por vía de las unidades de Planck, es posible definir una densidad

$$\rho_{pck} \sim \frac{m_{pck}}{\ell_p^3} \sim 10^{93}\frac{g}{cc}$$

, lo cual es bastante mayor que las densidades limites que surgen en 6.1.2. Así, a pesar de la poca relevancia como modelo preciso para estrellas "reales", este esquema de calculo esta exhibiendo fenomenología ligada a la naturaleza gravito-cuántica a escalas no planckianas.

6.1.3. Interpretación de Sakharov para R_η

El hecho de que a densidades de Planck exista fenomenología macroscópica nueva admite una interpretación interesante elaborada por Andrei Sakharov (véase por ejemplo la referencia citada en el capitulo 6.1 de [14]). Considérese un conjunto de partículas fermionicas tales que en promedio haya una partícula por "celda" de volumen ℓ_p^3. Como visto en la ecuación 6.2, este sistema relativista presentara un momentum (y por ende una energía) de fermi que permite escribir su energía de fermi según

$$\epsilon_f = cp_f \sim \frac{c\hbar}{\ell_p}$$

a partir de la cual, para fines de interacción gravitacional, podemos estimar una masa efectiva

$$m_{eff} = \frac{\epsilon_f}{c^2}$$

. De este modo, entre dos partículas cualquiera existirá una interacción gravitacional que podemos evaluar como

$$\epsilon_g \sim G\frac{m_{eff}^2}{\ell_p} = G\frac{\epsilon_f^2}{c^4\ell_p}$$

. Así, en orden de magnitud, la interacción *microscópica* debido a la gravitación queda cuantificada como

$$\epsilon_g \sim \frac{G}{\ell_p c^4}\frac{(\hbar c)^2}{\ell_p^2}$$

lo cual al considerar que $\ell_p^2 = \frac{\hbar c}{\ell_p}$ queda como

$$\epsilon_g \sim \frac{\hbar c}{\ell_p} = \epsilon_f \qquad !$$

. De esto ultimo, se concluye que cualquier sistema que adquiere densidades de Planck, presentara un $\epsilon_g \sim \epsilon_f$, lo que significa en palabras que las interacciones gravitacionales microscópicas *son del mismo orden* que las interacciones cuánticas de degeneración.

Esto muestra entonces que a densidades de Planck, la gravedad actúa a nivel microscópico, y por ende *debiera exhibir manifestaciones macroscópicas* reflejada en sus relaciones termodinámicas. Así, la ecuación de estado para un gas de fermi a densidades de Planck seria claramente diferente de la deducida en 6.4. Esto pues esta relación solo consideró las interacciones de degeneración, relegando las interacciones gravitacionales a manifestarse a través de una fuerza macroscópica según la ley 6.5. Lo interesante del enfoque presentado en este trabajo es que tales manifestaciones macroscópicas aparecen, incluso a pesar de haber trabajado con una EdE que no incorporase efectos gravitacionales microscópicos. La aparición de un radio R_η fijo puede así considerarse como una realización de la idea de Sakharov, solo que sus efectos se están materializando a densidades inferiores a las de Planck.

La manera como surge tal limite será hecha explícita en lo que sigue.

6.1.4. Relación masa-radio para sistemas pasado el limite $M \to M_{ch}$.

A modo de establecer una relación masa-radio para sistemas pasado el limite $M \to M_{ch}$ de modo que sean relevantes los términos novedosas de la relación 6.4, se ha implementado un esquema de aproximación. Se retienen los dos términos perturbativos en unísono con el termino usual para altas energía $\rho^{4/3}$, y se trabaja en un esquema variacional presentado en el apéndice B. Esta manera de abordar las ecuaciones para estructura estelar incorpora la misma física que la ecuaciones 6.6 y 6.4, y se presenta de particular interés para manejar EdE's politrópicas. Aquí se presenta un resumen de los resultados que surgen de tal esquema, dejando la justificación del método en el apéndice B.

El funcional energético asociado a 6.6 y 6.1 se escribe como

$$E = -\frac{G}{2}\int \frac{\rho_1\rho_2}{r_{12}} dV_1 dV_2 + \int \rho\varepsilon dV - \lambda \int \rho dV$$

el cual, al considerar funciones de prueba de interés donde b denota el radio, se convierte en la siguiente función del parámetro b

$$E = -c_1\left(GM^2 b^{-1}\right) + c_2\alpha M^{4/3} b^{-1} + c_3\beta M^2 b^{-3} + c_4\gamma M^{2/3} b \tag{6.16}$$

. Las c_i son constantes numéricas dependientes de las funciones de prueba $\{\rho_i\}$, las cuales no presentan información cualitativa relevante . Al extremizar vía b, se establece la condición

$$c_2\alpha M^{4/3}\left(1 - \frac{c_1 G}{c_2\alpha} M^{2/3}\right) + 3c_3\beta M^2 b^{-2} - c_4\gamma M^{2/3} b^2 = 0 \tag{6.17}$$

lo cual invita a expresar las masas según

$$M = \left(\frac{c_2}{c_1}\frac{\alpha}{G}\right)^{3/2} m \equiv M_{ch} m \tag{6.18}$$

a modo de tener

$$m^{2/3} = 1 + \frac{3c_3\beta}{c_2\alpha} M_{ch}^{2/3} m^{2/3} b^{-2} + \frac{c_4\gamma}{c_2\alpha} M_{ch}^{-2/3} m^{-2/3} b^2$$

. Introduciendo las dos escalas definidas por

$$R_\eta^2 = \frac{3c_3\beta}{c_2\alpha} M_{ch}^{2/3} \qquad R_0^{-2} = \frac{c_4\gamma}{c_2\alpha} M_{ch}^{-2/3} \tag{6.19}$$

, se logra la expresión por resolver algebraicamente

$$x = 1 + R_\eta^2 y^{-1} x - R_0^{-2} y x^{-1}$$

donde se ha simplificado la notación según

$$y \to b^2 \qquad x \to m^{2/3}$$

.

La ecuación anterior se resuelve a modo de establecer la relación masa-radio buscada

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} R_0 m^{1/3} \sqrt{1 - m^{2/3} + \sqrt{4\left(\frac{R_\eta}{R_0}\right)^2 + \left(1 - m^{2/3}\right)^2}} \tag{6.20}$$

. Si a esta ecuación se le aplica el limite $R_{\eta \to 0}$ (lo que corresponde a eliminar los aspectos provenientes de las deformaciones cinemáticas), se recupera lo conocido para estrellas de Chandrasekhar

$$b = R_0 m^{1/3} \sqrt{1 - m^{2/3}}$$

, lo cual esta deducido en el apéndice B.

Para fines de claridad conceptual, se han fijado arbitrariamente los constantes tal que $R_\eta \to 1$, y $R_0 \to 100$ a modo de permitir un bosquejo de 6.20 en la figura 6.1. Solo se exhibe aquella región con sentido físico la cual presenta una relación $r(m)$ decreciente.

De esta figura se logra exhibir de manera cualitativa las propiedades aquí discutidas para configuraciones de equilibrio: una masa de Chandrasekhar cuasi-constante en un amplio rango de radios, mientras que pasado cierto umbral en m, se le acomoda un radio límite . adregar intersection con scwartzchild radio critica y link con GR

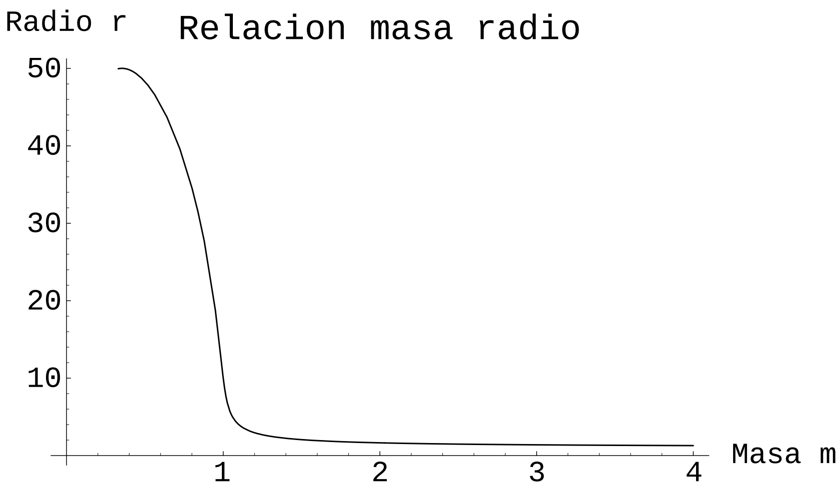

Fig. 6.1: Relación masa-radio en contexto EdE deformada.
Relación masa-radio para estrellas densas, donde los electrones de alta energía forjan la estructura estelar al imponer una presión de degeneración dominante. Aquí se incorporan las deformaciones provenientes de relaciones energía-momento según 4.1.

6.1.5. *Soporte numérico de la relación masa-radio y fijación de constantes numéricas.*

Se hará ver como los resultados cualitativos deducidos, sobre todo aquellos respecto de la transición "masa limite" $M_{ch} \rightarrow$ "radio limite" R_η, se ven reafirmados por cálculos numéricos de la ecuación 6.6. Además, de esta forma se tendrá una aproximación a las constantes numéricas sin dimensiones que el método variacional no logra fijar.

Por razones que se verán más adelante, se hace necesario solo trabajar con una versión simplificada de la EdE 6.4 a modo de solo fijar la atención a la región de transición entre masa limite y radio limite. Esta EdE resulta ser así

$$P = \alpha\rho^{4/3} + \beta\rho^2$$

de modo que solo existe el termino asociado al regimos relativista usual, y el atribuible a la deformación cinemática 4.1. Dado esta EdE, el método variacional otorga la relación análoga a 6.20, salvo que esta solo permite visualizar la región $M > M_{ch}$

$$r = \frac{m^{1/3}}{\sqrt{m^{2/3} - 1}} \tag{6.21}$$

. Una vez más, hemos definido m según la relación 6.18 y a r según

$$b = R_\eta r$$

donde R_η viene dado por 6.19.

Ahora bien, si a la ecuación de estado 6.1.5 se le complementa con la ecuación diferencial que define la estructura estelar 6.6, se concluye con el problema

$$\partial_r \left(r^2 \left(\frac{4}{3} \alpha \rho^{-2/3} + 2\beta \right) \partial_r \rho \right) = -4\pi G \rho r^2$$

sujeto a las condiciones de borde 6.7 y 6.8. Debido a que se omitió el termino proporcional a γ, solo existen dos escalas dimensionales en el problema, lo cual es de gran utilidad, pues podemos introducir variables sin dimensiones, lo que resulta útil para la elaboración del calculo numérico. De haberse usado la EdE 6.4 completa, habría aparecido la escala R_0, lo cual hubiera causado problemas numéricos ya que las dos escalas de distancias del problema (R_η y R_0) difieren en varios ordenes de magnitud.

Introduciendo a

$$r \to R_\eta x \tag{6.22}$$

$$\rho \to \rho_0 f \tag{6.23}$$

con

$$R_\eta^2 = \frac{\pi\beta}{2G} \quad \text{y} \quad \rho_0^2/3 = \frac{2\alpha}{\beta}$$

se logra simplificar la ecuación anterior a la forma útil

$$\partial_x \left(x^2 \left(f^{-2/3} + 1 \right) \partial_x f \right) = -\pi^2 f x^2 \tag{6.24}$$

donde las condiciones de borde pasan a ser 6.12 y 6.13. El R_η se elige así a modo de usar la misma escala que para la solución 6.21, donde se usa la escala limite como patrón de distancias. Sabemos que el R_η de 6.22 define el radio limite, pues esa solución limite ya fue estudiada analíticamente en 6.15. Este punto es importante, pues si queremos comparar la solución variacional con la numérica, debemos asegurarnos de que se este usando las mismas escalas físicas para medir distancias y masas.

El problema numérico aquí planteado se resuelve mediante un simple código "Mathematica" (ver anexo D).

Dado que solo conocemos el orden de la masa de Chandrasekhar (hemos omitido factores numéricos), se "calibra" la escala de masas con el resultado de una integración numérica inicial (es decir, se "corrige" la escala inicial usada M_{ch} con el factor numérico relevante (resulto ser $\sim \frac{1}{4{,}5}$) de modo que la divergencia ocurra en $r = 1$). De esta forma, sabemos que ambos resultados, tanto del método variacional como numérico, pueden ser comparados. Los resultados se muestran a continuación

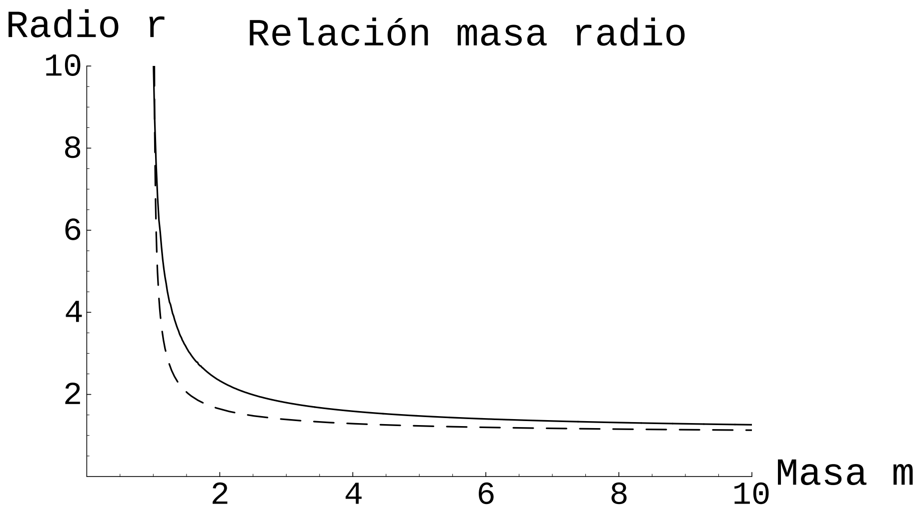

Fig. 6.2: Comparación entre resultado variacional (línea discontinua) y numérica (línea continua).

Como se aprecia, ambas soluciones coinciden en lo esencial, salvo que la solución numérica presenta una transición masa-limite a radio-limite más suave. Nótese que el haber trabajado con el método numérico, permite afirmar con relativa certeza el valor preciso M_{ch} que el modelo da para estrellas de Chandrasekhar. Sin embargo, dado que nos interesa más el limite R_{η}, no elaboraremos más este punto.

7. EXTENSIONES A LA ESTRUCTURA ESTELAR DEFORMADA.

7.1. marco de Einstein para EdE politrópicas.

Bajo la premisa de que solo la presión de degeneración otorga la estructura estelar de objetos compactos, podemos modelar las estrellas de neutrones. Aquí se trata de estudiar objetos más compactos que las enanas blancas, y por ende se hace menos aplicable *a priori* trabajar en un marco de Newton. Así bien, según la teoría de la Relatividad General, ya no basta con conocer las densidades de masa, sino que de *energía neta* (lo que para partículas libres incluye la masa y su contenido cinético). Solo al incorporar *toda* la energía, se puede proceder a manejar las ecuaciones de estructura estelar, ahora conocidas como ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). Para tratar el caso de los neutrones, se procede como en la sección anterior, tratando el objeto macroscópico como proveniente del comportamiento colectivo de partículas libres, en donde se incorpora las deformaciones de similar manera.

Así bien, idealizado el fluido de Fermi a $T = 0$, y definiendo ρ_ε como la densidad de energía neta, se tienen ambas relaciones

$$P = \frac{1}{3}\frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{p_f} p^2\,(pv)\,dp$$

y

$$\rho_\varepsilon = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{p_f} \varepsilon p^2 dp$$

las cuales son consecuencia de la física estadística aplicada a un gas cuántico fermionico ideal . Ambas ecuaciones definen paramétricamente a la relación

referencia o bosquejo de deducción

termodinámica $P(\rho)$ a través de p_f, la cual justamente se requiere para proseguir con el tratamiento gravitacional completo. Al tomar estas en cuenta, incorporando la expansión pertinente de la relación energía-momento deformada, se concluye así con

$$\frac{\rho_\varepsilon}{P} = 3\left(1 + \frac{2}{3}\eta p_f^2 \pm \frac{4}{3}\lambda p_f^{-1}\right) \tag{7.1}$$

donde las deformaciones aquí se deben tomar como perturbaciones pequeñas a las expresiones generales.

Al incorporar el resultado valido a orden cero

$$p_f^4 = \frac{12\pi^2\hbar^3}{c}P$$

de manera perturbativa en la ecuación 7.1, se establece entonces que

$$\begin{aligned}\rho_\varepsilon &= 3P\left(1 + \frac{2}{3}\eta\left(\frac{12\pi^2\hbar^3}{c}\right)^{1/2} P^{1/2} \pm \frac{4}{3}\lambda\left(\frac{12\pi^2\hbar^3}{c}\right)^{-1/4} P^{-1/4}\right) \\ &= 3P + 2\eta\left(\frac{12\pi^2\hbar^3}{c}\right)^{1/2} P^{3/2} \pm \frac{4}{3}\lambda\left(\frac{12\pi^2\hbar^3}{c}\right)^{-1/4} P^{3/4} \end{aligned} \tag{7.2}$$

a partir del cual el equilibrio hidrostático puede ser encontrado. Nótese que el termino dependiente en λ presenta menor relevancia comparado con el termino dependiente en η. Este caso debe compararse con aquel resultado de la sección 6.1 que establece que solo existen efectos macroscópicos provenientes del termino proporcional a η, y *no* al proporcional a λ. En el marco relevante para un tratamiento relativista general, este termino *si* tiene relevancia, pero se verá que su efecto es marginal en el régimen de altas energías.

link con baja energia y paper enpañol.

Antes de proceder, estudiaremos bajo que condiciones de hacen dominantes (i.e. dejan de ser perturbativos) los términos provenientes de las deformaciones. El caso estándar consiste en considerar que a altas energías, el gas cuántico exhibe

$$\rho_\varepsilon = 3P \tag{7.3}$$

mientras que la relación 7.2 permite concluir que el termino dependiente de η se hace comparable si

$$P \sim \frac{\hbar c}{l_p^4}$$

. Esto pues afirma que solo densidades plankianas hacen relevante (i.e. no perturbativo) la deformación respectiva. Sin embargo, se ve que el termino restante (dependiente en λ) si puede alcanzar relevancia respecto del resultado estándar bajo condición que

$$P \sim \left(\frac{l_p}{\mathcal{L}}\right)^4 \left(\frac{\hbar c}{\mathcal{L}^4}\right)$$

. Esto pues manifiesta el hecho que esta perturbación *si* puede hacerse dominante bajo supuesto que $\mathcal{L} \gg \ell_p$. De esta manera, se ve como fenomenología "extrema"—en el sentido de que proviene de posibles aspectos cuánticos de la gravedad, incorporando escalas de ℓ_p— puede igual ser manifestada en regímenes "no tan extremos´´ donde las escalas de unidades son ahora del orden de $\mathcal{L}$. El caso donde se igualan las contribuciones del termino dependiente en λ con el resultado estándar de la ecuación 7.3 surge al tenerse que

$$\rho_\varepsilon = \pm 4\lambda \left(\frac{12\pi^2\hbar^3}{c}\right)^{-1/4} P^{3/4}$$

8. TRAZAS EN EL FONDO CÓSMICO UNIVERSAL.

Se trata aquí de proseguir con la búsqueda de consecuencias macroscópicas de las deformaciones cinemáticas. Naturalmente, se requiere sistemas termodinámicos de muchos cuerpos, en donde sea de rigor sumar sobre todos los momentos/energias. Dado el prejuicio que rige en este trabajo—que de haber posibilidad de observar consecuencias de deformaciones cinemáticas tipo 4.1, estas se harían notar en fenómenos de altas energías del índole cosmico—surge la idea de describir la radiación de fondo cósmica (que denominaremos MBCR[1]) mediante el uso de una termodinámica sobre *fotones deformados*. Adelantamos que debido a las bajas energías involucradas, no es de esperar nada cualitativamente nuevo. Este pues el gas bosonico que representa el MCBR exhibe actualmente una $T \sim 3\,^{\circ}$K; incluso en su génesis —en la Época de Recombinacion[2]— la energía de relevancia era del orden 13eV. Sin embargo, conceptualmente es valido tratar de exhibir posibles deformaciones en los observables macroscópicos provenientes de las deformaciones microscópicas. Tal intento se presentara es esta sección, una vez más adoptando deformaciones semejantes a aquellas de la página 21.

[1] Microwave Background Cosmic Radiation

[2] quizás poner anexo corto

8.1. Relación de Dispersión para gas Bosonico.

Dado las bajas energías involucradas en el MBCR, solo asumiremos la relación

$$\varepsilon_{\pm} = cp\,(B \pm \lambda p) \tag{8.1}$$

donde aquí se tiene

$$B = 1 + \theta_7 \left(\frac{l_p}{\mathcal{L}}\right)^{2+2\Upsilon} \qquad \lambda = 2\theta_8\,\frac{\ell_p}{\hbar}$$

para los fotones. Esta se parece es su forma a aquella del modelo 4.2, salvo que esa relación proviene de un modelo basado en fermiones. Ahora, el modelo asumido para escribir la relación 8.1 es aquel elaborado en el trabajo [5]. Allí se explícita una aproximación análoga al trabajo [6] para fotones, tomando en cuenta correcciones a la teoría de Maxwell (y por ende a su quantum: los fotones) debido a la estructura de lazos del estado *weave* requerido para la descripción semiclásica. En esencia, tal relación de dispersión reproduce las características del trabajo pionero de Gambini y Pullin [13], en donde se aparenta un término dependiente en helicidad. En términos del trabajo [5], este termino no es más que una manifestación de haber quebrado la invariancia bajo paridad en las ecuaciones de Maxwell deformadas; esto debido al incorporar un vacío enriquecido por la teoría de *Loop Quantum Gravity*, aquí tratada de manera semiclásica vía el *weave*.

Se verá en lo que sigue, que es precisamente tal termino irrespetuoso de la simetría bajo paridad, el que permite dejar huellas en el fondo cósmico. Eso si, notamos que $\mathcal{L}$ solo aparece como una constante no modulada por los momentos p, lo cual se traduce en que solo actúa renormalizando constantes. Esto implica que solo el termino dependiente en λ ofrece fenomenología nueva, lo cual conlleva a que el gas de fotones por describir solo será perturbativamente afectado por la deformación. La razón siendo que el termino

$$\lambda p$$

solo adquiere relevancia bajo momentos grandes $p \sim \frac{\hbar}{\ell_p}$, lo cual por construcción semiclásica es solo asintóticamente alcanzada. aclarar esto

8.2. *Asimetría térmica para los diferentes estados de polarización del MBCR.*

Debido a la importante información fundamental que yace en el MBCR (acerca de la historia térmica del universo primordial, o sobre el *principio cosmológico*, etc... ver [7, 10] y las referencias allí presentadas), este ha sido[3] particularmente observado y estudiado. Por ende, se hace interesante poder predecir posibles manifestaciones de física no-estándar que pudieran esconderse detrás de las observaciones. Debido a la esperada pequeñas del fenómeno por describir, se acude a razonar solamente sobre principios fenomenológicos basados en 8.1 para luego proponer algún *gedanken experiment* que pudiera hacer lucir lo deducido. Para lograrse tal meta, se propone diferenciar los estados de helicidad del gas bosonico, y considerar el gas como constituido por dos gases; uno por fotones con helicidad positiva, y el otro de helicidad negativa[4] Habiendo adoptado tal postura, intuimos que el adjuntar el clásico factor 2 que aparece al hacerse estadística de fotones —debido a la existencia de *dos* estados de polarización para el campo electromagnético— se convierte ahora en una asunto bastante más sutil.

Del modelo propuesto, surge que

$$p = \frac{\varepsilon}{c}\left(B \mp \frac{\lambda}{c}\varepsilon\right)$$

[3] y será aun más en el futuro. Recientemente las mediciones del WMAP han enriquecido lo que se sabe del MBCR.

[4] se recuerda que por helicidad positiva o negativa se alude a si el spin del fotón se proyecta de manera *co-corriente*, o *contra-corriente* respectivamente, al vector momento.

del cual

$$\frac{dp}{d\varepsilon} = \frac{1}{c}\left(B \mp \frac{2\lambda}{c}\varepsilon\right)$$

lo que permite calcular el espectro energético de una distribución térmica de fotones. Para tal calculo, se acude a la densidad dn de fotones pertenecientes a la cascara-ε de ancho $d\varepsilon$

$$dn_{\mp} = \frac{\varepsilon^3}{2\pi\hbar^3}\frac{\left(B - \frac{4\lambda}{c}\varepsilon\right)}{\left(e^{\beta\varepsilon} - 1\right)}$$

lo cual se construye de la manera usual, considerando la correspondiente estadística de Bose-Einstein. Debido a la estructura $\pm$ de la relación 8.1, las propiedades aditivas que involucren sumas sobre $dn_{+} + d_{-}$ con una misma temperatura T compartida, se reducen a las expresiones típicas. Así, la distribución de Planck $\frac{du_{\mp}}{d\omega}$ permanece invariante (se asumió peso estadístico igual para ambos estados de polarización). Sin embargo, cualquier observación que distinga entre ambos estados de helicidad permitirá exponer novedades, esto debido a que *restas* de magnitudes lineales en $d_{\pm}$ permiten que se cancele la magnitud dominante. Así, solo quedan términos presentando magnitudes no-nulas al existir los termino dependientes en λ. Por ejemplo, si al percibir un fotón de energía ε uno paralelamente mide el estado de helicidad de este, se puede en principio establecer

$$\frac{d\Delta u_{\mp}}{d\omega} = \lambda\frac{2\hbar^2}{\pi c^4}\frac{\omega^4}{\left(e^{\frac{\hbar\varepsilon}{kT}} - 1\right)}$$

. A tal expresión le corresponde un diferencial energético neto

$$\begin{aligned}\Delta E &= \lambda\frac{4\hbar^2}{2\pi c^4}\int_0^\infty \frac{\omega^4}{\left(e^{\frac{\hbar\varepsilon}{kT}} - 1\right)} \\ &= \lambda\left(\frac{48}{\pi}Zeta\,[5]\right)\frac{k^5T^5}{c^4\hbar^3} \qquad (8.2)\end{aligned}$$

donde se asume que integrar sobre frecuencias $\rightarrow \infty$ no afecta mucho el calculo, pues el factor térmico suprime la región de Planck. Se recuerda que en principio solo hasta longitudes $\geqq \ell_p$ permiten ser tratadas de manera semiclásica bajo el esquema aquí adoptado.

Referido a la densidad energética promedio dada por la ley de Stefan-Boltzmann, podemos finalmente tratar lo deducido en la ecuación 8.2 como una fluctuación relativa

$$\frac{\Delta E}{E} = \lambda \frac{720}{\pi^3} Zeta\,[5]\,\frac{kT}{c}$$

.

Asumiendo que la ultima vez que hubo contacto térmico entre fotones y materia fue el la época de recombinación—$z \sim 1000$— en donde la temperatura era de $T \sim 3000\,°\mathrm{K}$, se calcula una fluctuación relativa del orden $\sim 10^{-28}$. Claramente un orden pequeño comparado con otras complejidades que se han omitido de esta discusión acerca del MCBR. Incluso incluyendo la evolución del universo vía el *redshift* correspondiente entre esa época, y la nuestra, no seria viable esperar notar tal efecto de manera directa.

APÉNDICE

A. PROBLEMAS DE UNIFICACIÓN.

A.1. *Una situaciones que requiere de Gravitación y Cuántica..*

En un interesante trabajo de Adler y Santiago [15], se exhibe un problema elemental de scattering de fotones llevado al extremo. Se considera un fotón que se dispersa de un electrón, el cual se encuentra confinado a cierta región de tamaño característico L. El fotón incide con energía E, al cual le atribuimos una masa $\frac{E}{c^2}$ para fines de considerar sus efectos gravitacionales (que como es de esperar son pequeños ...). Ahora bien, se verá como el problema de saber donde se encuentra el fotos después del scattering, considerando efectos cuánticos y gravitacionales, nos lleva a introducir la idea de una longitud fundamental mínima.

Este calculo se desarrolla de varias maneras en el trabajo bajo cuestión, incluyendo ambos enfoques (Newton y Einstein) de la gravedad. Tanto los ordenes de magnitud, como los cálculos precisos dicen lo mismo, así que para fines ilustrativos, solo se reproduce el esquema más fácil seguir.

A.2. *Teoría de Newton y estimación dimensional.*

Considérese un fotón que incide sobre un electrón localizado dentro de una región de tamaño característico L. Según Newton, este electrón sentirá una aceleración

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G\left(\frac{E}{c^2}\right)}{r^2}\hat{r}$$

causada por la atracción universal de Newton (Gravitación) engendrada por la masa efectiva del fotón $\frac{E}{c^2}$. Aquí r representa la distancia entre fotón y electrón. La interacción de scattering ocurre entre un tiempo característico de $\Delta t \sim L/c$, dentro del cual el electrón adquiere una velocidad Δv y un desplazamiento Δx_G debido a efectos gravitacionales. Estos vienen a su vez dados por

$$\Delta v \approx \ddot{r}\Delta t = \frac{GE}{c^2 r^2}\left(\frac{L}{c}\right)$$
$$\Delta x_G \approx \Delta v \Delta t = \frac{GE}{c^2 r^2}\left(\frac{L}{C}\right)^2$$

Ahora bien, debido a la naturaleza cuántica de las interacciones fundamentales, la interacción ocurrirá en algún tiempo indeterminado dentro de Δt, y la localización del electrón dentro de la región de tamaño garantiza que $r \sim L$ en este Δt. También, ya que el fotón presenta $E = pc$, el Δx_G se expresa como

$$\Delta x_G \approx \frac{Gp}{c^3}$$

Notando que la incertidumbre en el momentum $\Delta p \sim p$ para esta interacción elemental, se escribe que

$$\Delta x_G \approx \frac{G\Delta p}{c^3} = \left(\frac{G\hbar}{c^3}\right)\frac{\Delta p}{\hbar} = \ell_p^2 \frac{\Delta p}{\hbar} \tag{A.1}$$

con lo que se concluye que al considerar interacciones fundamentales, tomando en cuenta efectos gravitacionales, surge esta incertidumbre Δx_G

Así, recordando la relación de incertidumbre de Heisenberg, la cual dimensionalmente se escribe como

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar \tag{A.2}$$

podemos ver que a esta relación puramente cuántica, le falta considerar el Δx_G de A.1. Habiendo considerado tal termino, se concluye con la relación conocida en la literatura como relación de incertidumbre modificada.

$$\Delta x \sim \frac{\hbar}{\Delta p} + \ell_p^2 \frac{\Delta p}{\hbar} \tag{A.3}$$

A.3. Introducción de una longitud mínima.

Lo más relevante de destacar de la ultima relación, es que a pesar de haberse apoyado en conceptos tanto cuánticos, como gravitacionales, aparece un resultado que no es parte de ningún de ambas teorías: una longitud mínima para consideraciones físicas. La relación A.2 admite localización perfecta con $\Delta x \to 0$ a cambio de $\Delta p \to \infty$. Es decir, el concepto de localización no conoce restricción fundamental, y es valido considerar estados perfectamente localizados. Tal situación ya no es posible al considerar la relación A.3 pues esta solo admite un mínimo

$$\Delta x_{min} \to \ell_p$$

a cambio de $\Delta p \to \frac{\hbar}{\ell_p}$, i.e. a energías de Planck.

Así, se nota que al "jugar" con ambas teorías, se vislumbra una falta de unidad, ya que al parecer, surgen relaciones que no son compatibles con aquellas aceptables en cada teoría por separado. En este ejemplo, no solo se ha visto como ocurren patologías teóricas (que surga una distancia mínima para toda localización sin haberla introducido explícitamente), pero también aquella longitud mística ℓ_p. Así, no solo se confirma la idea que falta hacer calzar los cimientos conceptuales de ambas teorías, pero también que hay que prepararse para la idea de que la estructura microscópica del espacio-tiempo admita a ℓ_p de alguna forma.

Los razonamientos aquí ilustrados pueden ser elaborados con más rigor (véase [15]), y como dice aquel articulo, el resultado central A.2 parece surgir de la teoría de supercuerdas (segun [16], esta cota inferior para mediciones de posicion parece ser independiente de modelo ...). Esto es consistente con una de las ideas que este trabajo toma por cierta: que aquellos resultados cinemáticos representativos de una unificación gravito-cuántica están al alcance de una descripción efectiva mediante caminos heurísticos.

B. ESQUEMA VARIACIONAL PARA ESTRUCTURA ESTELAR NEWTONIANA

B.1. El funcional

Basándonos en el esquema presentado en [17] se procede a definir un funcional asociado al problema hidrodinámico 6.6. De esta forma se procede a establecer la relaciona masa-radio que surge en estrellas de fluido material cuya EdE sea basada en politrópicas. El funcional por usar se escribe como

$$
\begin{aligned}
E &= E_g + E_c \\
&= -\frac{G}{2}\int \frac{\rho_1\rho_2}{r_{12}} dV_1 dV_2 + \int \rho\varepsilon dV
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

donde ε se define como la "energía compresional" por unidad de volumen mediante la definición termodinámica usual

$$\delta\varepsilon = -P\delta v = -P\delta(\frac{1}{\rho}) = P\rho^{-2}\delta\rho$$

. Se considera tal definición asumiendo, por simplicidad, procesos adiabáticos $\delta Q = 0$ y se define a $v = \frac{1}{\rho}$ como el volumen por unidad de masa de la substancia en cuestión.

Recordemos que, ejercer variaciones de ρ sujeto a dejar la masa total fija en M, equivale al problema variacional no restringido de B.1 incorporándole el multiplicador de Lagrange λ según

$$F = -\frac{G}{2}\int \frac{\rho_1\rho_2}{r_{12}} dV_1 dV_2 + \int \rho\varepsilon dV - \lambda \int \rho dV$$

De este modo, el funcional presenta una primera variación según

$$\begin{aligned}\delta F &= -G\int \frac{\rho_2\delta\rho_1}{r_{12}}dV_1dV_2 + \int\left(\varepsilon\delta\rho + \rho\delta\varepsilon\right)dV - \lambda\int\delta\rho dV \\ &= -G\int \frac{\rho_2\delta\rho_1}{r_{12}}dV_1dV_2 + \int\left(\varepsilon + P\rho^{-1}\right)\delta\rho dV - \lambda\int\delta\rho dV\end{aligned}$$

pero,

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\int Pd(\frac{1}{\rho}) = -\int d(P\rho^{-1}) + \int\rho^{-1}dP \\ &= -P\rho^{-1} + \int\rho^{-1}dP + cte\end{aligned}$$

por ende, al botar la constante (i.e. redefiniendo una referencia apropiada para ε) se concluye con

$$\varepsilon = -P\rho^{-1} + \int\rho^{-1}dP$$

lo cual permite

$$\delta F = -G\int \frac{\rho_2\delta\rho_1}{r_{12}}dV_1dV_2 + \int\left(\int_{r=o}^{p(r)}\rho^{-1}dP\right)\delta\rho dV - \lambda\int\delta\rho dV$$

donde al incorporar el potencial gravitacional de Newton

$$\phi\left(r_1\right) = -G\int\frac{\rho_2}{r_{12}}dV_2$$

se concluye con la variación

$$\delta F = \int\left(\phi + \left(\int_{r=o}^{p(r)}\rho^{-1}dP\right) - \lambda\right)\delta\rho dV$$

. Esta ultima variación solo garantiza contribución nula $\forall\ \delta\rho$ bajo supuesto de que ρ satisfaga

$$\phi\left(r\right) + \left(\int_{r=o}^{p(r)}\rho^{-1}\frac{dP}{dr}dr\right) = \lambda$$

.

Diferenciando la relación anterior respecto de la coordenada r, se concluye con

$$\partial_r \phi\left(r\right) + \rho^{-1}\frac{dP}{dr} = 0 \tag{B.2}$$

lo cual resulta ser la condición para equilibrio hidrostático del fluido material expuesta en 6.5, salvo que en B.2 ya ha explotada la simetría esférica. Dado que λ desaparece de esta ultima ecuación, podemos simplemente trabajar sobre E, bajo requerimiento de incorporar la información de este multiplicador al normalizar *a priori* las funciones de prueba ρ a masa total M.

Consecuentemente, al considerar el funcional B.1 evaluado en

$$\rho \in \{\rho\}_b$$

con $\{\rho\}_b$ una familia de funciones de prueba parametrizadas con radio b, el "mejor miembro"[1] puede ser encontrado al minimizar sobre b.

B.2. Estrellas politrópicas

Nuestro interés yace en EdE basadas en politrópicas $P = k\rho^\gamma$, de modo que la componente "compresional" del funcional se lleva a la forma explícita

$$\begin{aligned}\rho\varepsilon &= \rho \int k\rho^{\gamma-2} d\rho \\ &= k\left(\gamma-1\right)^{-1}\rho^\gamma\end{aligned}$$

con lo que

$$E_c = k\left(\gamma-1\right)^{-1}\int \rho^\gamma dV$$

.

Por otro lado, la componente gravitacional se escribe directamente como

$$E_g = -\frac{G}{2}\int \frac{\rho_1\rho_2}{r_{12}} dV_1 dV_2$$

[1] en el sentido de aproximar soluciones de B.2

. Así,dado algún modela para ρ, estas integrales permiten escribir el funcional original E como función del parámetro b, lo que al minimizar sobre b, nos entrega la relación masa-radio buscada.

Tomando así funciones de prueba ρ normalizadas tipo

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \left(\frac{3M}{4\pi b^3}\right) \text{ para } r < b \text{ y } 0 \text{ si } r > b \\ \rho_2 &= \left(\frac{M}{\pi^{3/2} b^3}\right) \exp\left(-\left(\frac{r}{b}\right)^2\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

parametrizadas en radio b, se procede a evaluar el funcional B.1.

Por un lado se obtiene que

$$E_g = -c_i \left(\frac{GM^2}{b}\right) \tag{B.3}$$

para constante positiva c_i dependientes del modelo especifico elegido[2]. Por otro lado, al incorporar la naturaleza funcional de una EdE Politrópica en ρ, se obtiene

$$E_c = c_j \left(\gamma - 1\right)^{-1} kM^{\gamma} b^{3-3\gamma} \tag{B.4}$$

para otra constante c_j.

Lo que hemos deducido aquí nos permite abordar el problema de Chandrasekhar de manera precisa.

B.3. Aplicación al problema de Chandrasekhar

El enfoque de interés para el problema de Chandrasekhar—sin deformaciones—ocupa la EdE valida para el régimen de alta energía

$$P = \alpha\rho^{4/3} - \gamma\rho^{2/3}$$

[2] ver [17] para mayor numero de ejemplos para ρ

con lo que el funcional B.1 se lleva a

$$E = -c_1 \left(GM^2 b^{-1}\right) + c_2 \alpha M^{4/3} b^{-1} + c_3 \gamma M^{2/3} b$$

. el la cual se ha usado las relaciones B.3 y B.4, tomando en cuanta el signo negativo de $(\gamma - 1)^{-1}$ para $\gamma = 2/3$, y dejando todo factor numérico adicional a las α, β, γ dentro de las c_i.

Derivando respecto de b y igualando a cero nos entrega

$$b^2 = \frac{c_2 \alpha}{c_3 \gamma} M^{2/3} \left(1 - \frac{c_1 G}{c_2 \alpha} M^{2/3}\right)$$

lo cual invita a reescalar las variables con dimensional mediante la introducción de variables sin dimensiones m y b según

$$\begin{aligned} M \rightarrow M_{ch} m \quad & \text{tal que} \quad \frac{c_1 G}{c_2 \alpha} M_{ch}^{2/3} = 1 \\ b \rightarrow b_0 r \quad & \text{con} \quad b_0^2 = \frac{c_2 \alpha}{c_3 \gamma} M_{ch}^{2/3} = \frac{(c_2 \alpha)^2}{c_3 c_1 \gamma G} \end{aligned}$$

a modo de concluir con la relación masa-radio buscada, en su forma adimensional

$$r = m^{1/3} \sqrt{1 - m^{2/3}} \tag{B.5}$$

Esta relación solo tiene sentido mientras $r\,(m)$ sea decreciente en m, lo que graficamos en la figura B.1.

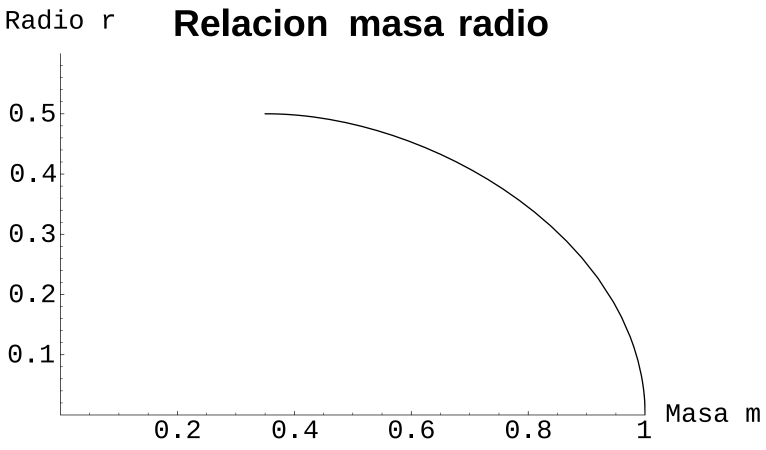

Fig. B.1: Relación masa-radio en contexto Chandrasekhar.
Relación masa-radio para estrella densa, donde los electrones de alta energía forjan la estructura estelar al ejercer una presión de degeneración dominante.

De este, se vislumbra como a medida que una configuración estable adquiere mayor masa (con $M < M_{ch}$) este se achica en radio hasta que $M \rightarrow M_{ch}$. Con $M = M_{ch}$ (o sea $m = 1$ en la ecuación B.5), el radio $\rightarrow 0$, lo que interpretamos como que se ha llegado a una configuración limite. Este hecho, que estrellas con mayor masa que M_{ch} tienden a tener radio $\rightarrow 0$, invita a pensar en el las consecuencias dinámicas que preceden el haber adquirido la masa limite … ¿ Implosión ?

La masa limite aquí llamada M_{ch} resulta ser

$$M_{ch} = \left(\frac{c_2 \alpha}{c_1 G}\right)^{3/2}$$

lo que en orden de magnitud (omitiendo los factores c_i) es consecuente con el resultado que proviene de solo estudiar el orden mayor en ρ, como fue hecho en la sección 6.1.1

C. ¿ VIOLACIONES EN LA INVARIANCIA FUNDAMENTAL DE LORENTZ ?

Tal como lo propone Amelino-Camelia en [18], surge la posibilidad de aceptar que la invariancia de Lorentz no sea una invariancia exacta, y que solo sea una simetría aproximada a bajas energías. Solo así, el logra justificar el hecho que sus relaciones propuestas dejan de ser un invariante de Lorentz cuadrático en p_μ. Análogamente, el hecho que se presenten las escalas de Planck como universales, ya obliga a dejar de lado la relatividad especial, pues según esta, los conceptos de energía y momentos son relativos a los observables; o sea . . . ¿ referido a quien se debe tener la energía de Planck para requerir de las deformaciones cinemáticas propuestas ? Más aún, ¿ como debemos interpretar esto de una longitud mínima para mediciones físicas, si por contracción de Lorentz esta es dependiente de los observadores ?

La respuesta de Amelino-Camelia no responde la respuesta, pero si pone de manifiesto que las deformaciones que el introduce, y las consecuencias que extrae, son incompatibles con la invariancia de Lorentz. Al no tenerse una teoría de apoyo con la cual deducir las deformaciones, no queda claro la posición de esta simetría . . . , ¿ rota espontáneamente ?, ¿ solo existente a nivel efectivo para bajas energías ? . . .

A pesar que se ha intentado dar diferentes explicaciones a estas preguntas (reconciliar la contracción de Lorentz mediante una interpretación cuántica (ver [19]), o mediante la introducción de una acción no-lineal de los “boosts” sobre le espacio de momentos (ver [20])), este trabajo adopta la postura de Amelino-Camelia. Se hace notar que *si existe* un sistema privilegiado: el sistema co-móvil con el universo. Este sistema introduce naturalmente una descomposición $3+1$ des espacio-tiempo, con respecto al cual podemos referir las cantidades físicas de manera universal. La existencia de este sistema universal nos permite pensar entonces que *si es valido* asumir una ruptura de la invariancia de Lorentz, o por lo menos asumir que en aquella teoría "del todo" que se promete, esta simetría debiera acompañarse de una manifestacion *explícita* del sistema privilegiado. Con respecto a este sistema, se puede entonces escribir deformaciones cinemáticas las cuales difieren en muy poco de las de Lorentz, las cuales coinciden a bajas energías.

D. CÓDIGO *MATHEMATICA* PARA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE CASO LIMITE.

El siguiente código recibe una densidad central (el valor de la función en el origen) como parámetro, y integra la ecuación resultante. De esta solución, se le extrae su raíz, y se le calcula su masa. El código entrega el par $\{masa, radio\}$ como función del parámetro A.

```
numchandra[A_] :=
  Module[{a = A},
    density =
      NDSolve[{D[x^2 (f[x]^(-2/3) + 1) D[f[x], x], x] + Pi^2 x^2 f[x] == 0,
          f'[0.00001] == 0, f[0.00001] == a}, f[x], {x, 0.00001, 30},
        MaxSteps -> 10000];
    radius = Re[x] /. FindRoot[Evaluate[f[x] /. density], {x, .5}];
    mass = NIntegrate[Evaluate[4/4.5 Pi x^2 Re[f[x]] /. density],
        {x, 0.00001, radius}]; {mass[[1]], radius}]
```

Fig. D.1: Código para conocer $\{masa, radio\}$ en función de la densidad central A.

Luego se hace un barrido de los posibles valores de la densidad central.

```
data = Table[numchandra[0.03 n], {n, 1, 1000}];
```

Fig. D.2: Se almacena las configuraciones $\{masa, radio\}$ en “data”.

Finalmente se gráfica vía los comandos siguientes

```
ListPlot[data, PlotJoined → True, PlotRange → {{0, 10}, {0, 10}},
  PlotLabel → "Relación masa radio", AxesLabel → {"Masa m", "Radio r"}]
```

Fig. D.3: Se obtiene la relación masa-radio buscada.

BIBLIOGRAFíA

[1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*. Course of Theoretical Physics, Oxford: Pergamon Press, 1969, 2nd ed., 1969. ver problema 3, capitulo 15.

[2] G. Amelino-Camelia, “Quantum-gravity phenomenology: Status and prospects,” *Mod. Phys. Lett.*, vol. A17, pp. 899–922, 2002, gr-qc/0204051.

[3] G. Amelino-Camelia, “Are we at the dawn of quantum-gravity phenomenology?,” *Lect. Notes Phys.*, vol. 541, pp. 1–49, 2000, gr-qc/9910089.

[4] J. Alfaro and G. Palma, “Loop quantum gravity and ultra high energy cosmic rays,” 2002, hep-th/0208193.

[5] J. Alfaro, H. A. Morales-Tecotl, and L. F. Urrutia, “Loop quantum gravity and light propagation,” *Phys. Rev.*, vol. D65, p. 103509, 2002, hep-th/0108061.

[6] J. Alfaro, H. A. Morales-Tecotl, and L. F. Urrutia, “Quantum gravity corrections to neutrino propagation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, pp. 2318–2321, 2000, gr-qc/9909079.

[7] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The early universe*. Frontiers in Physics, Reading, MA: Addison-Wesley, 1988, 1990, 1990.

[8] S. R. Coleman and S. L. Glashow, “High-energy tests of lorentz invariance,” *Phys. Rev.*, vol. D59, p. 116008, 1999, hep-ph/9812418.

[9] D. Colladay and V. A. Kostelecky, "Lorentz-violating extension of the standard model," *Phys. Rev.*, vol. D58, p. 116002, 1998, hep-ph/9809521.

[10] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity.* New York: Wiley, |c1972, 1972. Capitulo 11.

[11] K. S. Thorne, *Black holes and time warps: Einstein's outrageous legacy.* Commonwealth Fund Book Program, New York, NY: W.W.Ñorton and London: Picador, |c1994, 1994. En particular el capitulo 4, pero el libro entero es *muy* recomendable para ganar una vision panoramica de la Gravedad General.

[12] N. K. Glendenning, *Compact Stars.* Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity, XIV, 390 pp. 87 figs.. Springer-Verlag New York. Also Astronomy and Astrophysics Library, 1996.

[13] R. Gambini and J. Pullin, "Nonstandard optics from quantum spacetime," *Phys. Rev.*, vol. D59, p. 124021, 1999, gr-qc/9809038.

[14] Y. B. Zeldovich and I. D. Novikov, *Stars and relativity.* Stars and relativity / Ya. B. Zeldovich and I.D.Ñovikov ; translated by Eli Arlock ; edited by Kip S. Thorne and W. David Arnett. Mineola, N.Y. : Dover Publications, 1996., 1999.

[15] R. J. Adler and D. I. Santiago, "On Gravity and the Uncertainty Principle," *Modern Physics Letters A*, vol. 14, pp. 1371–+, June 1999.

[16] L. J. Garay, "Quantum gravity and minimum length," *Int. J. Mod. Phys.*, vol. A10, pp. 145–166, 1995, gr-qc/9403008.

[17] B. K. Harrison, K. S. Thorne, M. Wakano, and J. A. Wheeler, *Gravitation Theory and Gravitational Collapse.* Gravitation Theory and Gravitational Collapse, Chicago: University of Chicago Press, 1965, 1965.

[18] G. Amelino-Camelia and T. Piran, "Planck-scale deformation of lorentz symmetry as a solution to the uhecr and the tev-gamma paradoxes," *Phys. Rev.*, vol. D64, p. 036005, 2001, astro-ph/0008107.

[19] C. Rovelli and S. Speziale, "Reconcile planck-scale discreteness and the lorentz- fitzgerald contraction," 2002, gr-qc/0205108.

[20] J. Magueijo and L. Smolin, "Lorentz invariance with an invariant energy scale," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, p. 190403, 2002, hep-th/0112090.