Introducción a la Estructura Algebraica de la Teoría de Cuerdas

Mauro Cambiaso Harb

Tesis presentada a
la facultad de física de la
Pontificia Universidad Católica de Chile
como requisito para optar al grado académico de

LICENCIADO EN FISICA

Profesor Guía:	Dr. Jorge Alfaro
Profesores informantes:	Dr. Marco Díaz
	Dr. Alejandro Clocchiatti

7 de agosto de 2001

Índice General

Agradecimientos

Siempre es un agrado poder manifestar nuestros agradecimientos hacia quienes así lo merezcan, sin embargo, estas “manifestaciones” suelen ser menos frecuentes de lo que debieran. Es por eso que aprovecho esta ocasión para ponerme al día.

Primero quisiera agradecer al profesor Jorge Alfaro quién desde el primer día, por allá por diciembre de 1999, me recibió con la mejor de las disposiciones, no sólo dándome la oportunidad de desarrollar esta práctica con él, sino también por aquellos breves instantes en que juntos, frente a un pizarrón, logramos compartir una sonrisa. A todos mis compañeros junto a los cuales pasé buenos (y malos) momentos y a todos aquellos que en más de alguna ocasión dieron respuesta a mis dudas.

A mis padres, no sólo por haberme apoyado en este largo “proyecto”, sino también por los innumerables esfuerzos que hacen y que hicieron por la felicidad de uno. También quiero agradecer a Sucy ya que me ha ayudado a entregar y recibir amor, ingrediente fundamental en la vida de toda persona, la pasión por la ciencia es una cosa, la pasión por la vida es otra.

Finalmente quisiera agradecer a todos los académicos y funcionarios que estuvieron junto a uno durante todos estos años.

1 Introducción

Las teorías de cuerdas (**TC**) han mostrado ser relevantes no sólo por ser serias candidatas para proveer una teoría cuántica de campo para la gravedad, sino también porque en ella es necesaria la elaboración y estudio de herramientas matemáticas muy interesantes que podrían incluso entregar nuevos enfoques en diferentes áreas de la física teórica.

En este trabajo se hace un estudio introductorio a las **TC**, tratando en particular de estudiar su estructura algebraica, que todavía no se entiende a cabalidad. Por ejemplo, el conocido momentum angular. Partiendo del postulado que no hayan direcciones privilegiadas en el espacio i.e., un Hamiltoniano invariante bajo rotaciones (simetría espacio-temporal), se obtienen las relaciones de conmutación bien conocidas para los generadores del grupo de rotaciones infinitesimales, aquellas determinadas por el álgebra de $SU(2)$. Quizás menos conocido es el caso de las simetrías internas dentro del marco de las teorías de gauge. Uno puede ver que si una simetría de gauge local generada por el grupo $U(1)$ es impuesta sobre un Lagrangiano para un campo escalar ϕ libre, se recupera un Lagrangiano con términos de interacción entre el campo escalar y un campo A_μ que exhibe todas las propiedades del campo electromagnético. Se dice entonces que el electromagnetismo puede ser entendido como una teoría de gauge del grupo $U(1)$[1]. También está el caso de la cromodinámica cuántica, del momento en que la simetría de color $SU_c(3)$ fue promovida a una simetría exacta de la naturaleza, etc...

Estamos viendo entonces que aparentemente muchas teorías físicas tienen una estructura algebraica que está subyacente y cuyo estudio podría ayudarnos a revelar algunos aspectos, quizás desconocidos, del tema en cuestión. Por otra parte, el estudio algebráico de la **TC** no sólo es necesario desde este punto de vista sino también lo es del momento en que nos preguntamos cuáles son los aspectos esenciales del álgebra de Virasoro (**AV**), (álgebra que está detrás de las **TC**), que hacen que sea el álgebra candidata a una teoría de unificación.

Finalmente, otro aspecto por el cual las **TC** son relevantes, tiene que ver con la relación entre la teoría misma y la dimensión del espacio-tiempo. Previo a las **TC**, para algunas teorías fundamentales, la dimensión del espacio-tiempo y el grupo de simetría del cual derivan, son en cierta medida arbitrarios y uno quisiera que éstos quedaran determinados en base a la consistencia de la teoría. Desafortunadamente en el caso de las **TC**, en

[1]En [6] se puede encontrar un estudio detallado de las teorías de gauge donde se muestran con detalle este y otros ejemplos.

particular con respecto a la dimensión del espacio-tiempo, la prescripción ($D = 26$) es mucho mayor[2] que lo esperado y en consecuencia se han tenido que buscar argumentos especiales como dimensiones compactificadas para poder explicar porqué el espacio-tiempo se presenta ante nosotros como de cuatro dimensiones solamente.

Partiremos haciendo un estudio acabado de las álgebras de Lie y sus posibles representaciones además de un estudio de la estructura que presentan los generdores de un grupo de Lie semi-simple compacto. Luego revisaremos los aspectos básicos de la **TC**, paticularmente la cuantización BRST, preocupándonos de sus aspectos operacionales. En la segunda mitad del trabajo, vemos si es posible llevar a cabo el método de la cuantización BRST a partir de álgebras cuyas representaciones matriciales sean simétricas y que puedan incluir al **AV** como caso particular de la anterior. En particular, encontramos un álgebra de Lie bastante sencilla, a partir de la cual, usando el método de la cuantización BRST, recuperamos las ecuaciones del electromagnetismo y la gravedad en el marco de una teoría cuántica de campos.

[2]Aunque en el caso de la cuerda supersimétrica la dimensión crítica es $D = 10$.

2 Álgebras de Lie

En este capítulo revisaremos algunos conceptos de la teoría de grupos y las álgebra de Lie, que nos serán de gran utilidad en este trabajo[3].

2.1 Grupos de Lie

Un grupo de Lie $\mathcal{G} = \{R_a\}_{a=1}^{\infty}$ es un grupo de infinitos elementos R_a que pueden ser identificados por un número finito de parámetros. Podemos considerar los elementos de un grupo como un conjunto contable (enumerable) de "puntos" que se denomina el *group manifold*. Si en el manifold se puede definir una *cercanía* entre sus puntos, entonces se tiene un grupo contínuo. Esta noción de cercanía se puede entender mediante propiedades topológicas del manifold. Específicamente, la ley de combinación en el manifold, (que es la inducida por aquella del grupo), $R_a * R_b = R_c$, provée una función $c = \phi(a,b)$ que determina el "rótulo" (asociado a un punto del manifold) del producto de dos elementos, en función de los rótulos de cada uno de los factores. Así, la cercanía se define imponiendo que un *pequeño* cambio en uno de los factores de un producto, produzca un pequeño cambio en el producto final.

Ahora de estos grupos nos van a interesar aquellos en que los elementos del manifold pueden ser identificados por un número finito de parámteros contínuos y más aún nos interesarán aquellos en que los parámetros tienen un dominio acotado. Estamos hablando entonces de un *grupo de Lie compacto.*

Un ejemplo típico de lo anterior es, por ejemplo, el grupo de rotaciones en un plano (simetría que presenta el potencial afuera de un alambre cargado de extensión infinita a lo largo del eje z). Aquí el número de rotaciones en el plano XY que podemos realizar para dejar invariante el sistema son infinitas, sin embargo, cada una de ellas puede ser identificada por un número finito de parámetros (1 sólo para ser preciso θ_z) que tiene un dominio acotado $(0, 2\pi)$ en el cual puede variar contínuamente.

2.2 Representaciones

Una representación de un grupo abstracto es un mapeo homomorfo de los elementos del grupo en un grupo de operadores, donde el mapeo debe preservar

[3]En [1] se puede encontrar un estudio detallado acerca de la teoría de grupos.

la ley de combinación del grupo, es decir, si R_a y R_b son elementos del grupo y $R_a * R_b = R_c$ donde R_c también pertenece al grupo, entonces si $D(R_a)$ es el mapeo del elemento R_a en el grupo de operadores, para que dicho mapeo provea una representación del grupo deberá satisfacer:

$$D(R_a) \cdot D(R_b) = D(R_a * R_b). \tag{1}$$

Siendo $\cdot$ el producto en el grupo de operadores. Si el mapeo es isomorfo, entonces se dice que la representación es confiable. De la definición (1) es inmediato que:

$$D(R_a^{-1}) = (D(R_a))^{-1} \qquad \text{y} \qquad D(e) = \mathbf{1}. \tag{2}$$

2.3 Irreducibilidad de una Representación

En la práctica, los grupos de interés no son grupos abstractos sino un grupo de transformaciones (operaciones de simetría) del espacio de configuración de un sistema físico. Así una operación de simetría (como hacer una rotación en un plano) la podemos entender como la acción de una transformación sobre un objeto que describe un sistema físico.

Se dice que una representación es *reducible* cuando puede ser escrita como suma directa de dos o más representaciones. En particular para representaciones matriciales esto es equivalente a decir que todas las matrices del grupo pueden ser llevadas simultáneamente mediante transformaciones de similiraridad a una forma diagonal por bloques. Una representación será irreducible cuando lo anterior no sea posible.

Muy interesantes en la teoría de representaciones son los lemas de Schur, a partir de los cuales se demuestran poderosos teoremas sobre los posibles números de representaciones irreducibles no equivalentes de un grupo y acerca de la relación entre las dimensionalidades de las representaciones irreducibles y el orden del grupo.

2.4 Álgebras de Lie

Los grupos de Lie además tienen otras propiedades muy particulares. La primera de ellas es la existencia de los llamados *generadores infinitesimales*. Pensemos en los elementos del grupo como un conjunto de transformaciones de simetría, la existencia de los generadores infinitesimales nos dice que todas las transformaciones globales de un grupo de Lie se pueden entender como una infinidad de pequeñas transformaciones locales, cercanas a la identidad. La segunda de estas propiedades es que el conmutador de dos generadores infinitesimales siempre se puede escribir como combinación lineal de los generadores infinitesimales, $[R_a, R_b] = f^c{}_{ab} R_c$, donde las constantes $f^c{}_{ab}$ se llaman *constantes de estructura* del grupo que son siempre reales y completamente antisimétricas bajo el intercambio de cualquier par de índices. Finalmente, la combinación lineal recién mencionada está bién definida para los generadores infinitesimales y no sólo eso sino también éstas forman un espacio vectorial cuya dimensión es el número de parámetros esenciales del grupo que es cerrado bajo la multiplicación dada por el conmutador.

3 La Clasificación de Cartan & Dynkin

Acá seguimos de cerca el análisis hecho en [2] donde se muestra como se pueden catalogar las diferentes álgebras de Lie semi-simple compacta, resultados debidos a Cartan. Dynkin contribuyó con una manera diagramática de hacer esta catalogación.

3.1 Introducción

La idea es encontrar una manera sistemática para construir representaciones de un álgebra. Partamos con un álgebra bien conocida como el álgebra de $SU(2)$. La construcción de representaciones en este caso es bien conocida por el estudio del momentum angular en mecánica cuántica. Sin embargo, en ese caso la representación se construye de una manera cuya generalización a otras álgebras no es inmediata. Acá, en particular, no se hará alusión al hecho que J^2 y J_z forman un conjunto completo de observables conmutantes y por ende tienen una base de estados común que permite clasificar los estados y posteriormente contruir una representación para el grupo. En vez, se construirán representaciones de una manera más abstracta que prescinde de propiedades particulares de los generadores del álgebra (como las que presenta J^2 en $SU(2)$). El álgebra es

$$[J_i, J_j] = i\ \epsilon_{ijk} J_k \ , \tag{3}$$

donde los J_i son los generadores de rotaciones infinitesimales que pertenecen a un grupo de Lie y por lo tanto son operadores unitarios (de $det = 1$ para preservar la norma de los vectores al rotarlos). Ahora con estos generadores infinitesimales se pueden"generar" todas las rotaciones finitas como sucesión de una infinidad de rotaciones infinitesimales, es por esto que los elementos del grupo se pueden escribir como $\sim e^{i\theta_i J_i}$. Siendo los elementos del grupo unitarios, se ve que los generadores han de ser hermíticos, por lo tanto tienen autovalores reales y los podemos diagonalizar (no todos simultáneamente por supuesto).

Escojamos una base ortonormal $|m\rangle$ en la cual J_3 es diagonal y de esa base tomemos el **estado con máximo autovalor** $m = j$, i.e.,

$$J_3|m = j\rangle = j|j\rangle, \qquad \langle j|j\rangle = 1 \ . \tag{4}$$

Y definimos

$$J^{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1 \pm iJ_2) \ , \tag{5}$$

de donde es inmediato que

$$[J_3, J^{\pm}] = \pm J^{\pm} \qquad [J^+, J^-] = J_3 \ , \tag{6}$$

Ahora si tomamos un autoestado de J_3 que no sea el de máximo autovalor vemos que los operadores $J^{\pm}$ los podemos identificar con operadores de subida y de bajada

$$J_3|m\rangle = m|m\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad J_3(J^{\pm}|m\rangle) = (m \pm 1)J^{\pm}|m\rangle \ . \tag{7}$$

Entonces si tomamos el autoestado de J_3 de autovalor máximo:

$$J^+|j\rangle = 0 \quad \text{y} \quad J_3J^-|j\rangle = (j-1)J^-|j\rangle \ . \tag{8}$$

Así, si comparamos con la primera de las ecuaciones (7), veremos que

$$J^-|j\rangle \equiv N_j|j-1\rangle \quad \text{y} \quad \langle j-1|J^+ \equiv \langle j-1|N_j^* \ , \tag{9}$$

donde la segunda se obtuvo de la primera tomando conjugado hermítico a ambos lados. Ahora bracketeando estas dos expresiones:

$$N_j^*N_j\langle j-1|j-1\rangle = \langle j|J^+J^-|j\rangle = \langle j|[J^+J^-]|j\rangle = \langle j|J_3|j\rangle = j \ . \tag{10}$$

Habiendo usado el hecho que $|j\rangle$ es aniquilado por J^+. Como escojimos los autoestados de J_3 normalizados y escojiendo una fase particular para N_j

$$N_j = \sqrt{j} \ . \tag{11}$$

De esta manera, si en la primera de las ecuaciones (9) actuamos con J^+

$$\begin{aligned} J^+|j-1\rangle &= \frac{1}{N_j}J^+J^-|j\rangle = \frac{1}{N_j}[J^+J^-]|j\rangle \\ &= \frac{1}{N_j}J_3|j\rangle = \frac{1}{N_j}j|j\rangle = \frac{j}{\sqrt{j}}|j\rangle \\ &= \sqrt{j}|j\rangle \ . \end{aligned} \tag{12}$$

Todo esto para ver que los operadores de subida y bajada tienen la misma constante al actuar sobre los kets de la base:

$$J^+|j-1\rangle = N_j|j\rangle \qquad\qquad J^-|j\rangle = N_j|j-1\rangle \ . \tag{13}$$

Si continuamos con el proceso de aplicar el operador de bajada k veces al máximo autoestado de J_3 encontraremos

$$J^+|j-k-1\rangle = N^*_{j-k}|j-k\rangle \qquad \text{y} \qquad J^-|j-k\rangle = N_{j-k}|j-k-1\rangle \ , \tag{14}$$

donde la primera se obtiene de la segunda tomando el conj. hermítico y luego bracketeando con el ket $|j-k-1\rangle$. Con estas dos ecuaciones podemos encontrar una ecuación recursiva para los N_j si los suponemos reales, de la siguiente manera: de la segunda de las ecuaciones (14), aplicamos el operador de subida a ambos lados y reemplazamos lo que queda en el lado derecho por la primera de las ecuaciones (14). Finalmente bracketeamos con el ket $|j-k\rangle$ y resulta:

$$\langle j-k|J^+J^-|j-k\rangle = N^2_{j-k} \tag{15}$$

y si escribimos nuevamente el producto de los operadores como el conmutador menos el producto inverso tendremos dos términos. El primero es igual a $j-k$ y en el segundo actuamos con el operador de subida a la derecha y con el de bajada a la izquierda, con lo cual nos queda la siguiente fórmula recursiva:

$$N^2_{j-k} - N^2_{j-k+1} = j-k \ . \tag{16}$$

Esta puede ser resuelta si sumamos todos los términos para $k = 0...j$. Podremos notar que al lado izquierdo sólo quedan dos términos pues el resto se cancela mutuamente y al lado derecho nos queda una suma de números:

$$\begin{aligned} -N^2_{j+1} \ + N^2_{j-k} &= \sum_{i=1}^{j} i - \sum_{i=1}^{j-k-1} i = \frac{j(j+1)}{2} - \frac{(j-k-1)(j-k)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(2j+2jk-k^2-k) = \frac{1}{2}(k+1)(2j-k) \\ &= \frac{1}{2}(j+m)(j-m-1) \ , \end{aligned} \tag{17}$$

donde pusimos $j-k=m$ en el último paso. Pero $N^2_{j+1} = 0$ ya que $J^+|j\rangle = N^2_{j+1}|j+1\rangle = 0$. Por lo tanto:

$$N_{j-k} = \frac{1}{2}\sqrt{(j+m)(j-m+1)} \qquad (j-k=m) \ . \tag{18}$$

Si ahora nos preguntamos si existe algún $k=l$ para el cual $J^-|j-l\rangle = 0$, de reemplazar en la ecuación (18), vemos que la única opción es $j = \frac{l}{2}$ donde l es un entero. Así, $J^-|j-2j\rangle = J^-|-j\rangle = 0$. Estamos viendo de esta manera que los máximos y mínimos autovalores que pueden tener los autoestados de J_3 son j y $-j$ respectivamente.

Por lo tanto, en el subespacio de autovalor maximal j para J_3, hay efectivamente $2j+1$ vectores ortonormales que transforman irreduciblemente. De esta manera construimos una representación caracterizada por el máximo autovalor de J_3. Las representaciones para los otros autovalores se construyen de manera obvia: se toma el mayor de los autovalores restantes, se aplica el operador de bajada y luego se sigue en forma análoga. El autoestado de J_3 con mayor autovalor son los vectores peso y su correspondiente autovalor es el peso.

3.2 Raíces y Pesos

La idea es hacer algo análogo a lo hecho con $SU(2)$ pero para un álgebra de Lie semi-simple compacta arbitraria.

Definiciones:

Subálgebra Invariante: Conjunto de generadores que bajo conmutación con cualquier elemento del álgebra, va en sí mismo o a 0.

Álgebra Simple: Álgebra que no tiene subálgebras invariantes no triviales.

La idea es dividir el conjunto de todos los generadores del álgebra en dos conjuntos de operadores formados por combinaciones **lineales** de los generadores del álgebra

- Operadores hermíticos diagonales, mutuamente conmutantes. Análogos a J_3 de $SU(2)$.
- Operadores de subida y bajada, no hermíticos, análogos a $J^\pm$ de $SU(2)$.

Pesos

Sean X_a los generadores del álgebra simple y sean H_i combinaciones lineales de X_a el máximo número de operadores conmutantes entre sí. Se define el rango del álgebra como el número de estos operadores. Estos satisfacen:

$$H_i \equiv C_{ia} X_a \qquad i = 1 \cdots m, \quad C \quad \text{reales} \ , \tag{19}$$

$$[H_i, H_j] = 0 \qquad \text{y} \tag{20}$$

$$tr(H_i H_j) = k_D \delta_{ij} \ . \tag{21}$$

La última de estas ecuaciones la imponemos a los H_i para un uso posterior. D es una representación arbitraria. Los autovalores de H_i los usamos para rotular los estados de la representación. La base en la cual los estados de la representación D diagonalizan los H_i los llamamos $|\mu\rangle_D$:

$$H_i|\mu\rangle_D = \mu_i|\mu\rangle_D \ . \tag{22}$$

Los operadores H_i forman lo que se llama el subálgebra de Cartan (**SC**), $|\mu\rangle_D$ son los vectores peso y los μ_i son los pesos correspondientes.

Raíces

Las raíces son los pesos de los mismos generadores del **SC** en la representación adjunta (**RA**). Para esto necesitamos ver primero como se define la acción de los generadores sobre los estados en la representación adjunta.

La representación adjunta Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial cuya base es $\{u_i\}$ y sean Θ_R los operadores que actúan sobre los vectores de $\mathcal{V}$ talque $\Theta_R : V \to V$, entonces, como los vectores $\{u_i\}$ forman una base

$$\Theta_R \ u_j = \mathbf{v} = \sum_i O_{ij}(R) u_i \ . \tag{23}$$

Los $O_{ij}(R)$ forman una representación matricial del los operadores correspondientes a cada elemento R del grupo.

En la **RA**, las constantes de estructura (módulo un factor i) del álgebra provéen la representación matricial para los generadores. Específicamente, la componente mn de la matriz correspondiente al generador X_l es $f^n_{\ lm}$. Escribiendo la ecuación análoga a la anterior:

$$X_l(X_m) = i f^n_{\ lm} X_n = [X_l, X_m] \ . \tag{24}$$

Por lo tanto en la **RA** la acción de los generadores sobre los estados esta definida mediante el conmutador:

$$X_i|X_j\rangle \equiv [X_i, X_j] \qquad \text{(en rep. adjunta).} \tag{25}$$

Las Raíces: La ecuación de autovalores para el resto de los estados, (formados por combinaciones de los generadores que no pertenecen al **SC**), se define en base a los generadores del **SC**:

$$H_i|E_\alpha\rangle = \alpha_i|E_\alpha\rangle \tag{26}$$

y en la **RA** esto es:

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \ , \tag{27}$$

de donde es inmediato que estos generadores no son hermíticos, ya que si tomamos el conj. hermíticos a la ecuación anterior y usamos el hecho que los H_i son hermíticos veremos que $E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha}$. Es fácil ver que estos generadores son operadores de subida y bajada en el mismo sentido que lo son $J_\pm$ en $SU(2)$, mediante una ecuación análoga a la ecuación (7). Ahora, como en $SU(2)$, cuando tenemos varios estados $|j,m\rangle$ con igual peso, (hay $2j+1$ de ellos), escojemos $|j,m\rangle$ como autoestado de J^-J^+ siempre que $J^-J^+|j,m\rangle \neq 0$. Aquí, si hay varios estados $|\mu\rangle_D$ con igual peso μ, escojemos los estados como autoestados de $E_{-\alpha}E_\alpha$, para algún valor fijo de α y se define:

$$E_{\pm\alpha}|\mu\rangle_D \equiv N_{\pm\alpha,\mu}|\mu\rangle_D \ . \tag{28}$$

En la **RA**, tanto los estados que pertenecen al **SC** $|H_i\rangle$ como los estados $E_\alpha|E_{-\alpha}\rangle$ tienen peso cero. Los primeros ya que fueron definidos tal que conmuten con cualquier H_j, los segundos ya que, si usamos la identidad de Jacobi para calcular $[H_j,[E_\alpha,E_{-\alpha}]]$, veremos que se anula, por lo tanto los estados $E_\alpha|E_{-\alpha}\rangle \sim H_i$,

$$E_\alpha|E_{-\alpha}\rangle = \beta_i H_i \ .$$

Ahora β_i lo podemos calcular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\beta_i &= \langle H_i|E_\alpha|E_{-\alpha}\rangle \\
&= \langle H_i|[E_\alpha,E_{-\alpha}]\rangle = \frac{1}{\lambda}tr(H_i[E_\alpha,E_{-\alpha}]) \\
&= \frac{1}{\lambda}tr(E_{-\alpha}[H_i,E_\alpha,]) = \frac{1}{\lambda}tr(E_{-\alpha}\alpha_i E_\alpha) \\
&= \alpha_i \ ,
\end{aligned} \tag{29}$$

donde se usó que el producto escalar entre A y B está definido como $\langle A|B\rangle \equiv \frac{1}{\lambda}tr(A^\dagger B)$, con respecto al cual los estados $|H_i\rangle$ estan normalizados a 1 y además se usó la propiedad cíclica de la traza. Por lo tanto:

$$E_\alpha|E_{-\alpha}\rangle = [E_\alpha,E_{-\alpha}] = \alpha_i|H_i\rangle \ . \tag{30}$$

Con lo cual vamos completando el álgebra de todos los generadores:

$$[H_i,H_j] = 0 \ , \tag{31}$$

$$[H_i,E_{\pm\alpha}] = \pm\alpha_i E_{\pm\alpha} \ , \tag{32}$$

$$[E_\alpha,E_{-\alpha}] = \alpha_i H_i \ , \tag{33}$$

$$[E_\alpha,E_\beta] = (\alpha+\beta)E_{\alpha+\beta} \qquad \text{Si } \alpha \text{ y } \beta \text{ son raíces.} \tag{34}$$

Para las raíces también podemos encontrar una ecuación análoga a la ecuación (15) que encontramos para $SU(2)$

$$\begin{aligned}
\langle\mu|[E_\alpha, E_{-\alpha}]|\mu\rangle &= \langle\mu|\alpha_i H_i|\mu\rangle = \alpha_i\mu_i \\
&= \langle\mu|E_\alpha E_{-\alpha}|\mu\rangle - \langle\mu|E_{-\alpha}E_\alpha|\mu\rangle \\
&= N_{-\alpha,\mu}\langle\mu|E_\alpha|\mu\rangle - N_{\alpha,\mu}\langle\mu|E_{-\alpha}|\mu\rangle \\
&= N_{-\alpha,\mu}N_{\alpha,\mu-\alpha} - N_{\alpha,\mu}N_{-\alpha,\mu+\alpha}\ . \qquad (35)
\end{aligned}$$

donde se consideran los pesos normalizados a 1. Sin embargo, $N^*_{-\alpha,\mu} = N_{\alpha,\mu-\alpha}$ y $N^*_{\alpha,\mu} = N_{-\alpha,\mu+\alpha}$, ya que, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
E_{-\alpha}|\mu\rangle &= N_{-\alpha,\mu}|\mu-\alpha\rangle \qquad\qquad / \quad \langle\mu-\alpha| \ \ (\quad) \\
N_{-\alpha,\mu} &= \langle\mu-\alpha|E_{-\alpha}|\mu\rangle = \langle\mu|E_\alpha|\mu-\alpha\rangle^* \\
&= N^*_{\alpha,\mu-\alpha}\langle\mu|\mu\rangle\ . \qquad (36)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\alpha_i\mu_i = |N_{\alpha,\mu-\alpha}|^2 - |N_{\alpha,\mu}|^2 \qquad (37)$$

donde μ_i y α_i son las componentes de los vectores peso y raíz, respectivamente.

Ahora no nos interesará resolver la ecuación de recurrencia para los $N_{\alpha,\mu}$, sino nos interesa derivar una expresión que determinará los posibles ángulos entre los vectores raíz. Para ello, sean p y q, el número de veces que hay que aplicar E_α a $|\mu\rangle$ y $E_{-\alpha}$ a $|\mu\rangle$ para obtener 0, respectivamente.

$$E_\alpha|\mu+p\alpha\rangle = 0 \qquad \text{y} \qquad E_{-\alpha}|\mu-q\alpha\rangle = 0\ .$$

Haciendo lo mismo que en la ecuación (35) pero esta vez con el estado $|\mu+p\alpha\rangle$, luego para el estado $|\mu+(p-1)\alpha\rangle$ y luego para $|\mu+(p-2)\alpha\rangle$ ... hasta que $E_{-\alpha}|\mu-q\alpha\rangle = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
|N_{\alpha,\mu+(p-1)\alpha}|^2 &= \alpha\cdot(\mu+p\alpha) \\
|N_{\alpha,\mu+(p-2)\alpha}|^2 - |N_{\alpha,\mu+(p-1)\alpha}|^2 &= \alpha\cdot(\mu+(p-1)\alpha) \\
&\ \vdots \\
-|N_{\alpha,\mu-q\alpha}|^2 &= \alpha\cdot(\mu-q\alpha)\ . \qquad (38)
\end{aligned}$$

Sumando todos estos términos para $p, p-1, \ldots, 0, q-1, \ldots, q$, vemos que todos los términos de la izquierda se cancelan con lo que se obtiene:

$$(p+q+1) = \{(\alpha\cdot\mu) + \frac{\alpha^2}{2}(p-q)\} = 0\ . \qquad (39)$$

Pero como $p, q \in \mathbf{Z}$, $\quad (\alpha \cdot \mu) = \frac{\alpha^2}{2}(q-p)$ y como $(q-p) = m \in \mathbf{Z}$:

$$\frac{(\alpha \cdot \mu)}{\alpha^2} = \frac{m}{2} \ . \tag{40}$$

Ahora, naturalmente si hubiéramos partido de $[E_\beta, E_{-\beta}] = \beta_i H_i$, definiendo $E_\beta|E_{-\alpha+p'\beta}\rangle = 0$ y $E_{-\beta}|E_{\alpha-q'\beta}\rangle = 0$, y hiciéramos el mismo tratamiento anterior, obtendremos:

$$\frac{(\beta \cdot \alpha)}{\beta^2} = \frac{m'}{2} \ , \tag{41}$$

donde tanto α como β son vectores raíz. Si multiplicamos las ecuaciones (36) y (37) y llamamos θ al ángulo entre los vectores raíz, finalmente:

$$cos^2(\theta) = \frac{mm'}{4} \ . \tag{42}$$

Como el $cos^2(\theta)$ esta acotado entre $[0, 1]$, (42) implica que m y m', siendo enteros restringen los posibles valores de mm' y esto a su vez restringe los posibles valores de θ.

$$mm' = \begin{cases} 0 & \longrightarrow & 90^o \\ 1 & \longrightarrow & 60^o, 120^o \\ 2 & \longrightarrow & 45^o, 135^o \\ 3 & \longrightarrow & 30^o, 150^o \\ 4 & \longrightarrow & 0^o, 180^o \end{cases}$$

Estos son los únicos ángulos permitidos entre los vectores raíz de un álgebra de Lie semi-simple compacta.

4 Teorías de Cuerdas

En los albores de la mecánica cuántica podría haber parecido que la naturaleza ondulatoria asociada a *todas* las partículas era algo arbitraria y quizás fundamentada en la conveniencia más que en la física. Sin embargo, más adelante se fue aceptando que esa **es** la naturaleza de las partículas y también se entendió que los argumentos para suponer que así sea, yacían en sólidos principios físicos. Ahora, aunque la naturaleza dual de las partículas es un hecho, sabemos que trás la mecánica cuántica hay toda una estructura que la enriquece aún más.

En el caso de las **TC**, puede que con el tiempo la noción pictórica de la cuerda oscilante que viaja en el espacio tiempo termine siendo sólo eso, una noción pictórica o puede que, como los científicos de las primeras décadas del 1900, tengamos que acostumbrarnos a entender las partículas fundamentales como los modos de oscilación de estas cuerdas. Sin embargo, el resultado de esta interrogante no es lo que nos interesa aquí y el hecho que queramos estudiar la estructura de las **TC** y olvidarnos de la idea de diminutas cuerdas oscilantes no quiere decir que *a priori* estemos diciendo que las partículas no son cuerdas, tan sólo quiere decir que detrás de la **TC** como se conoce hoy, tiene que haber una estructura que merece ser estudiada.

Sin embargo, este estudio es bastante modesto y no puede prescindir por completo de lo que ya se conoce en las **TC**, por lo tanto es necesario hacer un breve repaso de como se estudian usualmente, para después, en nuestro intento de generalización, poder ir haciendo analogía y contacto con aquellos aspectos relevantes de las **TC**.

El estudio de la dinámica de las cuerdas bosónicas (nosotros no trabajaremos con la supercuerda, que incluye también excitaciones fermiónicas) la motivamos revisando primero el caso de la partícula puntual para luego hacer la extensión al objeto unidimensional como lo es la cuerda. Todo esto en un primer análisis clásico, posteriormente se estudia el tema de la cuantización de esta teoría, resaltando particularmente las virtudes del método de cuantización BRST, como herramienta de segunda cuantización.

4.1 Dinámica clásica de la partícula puntual

En esta sección seguimos los enfoques mostrados en [3] y [5]. Una posible acción, que sea invariante bajo el grupo de Ponicaré (traslaciones y rotaciones en el espacio-tiempo), para una partícula puntual viajando en el espacio-tiempo plano es:

$$S = -m \int ds \ , \tag{43}$$

donde el elemento de arco en el espacio-tiempo, que naturalmente depende de la métrica, esta dado por $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. La acción (43) puede ser escrita de manera que sea evidente su invarianza bajo reparametrizaciones de las coordenadas x^μ a lo largo de la línea-mundo de la partícula, mediante la incorporación de un parámetro τ que rotula los puntos a lo largo de la línea-mundo y que es proporcional al tiempo propio de la partícula. Así la acción queda

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} \ , \tag{44}$$

la cual tampoco es muy cómoda por la presencia de la raíz. Sin embargo, si introducimos una nueva variable $\eta(\tau)$ que actúa como una métrica, ya no del espacio-tiempo sino de la propia línea-mundo, $\eta(\tau) = \sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau)}$, la acción se puede escribir como

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau (\eta^{-1} \dot{x}^2 - \eta m^2) \ , \tag{45}$$

donde $\dot{x}^2 = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ y el punto denota una derivada con respecto a τ.

En general se define el tensor de energía-momentum como la variación de la acción con respecto a la métrica, que en este caso es plana, por lo tanto, debemos ademas imponer que $\delta S / \delta g_{\mu\nu} = 0$ lo que implica que $T_{\mu\nu} = 0$ y además $dT_{\mu\nu}/d\tau = 0$, por lo tanto el tensor de energía-momentum se conserva y se dice que es una *ligadura* en las condiciones iniciales. Entonces clásicamente, las órbitas aceptadas son aquellas tales que $T_{\mu\nu} = 0$.

Si quisiéramos cuantizar el sistema en su totalidad, es natural que haya una diveridad de estados en el espacio de Fock y no todos ellos necesariamente estados físicos. Así como la ligadura en el caso clásico nos permite discernir entre las órbitas aceptables, una versión cuántica de esta ligadura nos permitirá discernir entre estados físicos y no físicos. En particular, serán estados físicos aquellos que son aniquilados por el tensor de energía-momentum $T_{\mu\nu}|\phi\rangle = 0$.

4.2 Dinámica clásica de la cuerda

La cuerda evoluciona en un espacio-tiempo plano D dimensional descrito por las coordenadas X^μ, que barre un área formando la hoja-mundo (la extensión natural de la línea-mundo debida a la inclusión de una dimensión más). La superficie de la hoja-mundo está descrita por las coordenadas intrínsecas σ, τ.

La acción para la cuerda esta dada por el área de la hoja-mundo que está descrita por las coordenadas $X^\mu(\sigma,\tau)$, sin embargo, en forma análoga a lo hecho para la partícula puntual, podemos incluir también una nueva variable h_{ab} que actúa como un tensor métrico **en la cuerda**, con lo cual:

$$S = -\frac{T}{2}\int d\sigma d\tau \sqrt{h}\; h^{ab}\eta_{\mu\nu}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \ , \tag{46}$$

donde los índices a, b corren en las cooredenadas de la hoja-mundo y $\sqrt{h}$ es la raíz cuadrada del valor absoluto del determinante de h_{ab}. La anterior es conocida como la acción de Polyakov.

Sin embargo, esta acción presenta algunas simetrías que serán útiles. En particular presenta una simetría global de Poincaré, y dos simetrías locales (o de gauge): reparametrizaciones y escalamientos de Weyl. De las cuales la invarianza bajo reparametrizaciones es esencial. El tensor h_{ab} del espacio bidimensional de la hoja mundo, debido a su propiedad de simetría, tiene sólo tres de sus cuatro componentes que son independientes. En este espacio, una transformación general de coordenadas dependerá de dos funciones libres, mediante la cual se podrán eliminar dos de las tres componentes independientes del tensor, quedándonos sólo con un parámetro libre ϕ. Así podemos hacer la elección $h_{ab} = \eta_{ab}e^\phi$ donde η_{ab} es la métrica Minkowskiana en la hoja-mundo. Este se conoce como el *gauge conforme*, en el cual la acción anterior se reduce simplemente a la acción de un campo libre

$$S = -\frac{T}{2}\int d\sigma d\tau \; \eta_{\mu\nu}\eta^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \ , \tag{47}$$

cuya ecuación de Euler-Lagrange es simplemente una ecuación de ondas libre en dos dimensiones.

$$(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2})X^\mu = 0 \ . \tag{48}$$

Las soluciones más generales a esta ecuación son ondas estacionarias que van en direcciones opuestas $X^\mu(\sigma,\tau) = X^\mu_L(\sigma+\tau) + X^\mu_R(\sigma-\tau)$. Al hacer la transformada de Fourier de cada una de ellas tendremos unos coeficientes α^μ_n que acompañan a las exponenciales $e^{in(\sigma\pm\tau)}$. Estos coeficientes correspoderán a coordenadas de osciladores armónicos provisto que satisfagan las correctas relaciones de conmutación, como se verá más adelante.

Clásicamente, los generadores de Virasoro se pueden escribir en términos de estas coordenadas de osciladores armońicos: [4]

[4] Éstos generadores en realidad son los generadores de transformaciones conforme en la hoja-mundo. Es decir, generan la invarianza bajo reparametrizaciones de las coordenadas que presenta la acción.

$$L_m = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha^{\mu}_{m-n}\alpha^{\mu}_{n} \qquad\qquad m \neq 0 \ , \tag{49}$$

pero a su vez los generadores de Virasoro son proporcionales a algunas componentes de T_{ab}, de hecho son los modos de Fourier del tensor de energía-momentum, por lo tanto la ligadura en el caso clásico toma la forma $L_m = 0$. Las relaciones de conmutacion para estos generadores es

$$[L_m, L_n]_P = i(m-n)L_{m+n} \ , \tag{50}$$

haciendo alusión explícita a que se trabaja con el corchete de Poisson.

4.3 Cuantización canónica de la cuerda

La cuantización canónica de la cuerda se obtiene de la manera usual de cuantizar un sistema, es decir, las funciones son promovidas a operadores actuando sobre vectores de estado en un espacio de Hilbert y los corchetes de Poisson se cambian por los conmutadores (módulo un factor i) y finalmente las coordenadas de osciladores armónicos α^{μ}_{n} corresponden a operadores de subida y bajada de osciladores armónicos provisto que:

$$[x^{\mu}, p^{\nu}] = i\eta^{\mu}\nu \ , \tag{51}$$

$$[\alpha^{\mu}_{m}, \alpha^{\nu}_{n}] = m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu} \ , \tag{52}$$

$$\alpha^{\mu}_{n} = \sqrt{n}\ a^{\mu\dagger}_{n} \qquad \text{si } n < 0 \quad \text{y} \tag{53}$$

$$\alpha^{\mu}_{n} = \sqrt{n}\ a^{\mu}_{n} \qquad \text{si } n > 0 \ . \tag{54}$$

donde x^{μ} es la posicón del centro de masa de la cuerda y p^{ν} el momentun del centro de masa que se define como α^{ν}_{0}.

Ahora en los generadores de Virasoro hay una cierta ambigüedad con respecto al ordenamiento de los operadores α^{ν}_{m}, ya que estos no necesariamente conmutan para L_0. Para acabar con la ambigüedad, sin agotar todas las dudas que puedan haber al respecto, se define L_0 ordenado normalmente, de la siguiente manera:

$$L_0 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} a^{\mu}_{-n} n\ a^{\mu}_{n} \ . \tag{55}$$

Sin embargo, una constante arbitraria a podría haber estado presente en esta definición, por lo que tenemos que agregar esa constante por determinar a L_0. Por los argumentos presentados anteriormente, la ligadura que nos permite discernir cuales son los estados físicos en el caso cuántico, simplemente toma la forma

$$(L_0 - a)|\phi\rangle = 0 \ , \tag{56}$$

con a por determinar. Para el resto de los generadores la restrición es:

$$L_m|\phi\rangle = 0 \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{57}$$

Es importante mencionar algunas sutilezas más acerca del **AV** para el caso cuántico que sólo mencionaremos sin entrar en detalle. Primero, para el caso cuántico la forma del álgebra será la misma que se obtuvo en el caso clásico (50), sin embargo, el problema del ordenamiento de los operadores también se hace presente aquí, lo que hace necesario considerar una generalización del álgebra llamada *extensión central* (a veces referida como la anomalía) del álgebra, (que depende de la dimensión del espacio-tiempo). Segundo, la masa al cuadrado de un cierto estado de la cuerda (abierta) está dada por $M^2 = -p^\mu p_\mu$ donde recordemos que $p^\mu \sim \alpha_0^\mu$, por lo tanto la ecuación (56) implica que la masa de un estado dado en términos de los modos de oscilación internos de la cuerda es:

$$M^2 = -2a + 2\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\mu \ , \tag{58}$$

de donde la masa del estado fundamental es $-2a$ y el resto de los estados excitados tendrán masa al cuadrado mayor que la anterior en múltiplos de 2. Sin embargo, al hacernos la pregunta de cuáles son las condiciones para que el espectro de masas de la **TC** esté libre de estados de norma negativa hay una condición sobre la constante a y es que $a \leq 1$. De donde la masa del estado fundamental, para el caso $a = 1$, es -2. Esta misma pregunta es la que impone condiciones sobre la dimensión del espacio-tiempo[5]. En particular, no habrán estados de norma negativa cuando $D = 26$ y $a = 1$. De hecho, esto es un teorema que aquí sólo mencionamos.

En resumen, la **TC** clásica si bien puede ser formulada para una dimensión del espacio-tiempo arbitraria, su cuantización requiere de $D \leq 26$ si es que no se desea tener estados de norma negativa. No obstante lo anterior fuera mostrado (sin detallar) sólo para la cuerda abierta, es importante mencionar que si bien el análisis de la cuerda cerrada no es idéntico, la conclusión es la misma. Esto es de especial interés puesto que es el espectro de las cuerdas cerradas el que provée una partícula sin masa de spin 2, que se identifica con el gravitón, razón por la cual se considera a estas teorías como candidatas a teorías de gravitación cuántica.

[5]Aunque no sea esta la única manera en que la **TC** prescribe que la dimensión crítica es $D = 26$.

5 Cuantización BRST

En **TC** existen diversos métodos de cuantización. El método mencionado anteriormente se conoce como la *vieja* cuantización covariante en oposición al método *moderno* de cuantización covariante vía integrales de camino, punto de vista introducido por Polyakov en el año 1981. En ella el objeto de estudio es la función partición Z, obtenida a partir de la acción (46), cuya interpretación se logra mediante las técnicas de Fadeev-Popov. Estas contemplan entre otras cosas la incorporación de campos fermiónicos llamados *fantasmas*. Con la incorporación de estos campos fantasmas el espacio de Fock ya no sólo contiene excitaciones de los campos de materia sino también contiene excitaciones de fantasmas y antifantasmas, por lo cual es necesario poder distinguir entre estos cuales son estados físicos y cuales no. El formalismo BRST provée una manera elegante para la identificación de los estados físicos.

Sin embargo, el formalismo BRST se puede estudiar en otro contexto completamente distinto pero igual de interesante. Para la cuantización de sistemas con Lagrangianos singulares[6], Dirac demostró que una descripción Hamiltoniana aún es válida en la cual las variables canónicas presentan ciertas ligaduras entre ellas. Éstas pueden ser de dos clases (primera y segunda) dependiendo del origen de la degeneración del Lagrangiano. En el primer caso, se debe a una invarianza de gauge, situación el la cual las ecuaciones de movimiento no determinan de manera unívoca las trayectorias y éstas no pueden ser reescritas como las ecuaciones de Hamilton, por que de no ser así bastaría con dar valores iniciales a las coordenadas q^i y los momenta p_i para fijar de manera unívoca la posterior evolución temporal del sistema. El segundo caso es cuando la degeneración del Lagrangiano se origina si las coordenadas q^i y los momenta p_i no satisfacen relaciones de conmutación/anticonmutación estándares de donde devienen estados de norma negativa. Ahora se ha argumentado que, las ligaduras de segunda clase se pueden entender como el resultado de la fijación del gauge de un sistema invariante de gauge más general, pero equivalente al primero, que presenta ligaduras de primera clase. Estos sistemas también pueden ser cuantizados mediante una carga BRST, que por los argumentos anteriores, garantizan la invarianza de gauge del sistema.

No obstante, aquí nos interesará un acercamiento más directo a la cuantización BRST y como ésta entrega una herramienta para diferenciar los

[6]Sistemas Lagrangianos en los cuales la transformación de Legendre del espacio de coordenadas y velocidades al espacio de fase, q^i, y $p_i = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}^i}$ puede ser invertida para obtener las velocidades $\dot{q}^i$ como función de las coordenadas y los momenta. Un trabajo muy claro de estas materias se encuentra en [7].

estados físicos del resto de estados en el espacio de Fock.

Definición de la carga BRST

Se define la carga BRST (Q_{BRST}) de la siguiente manera:

$$Q_{BRST} = c^i K_i - 1/2 \ f^k_{\ ij} \ c^i c^j b_k \ , \tag{59}$$

donde los K_i son los generadores de un álgebra, i.e., $[K_i, K_j] = f^k_{\ ij} \ K_k$, las variables c^i y b_j son campos fermiónicos de *Grassmann*[7] y además satisfacen la siguiente relación de anticonmutación:

$$\{c^i, b_j\} = \delta^i_{\ j} \ .$$

Se define el operador número de fantasma $U \equiv \sum_i c^i b_i$. Entonces se puede demostrar que la carga satisface: $Q^2_{BRST} = 0$, (apéndice B). De esta manera un estado χ con número de fantasma k se dice BRST invariante si $Q\chi = 0$. Obviamente los estados $\chi = Q\lambda$ son trivialemente BRST invariantes, pero éstos no son de gran interés. Dos estados χ y χ' son equivalentes si $\chi - \chi'$ es un estado trivial.

Ahora el camino es obvio, como el espacio de estados físicos no contiene fantasmas lo que hay que buscar son estados con número de fantasma cero que sean BRST invariantes. Para saber cuales son estos estados es esencial mirar la forma del operador de número de fantasma. Si el estado χ tiene número de fantasma 0, se ve que éste tiene que ser aniquilado por los b_k, por lo que al actuar sobre el estado χ con el operador Q, en virtud de lo anterior, resulta:

$$Q\chi = \sum_i c^i K_i \chi \ . \tag{60}$$

Ahora, dadas las relaciones de anticonmutación entre b_i y c^j, un estado que es aniquilado por b_i no puede ser aniquilado por ninguno de los c^j. Por lo tanto, si el estado χ es físico, entonces, la ecuación anterior es $Q\chi = 0$ que implica:

$$K_i \chi = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{61}$$

Y aquí viene la conclusión importante. Un estado con número de ghost igual a cero es invariante de BRST si es invariante bajo los generadores del álgebra de los K_i. Si bien la nilpotencia de Q es derivada de una manera

[7] Un número de Grassmann es un número anticonmutativo en base a los cuales se pueden construir superespacios y otras propiedades muy interesantes que aparecen estudiadas en [4].

aparentemente general, es necesario hacerlo con mayor precaución para el caso de álgebras infinito-dimensionales, donde pueden haber problemas de anomalías y otros relacionados al ordenamiento de los operadores en el operador de número de fantasma. Para **AV**, se demuestra que la nilpotencia es válida cuando ésta no presenta anomalía, que ocurre cuando la dimensión del espacio-tiempo es $D = 26$ y $a = 1$.

Ahora uno quisiera que los estados físicos sean estados invariantes bajo K_i con un número de fantasma definido, para lo cual el estudio del ordenamiento normal del operador U es de gran utilidad. En particular, se puede llegar a demostrar que el estado fundamental del sistema sobre el cual actúan los operadores de creación y aniquilación de fantasmas, es doblemente degenerado, posée dos estados $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$, cuyos números de fantasma se toman como $1/2$ y $-1/2$ respectivamente. Así un estado físico puede tener número de fantasma $\pm 1/2$ y previo análisis se demuestra que los estados físicos tienen número de fantasma igual a $-1/2$. De hecho, con esta elección la condición de invarianza BRST de los estados $|\chi\rangle$ se traduce en las condiciones de cuantización que aparecen en las ecuaciones (55) y (56). La conclusión de todo esto es que los estados físicos en la cuerda son aquellos estados que son invariantes bajo los generadores K_i y que tienen número de fantasma igual a $-1/2$. Es importante notar que esto no es contradictorio con el hecho que los estados físicos no tengan excitaciones de los campos fantasmas, mucho menos que éstos tengan $-1/2$ excitaciones de fantasmas o antifantasmas. El número de fantasma $-1/2$ deviene exclusivamente del ordenamiento normal de los operadores c^i y b_i.

Anteriormente mencionamos que la simetría generada por la carga BRST estaba asociada a una cierta invarianza de gauge del sistema. Con el análisis anterior esto es casi inmediato, en virtud de la nilpotencia de la carga Q, ya que si un estado $|\phi\rangle$ es físico, entonces el estado $|\phi \rightarrow= |\phi'\rangle = |\phi\rangle + Q|\lambda\rangle$, también lo es, la transformación siendo $\delta|\phi\rangle = Q|\lambda\rangle$.

6 Cuantización BRST con un álgebra distinta a AV

En la cuerda, el álgebra detrás de la teoría es el **AV**. Como vimos anteriormente, en ella los generadores satisfacen un álgebra de Lie con constantes de estructura bien definidas:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} \ , \qquad (62)$$

implicando que $[L_0, L_m] = -mL_m$ y $[L_m, L_m^\dagger] = [L_m, L_{-m}] = 2mL_0$ sugiriendo de inmediato el programa de Cartan resumido en las ecuaciones (39) hasta

(42). Por otro lado, la forma explícita de estos generadores es:

$$L_m = \begin{cases} \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty a_{-n}^\mu n\ a_n^\mu & \text{si } m = 0, \\ \\ \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^\infty a_{m-n}^\mu \sqrt{(m-n)n}\ a_n^\mu & \text{si } m \neq 0. \end{cases}$$

donde recordemos que los a_n^μ son operadores de aniquilación de excitaciones de los campos de materia. Es aquí donde el problema propuesto por Georgi (apéndice A) sugiere un camino para la generalización del **AV**. Si miramos la ecuación anterior veremos que los operadores de Virasoro tienen una forma similar a la de los operadores $\widehat{\Lambda}_i \equiv \sum_{l,m}\ a_l^\dagger[\Lambda_i]_{lm}a_m$ que se definen en el problema propuesto, cuidando si que los operadores de creación y aniquilación ahí definidos son algo diferentes, pero equivalentes (una suma sobre un índice μ está implícita): $a_l^\dagger \to a_{-l}^\mu$, etc...

6.1 Primer Intento

En virtud de lo anterior, es que se buscamos definir operadores que por un lado sean análogos a los operadores de Virasoro y por otro que preserven la clasificación de Cartan (imponiendo algunas restricciones para que esto sea así). Entonces definimos $\widehat{Q}_i$ (correspondiente a L_0) y $\widehat{Q}_\alpha$ (correspondiente a L_m:

$$\widehat{Q}_i = p^2\mu_i + \widehat{H}_i + p_\mu a_k^\mu \nu_{ki} + p_\mu a_k^{\mu\dagger}\nu_{ki}^* \ . \tag{63}$$

$$\widehat{Q}_\alpha = p_\mu a_k^\mu \lambda_k^\alpha + p_\mu a_k^{\mu\dagger}\lambda_k^{-\alpha*} + \widehat{T}_\alpha \ , \tag{64}$$

definidos tal que $\widehat{Q}_i$ sean hermíticos y $\widehat{Q}_\alpha$ satisfagan $\widehat{Q}_\alpha^\dagger = \widehat{Q}_{-\alpha}$. Donde se supone que los operadores $\widehat{H}_i$ y $\widehat{T}_\alpha$ están clasificados a la Cartan, escritos como los operadores $\widehat{\Lambda}_a$ en el problema de Georgi. Las cantidades λ_k^α y ν_{ki} han de ser interpretadas posteriormente. En particular, para reproducir el programa de Cartan para los operadores $\widehat{Q}\ 's$:

$$[\widehat{Q}_i, \widehat{Q}_j] = 0 \ , \tag{65}$$

$$[\widehat{Q}_i, \widehat{Q}_\alpha] = \alpha_i \widehat{Q}_\alpha \ , \tag{66}$$

$$[\widehat{Q}_\alpha, \widehat{Q}_\alpha^\dagger] = \alpha_i \widehat{Q}_i \ , \tag{67}$$

$$[\widehat{Q}_\alpha, \widehat{Q}_\beta] = N_{\alpha,\beta}\widehat{Q}_{\alpha+\beta} \ , \tag{68}$$

Es necesario que dichas cantidades satisfagan las siguientes ecuaciones:

$$(65) \Longrightarrow \begin{cases} \nu_{ki}\nu_{kj}^* - \nu_{ki}^*\nu_{kj} = 0 \ , \\ \\ \nu_{ki}[H_j]_{km} - [H_i]_{km}\nu_{kj} = 0 \ , \end{cases}$$

$$
(66) \Longrightarrow \begin{cases} \nu_{ki}\lambda_k^{-\alpha *} - \lambda_k^{\alpha}\nu_{ki}^{*} = 0 \ , \\ \\ \nu_{ki}[T_\alpha]_{km} - \lambda_l^{\alpha}[H_i]_{lm} - \alpha_i\lambda_m^{\alpha} = 0 \ , \end{cases}
$$

$$
(67) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_k^{\alpha}\lambda_k^{\alpha *} - \lambda_k^{-\alpha}\lambda_k^{-\alpha *} = \alpha_i\mu_i \ , \\ \\ \lambda_k^{\alpha}[T_{-\alpha}]_{km} - \lambda_k^{-\alpha}[T_\alpha]_{km} = \alpha_i\nu_{mi} \ , \end{cases}
$$

$$
(68) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_k^{\alpha}\lambda_k^{-\beta *} - \lambda_k^{\beta}\lambda_k^{-\alpha *} = 0 \ , \\ \\ \lambda_k^{\alpha}[T_\beta]_{km} - \lambda_k^{\beta}[T_\alpha]_{km} = N_{\alpha,\beta}\lambda_m^{(\alpha+\beta)} \ . \end{cases}
$$

Donde estas ecuaciones son todas compatibles. Encontramos la siguiente solución para λ_k^{α}:

$$
\lambda_k^{\alpha} = \Sigma_j[T_\alpha]_{jk} \ , \tag{69}
$$

que de ser reemplazada en las ecuaciones anteriores implica:

$$
[H_i]_{jl}\Sigma_l^{*} = \mu_i\Sigma_j^{*} \ , \tag{70}
$$

$$
\nu_{mi} = \Sigma_j[H_i]_{jm} = \Sigma_m\mu_i \ . \tag{71}
$$

Teniendo así una interpretación para las cantidades desconocidas, ya que de la ecuación (70) se ve que Σ_l^{*} sea el peso de la matriz $[H_i]_{jl}$ en la representación provista por la base en que H_i es diagonal. Compárese con ecuación (22).

El camino a seguir parecía claro y promisorio. Tenemos un álgebra a partir de la podríamos construir la carga BRST y luego encontrar ecuaciones de movimiento para campos escalares, vectoriales y tensoriales, siguiendo el camino de Jevicki [8]. Sin embargo, los resultados fueron desalentadores, obligando a cuestionarnos acerca de nuestra generalización del **AV**. Los cálculos se basan en el método de los *background fields* y en una de las simetrías de la acción de Polyakov, la invarianza conforme, aspectos son bastante técnicos y su estudio detallado nos apartaría de nuestros horizontes, acá sólo nos interesará la existencia de los campos background. Estos los podemos pensar como combinaciones de campos escalares, vectoriales y tensoriales con excitaciones de materia de manera de tener funciones de onda escalares, (con número de fantasma determinado), que a parte de todas las excitaciones de los campos de materia, que se van a generar al aplicar operadores de creación al vacío, ya están presentes. Particularmente, para el primer estado masivo, la cuerda está descrita por un campo ϕ que contiene cinco campos background[8]. Luego las ecuaciones de campo respectivas se obtienen mediante la carga BRST de la manera esbozada anteriormente. Para el primer estado masivo,

[8]El mismo campo background de Witten que se usa en [8].

segun Witten, la cuerda está descrita por un campo ϕ que contiene cinco campos background.

$$\begin{aligned}\phi &= [E_{\mu\nu}(x)\alpha^{\mu}_{-1}\alpha^{\nu}_{-1} \ + \ iB_{\mu}(x)\alpha^{\mu}_{-2} \ + \ iS_{\mu}(x)\alpha^{\mu}_{-1}c_0 b_{-1} \\ &\quad - 2\psi(x)c_{-1}b_{-1} \ + \ S(x)c_0 b_{-2}]|-\rangle \ , \end{aligned} \tag{72}$$

de donde se obtendrán ecuaciones de campo mediante $Q|\phi\rangle = 0$, la condición de estado físico. En particular, usando el **AV** como los generadores para construir la carga BRST y teniendo las siguientes precauciones:

1. $[x^{\mu}, p^{\mu}] = i\hbar\eta^{\mu\nu}$,
2. Como los campos dependen de x, no conmutan con $\alpha_0^{\mu} \sim p^{\mu}$,
3. $c^m = c_{-m} \longrightarrow \{c_m, b_n\} = \delta_{m+n}$,
4. $c_0|+\rangle = b_0|-\rangle = 0$, $c_0|-\rangle = |+\rangle$ y $b_0|+\rangle = |-\rangle$ y
5. $c_n|\pm\rangle = b_n|\pm\rangle = 0$ si $n > 0$.

La forma explícita de la carga BRST será:

$$\begin{aligned}Q &= c_{-m}L_m \ - \ 1/2(m-n)c_{-m}c_{-n}b_{m+n} \\ &= c_0 L_0 \ + \ \frac{1}{2}c_{-m}\sum_{\infty}^{\infty}\alpha^{\rho}_{m-n}\alpha^{\rho}_{n} \ - \ 1/2(m-n)c_{-m}c_{-n}b_{m+n} \\ &= \frac{c_0}{2}\alpha_0^2 \ + \ c_0\sum_{1}^{\infty}\alpha^{\rho}_{-n}\alpha^{\rho}_{n} - \ c_0 a \ + \ \frac{c_{-m}}{2}\sum_{\infty}^{\infty}\alpha^{\rho}_{m-n}\alpha^{\rho}_{n} \\ &\quad - \ 1/2(m-n)c_{-m}c_{-n}b_{m+n}\end{aligned} \tag{73}$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento para los campos, se factorizan los términos que tengan iguales excitaciones de masa:

$$(\Box - 2)E_{\mu\nu} + \partial_{(\nu}S_{\nu)} + \eta_{\mu\nu}S = 0 \ , \tag{74}$$

$$(\Box - 2)B_{\mu} + 2S_{\mu} - \partial_{\mu}S = 0 \ , \tag{75}$$

$$\partial^{\mu}E_{\mu\nu} - B_{\mu} + S_{\mu} + \partial_{\mu}\psi = 0 \ , \tag{76}$$

$$E^{\rho}{}_{\rho} + 2\partial^{\rho}B_{\rho} + 6\psi - 4S = 0 \ , \tag{77}$$

$$(\Box - 2)\psi - \partial^{\mu}S\mu - 3S = 0 \ . \tag{78}$$

En nuestro caso construimos la carga BRST usando nuestros generadores en vez de los generadores de Virasoro. Sin embargo, para poder seguir el método de Jevicki tendremos que definir el background field, el vacío y el número de fantasma. Para ello recordemos que en el caso de Virasoro, tomando sólo el término donde aparecen los generadores, $Q = c_{-n}L_n$. El vacío $|0\rangle$

será tal que $c_{-n}|0\rangle \neq 0$ si $n > 0$, ya que para los $n > 0$ el vació es aniquilado por el generador de Virasoro (condición de estado físico), y $c_n|0\rangle = 0$ si $n > 0$. Procedemos para nuestro caso en completa analogía. $Q = c_{-\alpha}\widehat{Q}_\alpha$, suponiendo $c_\alpha|0\rangle = 0$ si $\alpha > 0$, entonces $\widehat{Q}_\alpha|0\rangle = 0$ si $\alpha > 0$. Lo cual es completamente razonable dentro de nuestro marco porque α no es sólo un índice sino una raíz, por lo tanto $\widehat{Q}_\alpha$ es un operador de aniquilación (creación) si $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$). Para construir nuestros generadores $\widehat{Q}_\alpha$ necesitamos de la representación particular de un álgebra (correspondiente a las matrices H_i y T_α). Tomando casos conocidos, escojemos trabajar con la representación 3-dimensional de $SU(2)$. Uno puede verificar que los operadores $\widehat{Q}_i$ y $\widehat{Q}_\alpha$ que puede construir de manera tal que tengan el álgebra de $SU(2)$ son:

$$\widehat{Q}_3 = p^2 \ + \ b^\dagger_{i\alpha}[S_3]_{ij}b_{j\alpha} \ + \ p(b_1 + b^\dagger_\alpha) \ , \tag{79}$$

$$\widehat{Q}_+ = p_\mu b_{2\mu} \ + \ b^\dagger_{i\alpha}[S_+]_{ij}b_{j\alpha} \ . \tag{80}$$

Acá la notación debe ser clara. En $SU(2)$ hay un solo elemento en el **SC** (usualmente aludido como J_3) y esta álgebra tiene una sola raíz $+1$. Naturalmente $\widehat{Q}^\dagger_+ = \widehat{Q}_-$. Recordando la representación utilizada:

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ ,$$

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

$$S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

y reemplazando en las ecuaciones (79) y (80) vemos que $\widehat{Q}_+ = b^\dagger_{1\mu}b_{2\mu} + b^\dagger_{2\mu}b_{3\mu} + p_\mu b_{2\mu}$ de donde efectivamente $\widehat{Q}_+|0\rangle = 0$ y $\widehat{Q}_-|0\rangle \neq 0$. Es importante verificar que los generadores en las ecuaciones (79) y (80) son equivalentes a los que definimos en las ecuaciones (63) y (64). De hecho,

$$\widehat{Q}_- = \widehat{S}_- + p_\mu b_{m\mu}\lambda^-_m + p_\mu b^\dagger_{m\mu}\lambda^{+*}_m \ . \tag{81}$$

Donde $\widehat{T}_- \equiv b^\dagger_{i\mu}\ [S_-]_{ij}\ b_{j\mu} = b^\dagger_{2\mu}b_{1\mu} + b^\dagger_{3\mu}b_{2\mu}$, usando la representación dada. Además, $\lambda^-_m = \Sigma_j[T_-]_{jm}$ y recordemos que los Σ^*_j son los pesos máximos de $SU(2)$, en este caso el autovector con autovalor más grande correspondiente a la representación dada para S_3 ($\Sigma^*_j = (1\ 0\ 0)^T$). Así, $\lambda^-_m = 0$ y $\lambda^+_m = 1$. Con lo cual $\widehat{Q}_- = b^\dagger_{2\mu}b_{1\mu} + b^\dagger_{3\mu}b_{2\mu} + p_\mu b^\dagger_{2\mu}$, para $\widehat{Q}_+$ es simplemente el tomar conj. hermítico al anterior. Para $\widehat{Q}_3$ la demostración es análoga. Por lo tanto, efectivamente, los operadores $\widehat{Q}_{\pm}$ y $\widehat{Q}_3$ de la manera que los definimos, son equivalentes a la forma que aparece en las ecuaciones(63) y (64).

Encontremos ahora las ecuaciones de movimiento para campos siguiendo el programa de Jevicki usando esta forma bien particular de los generadores (para construir la carga BRST). Aquí sólo tenemos tres generadores $\widehat{Q}_3, \widehat{Q}_+$ y $\widehat{Q}_-$. Recordemos que los índices latinos que tienen los operadores de creación y aniquilación de fantasmas (c^i, b_j) toman tantos valores como generadores tenemos. La carga BRST es

$$Q_{BRST} = c_3\widehat{Q}_3 + c_+\widehat{Q}_+ + c_-\widehat{Q}_- - 1/2 f^k_{ij} c_{-i} c_{-j} b_k. \tag{82}$$

Pensemos primero en encontrar ecuaciones para un campo escalar y tomemos como el vacío el estado ya mencionado $|0\rangle$. Así la cantidad $\phi(x)|0\rangle$ es una posible función de onda escalar. Ahora si estamos pensando en actuar sobre este campo con la carga (82), vemos que de los únicos tres términos cuyas constantes de estructura no se anulan en el último término de (82), $(-c_3c_+b_-, c_3c_-b_+ \text{ y} c_-c_+b_3)$, sólo contribuye $-c_3c_+b_-$. El estado $\phi(x)|0\rangle$ será físico si $Q_{BRST}\phi(x)|0\rangle = 0$.

$$Q_{BRST}\phi(x)|0\rangle = [c_3\widehat{Q}_3 + c_+\widehat{Q}_- + c_-\widehat{Q}_+ + 1/2 c_0 c_+ b_-]\phi(x)|0\rangle\ . \tag{83}$$

De ahora en adelante a la carga BRST no le pondremos su subíndice correspondiente pues se entiende cuando hablamos de la carga o de los generadores. En (83) el segundo se anula porque como el campo fantasma c_+ lo puedo conmutar con el generador $\widehat{Q}_-$, aniquilará al vacío. El tercer término también se anula pues $\widehat{Q}_+$ está ordenado normalemente, es decir tiene sólo operadores de aniquilación de excitaciones por la derecha, por lo tanto, también aniquila al vacío. Recordemos ahora la forma que tiene $\hat{Q}_3$ y por el mismo argumento anterior omitimos los términos que llevan operadores de aniquilación de excitaciones por la derecha. Entonces $\widehat{Q}_3\phi(x)|0\rangle = [p^2 + p_\mu \alpha^\mu_{-1}]\phi(x)|0\rangle$. Finalmente, la ecuación (83) provée dos ecuaciones para el campo escalar

$$(2\Box - 1)\phi(x) = 0 \tag{84}$$

$$\partial_\mu \phi(x) = 0 \tag{85}$$

Que es una solución trivial $\phi(x) = 0$.

Se hizo lo análogo para un campo vectorial $A_\mu(x)$. Un posible aporte como función de onda escalar será la combinación $A_\mu \alpha^\mu_{-1}|0\rangle$ tal que se tenga una función de onda escalar. La forma de la carga BRST sigue siendo la misma. Cuidando que $\widehat{Q}_3 A_\mu(x)\alpha^\mu_{-1}|0\rangle$ provée términos diferentes que en el caso anterior, las ecuaciones de para el campo resultan

$$(\Box - 1)A_\mu(x) = 0\ , \tag{86}$$

$$\partial_\nu A_\mu(x) = 0, \tag{87}$$

$$\partial^\mu A_\mu(x) = 0\ . \tag{88}$$

Nuevamente soluciones triviales. Como se comentara al inicio de estos cálculos, esto nos hizo preguntarnos si es que efectivamente nuestro generadores realmente generalizan la "forma"[9] de **AV**. De explorar esta última, nos dimos cuenta que esta no era tal pues nosotros no incluíamos términos esenciales de los generadores de Virasoro, cuya presencia no nos fue evidente desde un principio. Esto se debió, en parte, a que quisimos ceñirnos al pie de la letra al problema propuesto por Georgi.

Los términos olvidados

En el **AV** efectivamente hay términos que pasamos por alto, recordemos los generadores L_m con $m \neq 0$

$$L_m = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} a^\mu_{m-n}\ \sqrt{(m-n)n}\ a^\mu_n \quad \text{si} \quad m \neq 0\ . \tag{89}$$

Entonces, en los generadores de Virasoro (89), cuando $m - n > 0$ y $n > 0$ ($m-n < 0$ y $n < 0$), hay contribución de términos cuadráticos en operadores de destrucción $a^\mu_n a^\mu_n$ (creación) $a^{\mu\dagger}_n a^{\mu\dagger}_n$, que nuestro generadores no incluyen.

6.2 Segundo Intento

Después de buscar otras formas de generalización vimos que lo mejor era adoptar la notación del **AV** para los operadores de creación y aniquilación (distinguirlos según el signo del subíndice).

6.2.1 Definición de los generadores

Definamos unos operadores de creación como los de la cuerda como en las ecuaciones (52) hasta (54).

$$[a^\mu_n, a^\nu_m] = \sigma(n)\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}\ , \tag{90}$$

donde: $a^\mu_0 = p^\mu$, $\sigma(n)$ es la función signo de n tal que $\sigma(0) = 0$ y naturalmente los a^ν_n son operadores de creación (destrucción) si $n < 0 (> 0)$. Definamos $\widehat{T}^i$ (sin hacer alusión a los elementos del **SC**) de manera similar a lo hecho en el probelma de Georgi.

$$\widehat{T}^i \equiv \sum_\mu \sum_{n,m\neq 0} a^\mu_n\ T^i_{nm}\ a^\mu_m \qquad\qquad m \neq 0. \tag{91}$$

[9]Refiriéndose a como van los subíndices de los operadores de creación y aniquilación

6.2.2 Generalización del problema de Georgi

Ahora los nuevos generadores definidos a partir de estas nuevas matrices T^i_{nm} no han de tener la propiedad que propone Georgi, (i.e. que los nuevos operadores cierren un álgebra con las mismas constantes de estructura que las matrices originales). Sin embargo, si imponemos la condición que las matrices T^i_{nm} cierren un álgebra a la *Cartan* y vemos que condiciones pone esto para que los generadores definidos a partir de estas matrices cierren un álgebra[10] con las mismas constantes de estructura, podremos entonces generalizar el **AV** a un álgebra clasificada a la *Cartan*.

$$\begin{aligned} [\widehat{T}^i, \widehat{T}^j] &= \sum_{\mu,\nu} \sum_{m,n,o,p} T^i_{n,m}\, T^j_{o,p}\ [a^\mu_n\, a^\mu_m, a^\nu_o\, a^\nu_p] \\ &= [a^\mu_p\, a^\mu_m\, \sigma(n)\, T^i_{n,m}\, T^j_{-m,p} + a^\mu_o\, a^\mu_m\, \sigma(n)\, T^i_{n,m}\, T^j_{o,-n} + \\ &\quad a^\mu_n\, a^\mu_p\, \sigma(m)\, T^i_{n,m}\, T^j_{-m,p} + a^\mu_n\, a^\mu_p\, \sigma(m)\, T^i_{n,m}\, T^j_{o,-m}]\ . \end{aligned} \tag{92}$$

Donde se han usado las reglas de conmutación de los operadores a^μ_n , una suma sobre índices repetidos está implícita (con los índices latinos $\neq 0$) y además se usó la propiedad del conmutador $[AB, CD] = [A, C]DB + C[A, D]B + A[B, C]D + AC[B, D]$. Ahora, si en el primer término de la segunda expresión hacemos el cambio $p \leftrightarrow n$, $m \leftrightarrow p$ y $n \leftrightarrow k$, en el segundo término hacemos $o \leftrightarrow n$, $m \leftrightarrow p$ y $n \leftrightarrow k$ y finalmente en el cuarto término hacemos $o \leftrightarrow p$, se obtiene:

$$\begin{aligned} [\widehat{T}^i, \widehat{T}^j] &= a^\mu_n\, a^\mu_p \Big\{ \sigma(m)\, T^i_{n,m}\, T^j_{-m,p} + \sigma(m)\, T^i_{n,m}\, T^j_{p,-m} \\ &\qquad \sigma(k)\, T^i_{k,p}\, T^j_{-k,n} + \sigma(k)\, T^i_{k,p}\, T^j_{n,-k} \Big\}\ . \end{aligned} \tag{93}$$

Una manera de seguir manejando esta expresión es imponer condiciones sobre las matrices T^i_{nm}. En particular, volclásicamente, el conmutador se cambia por el corchete de Poisson (factor i mediante) y los operadores de subida y bajada son funciones que conmutan. Así las nuevas matrices serán manifiestamente simétricas: $\widehat{T}^i \equiv a^\mu_n\, T^i_{n,m}\, a^\mu_m\ = a^\mu_m\, T^i_{n,m}\, a^\mu_n$ por que puedo conmutar las funciones y luego hago $n \leftrightarrow m$, de donde: $T^i_{n,m} = T^i_{m,n}$. Ahora esta propiedad de simetría ha de mantenerse al pasar al caso cuántico, lo único que cambia son los corchetes de Poisson por el conmutador (mod i) y las funciones son promovidas a operadores actuando sobre vectores en un espacio de Hilbert.

Así en la ecuación (93) los elementos de matriz los podemos ordenar como queramos (son números), entonces, si en el cuarto término invertimos el orden de los elementos de matriz y hago el cambio $k \leftrightarrow -m$, de compararlo con

[10] En nuestro intento de generalización es esencial que los generadores cierren un álgebra para así poder construir el operador de 2^a cuantización Q_{BRST}, ya que de no ser así el operdar no será *nilpotente* perdiendo así todo valor.

el primer término, tendríamos un conmutador, con un nuevo producto de matrices por definir. El mismo cambio en el tercer término y su comparación con el segundo término sugieren igual cosa, el resultado entonces es:

$$
\begin{aligned}
[\widehat{T}^i, \widehat{T}^j] &= a_n^\mu \ a_p^\mu \Big\{ \sigma(m)[\ T^i_{n,m}\ T^j_{-m,p} - \ T^j_{n,m}\ T^i_{m,p}] \\
&\qquad\qquad \sigma(m)[\ T^i_{n,m}\ T^j_{-m,p} - \ T^j_{n,m}\ T^i_{m,p}] \Big\} \\
&= 2\ a_n^\mu \ a_p^\mu \Big\{ \sigma(m)[\ T^i_{n,m}\ T^j_{-m,p} - \ T^j_{n,m}\ T^i_{m,p}] \Big\}. \qquad (94)
\end{aligned}
$$

6.2.3 El nuevo producto de matrices

Definiendo un nuevo producto de matrices $\star$ de la siguiente manera:

$$
[A \star B]_{np} \equiv 2\ \sigma(k)\ A_{n,k} B_{-k,p}\ , \qquad (95)
$$

sumando sobre k, que naturalmente es distributivo y asociativo:

$$
\begin{aligned}
[A \star (B + C)]_{i,j} &= 2\ \sigma(k)\ A_{i,k}\ (B_{-k,j} + C_{-k,j}) \\
&= 2\ \sigma(k)\ A_{i,k}\ B_{-k,j} + 2\ \sigma(k)\ A_{i,k}\ C_{-k,j} \\
&= [A \star B]_{ij} + [A \star C]_{ij}\ , \qquad (96)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[(A \star B) \star C]_{i,j} &= 2\ \sigma(m)\ [A \star B]_{i,m}\ C_{-m,j} \\
&= 4\ \sigma(m)\ \sigma(k)\ A_{i,k}\ B_{-k,m}\ C_{-m,j} \\
&= 2\ \sigma(k)\ A_{i,k}\ (2\ \sigma(m)\ B_{-k.m}\ C_{-m,j}) \\
&= 2\ \sigma(k)\ A_{i,k}\ [B \star C]_{-k,j} = [A \star (B \star C)]_{i,j}\ . \qquad (97)
\end{aligned}
$$

Con este nuevo producto de matrices $\star$, generalizamos el problema sugerido por Georgi, es decir:

$$
[\widehat{T}^i, \widehat{T}^j]_{n,p} = \sum_\mu \sum_{n,p\neq 0}\ a_n^\mu\ [T^i, T^j]_{n,p}\ a_p^\mu\ . \qquad (98)
$$

El que hayamos generalizado el problema de Georgi es muy importante para nuestros propósitos, ya que de esta manera si las matrices T^i_{nm} pueden ser clasificadas a la Cartan, también lo serán nuestros operadores $\widehat{T}^i$ y así podremos diferenciar entre ellos operadores de subida y bajada y el resto de operadores cuyos autovalores nos sirven para ir construyendo las representaciones irreducibles del álgebra.

6.2.4 Conexión con la Cuerda

Verifiquemos que podemos recuperar los generadores de Virasoro. Para ello escribamos los operadores de Virasoro.

$$
L_m = \begin{cases} \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty a^\mu_{-n} n\ a^\mu_n & \text{si } m = 0, \\ \\ \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^\infty a^\mu_{m-n}\ \sqrt{(m-n)n}\ a^\mu_n & \text{si } m \neq 0. \end{cases}
$$

Así, si comparamos éstos con la ecuación (91) veremos que si escojemos:

$$[T^m]_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2}\, T^m_{o,o}\, p^2 + \frac{1}{2}\, i\, \delta_{i+j} & \text{si } m = 0, \\ \\ \frac{1}{2}\, \sqrt{ij}\, \delta_{i+j-m} & \text{si } m \neq 0. \end{cases}$$

recuperamos los generadores de Virasoro. Las nuevas matrices son simétricas bajo el intercambio $i \leftrightarrow j$ si es que quisiéramos recuperar el **AV**, (siempre y cuando los índices i y j tengan el mismo signo). Esto es de esperarse puesto que partimos suponiendo que las representaciones matriciales de $[T^m]_{ij}$ son simétricas, pero vale la pena verificar que también sea así para el **AV**. En esto ya vemos un resultado interesante. Si se quiere generalizar el **AV** en el sentido que nosotros lo hemos hecho, es preciso adoptar como producto el que definimos en (95), de manera que con respecto a ese producto las matrices formen un álgebra (siendo la asociatividad del producto un requisito para esto) y así poder completar todo el cuadro de la cuantización BRST usando estos generadores.

El paso siguiente sería encontrar al menos un álgebra que no sea la de Virasoro y que de resultados, ojalá, mejores que los del primer intento de generalización. Para ello es necesario estudiar un poco la teoría de representaciones de matrices con nuestro producto particular.

6.3 Posible realización en un álgebra conocida

Como lo hiciéramos anteriormente, tomemos el álgebra de $SU(2)$ y veamos que forma tiene su representación usando nuestro producto de matrices. Primero es bueno resaltar alguna propiedades de los generadores. Como los estamos suponiendo simétricos y además los generadores correspondientes a operadores de subida y bajada $J_\pm$ no son hermíticos, entonces éstos no pueden ser reales. Segundo, el concepto de diagonalidad se ve alterado con nuestro producto, ya no alude a la diagonalidad "visual" de una representación. Pensémoslo de esta manera, toda matriz escrita con respecto a la base de sus autovectores es diagonal y tiene como elementos los autovalores asociados a los autovectores correspondientes. En nuestro caso, todo el proceso de diagonalización con respecto a los autovectores está mediado por un producto que no es el usual y por eso es que la forma canónica para una matriz diagonal se ve alterada.

En particular, para $SU(2)$ hay una única matriz diagonal (J_3) que por si sola forma el **SC**. Por lo tanto en el análisis anterior, cuando hablamos de autovectores con respecto al cual la matriz es diagonal, en realidad estamos hablando de los vectores peso de $SU(2)$. Por eso partimos con las siguientes matrices:

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_3 \\ 0 & b_3 & 0 \\ d_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$J_+ = \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix} .$$

Donde imponemos que se satisfaga la siguiente relación $[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm$[11] (cuidando siempre usar nuestro producto). Lo cual nos da dos soluciones que fijan de manera distintas las constantes del problema. Luego de imponer además que $[J_+, J_-] = J_3$ tenemos más condiciones sobre las constantes. Sólo indicaremos los resultados. De seguir la primera solución y después de imponer la segunda condición se obtiene que $b_3 = 0$. Análogamente para la segunda solución resulta que $d_3 = 0$. Analicemos estas soluciones.

En este caso la matriz J_3 es el elemento del **SC**. Si recordamos el caso de la cuerda, $L_0|0\rangle = 0$ lo podemos interpretar como el hamiltoniano del sistema, (conmuta con todos los otros operadores del sistema y además nos entrega una expresión para las masas de las excitaciones de la cuerda (91)). Es preciso entonces que nuestro J_3 tenga un término dinámico $p^2 \sim \alpha_0^\mu \alpha_0^\nu \eta^{\mu\nu}$. Si miramos la ecuación que define nuestros generadores (91), nos damos cuenta que dicho término viene de la componente $(0,0)$ de la matriz. Por esta razón es que la solución $b_3 = 0$ la descartamos pues “no tiene dinámica”. Sin embargo, la segunda solución, por el mismo argumento, no contiene término que intercambien las excitaciones de la cuerda, a_n^μ, por lo tanto todas ellas serían degeneradas en masa, pero si tiene dinámica.

Esta solucón requiere $-2ce = b_3, d_3 = 0, a = 0$ y $c \neq 0$. Las cuales nos hacen pensar en un álgebra mucho más simple que la de $SU(2) : [J_3, J_+] = [J_3, J_-] = 0$ y $[J_+, J_-] = J_3$. Podemos escribir explícitamente la forma de los operadores en términos de los operadores de creación y aniquilación de excitaciones en la cuerda:

$$\widehat{J}_3 = 1/2 b_3 p^2 , \tag{99}$$

$$\widehat{J}_+ = c p_\mu a_{1\mu}^\dagger , \tag{100}$$

$$\widehat{J}_- = e p_\mu a_{1\mu} . \tag{101}$$

[11]Notar que este es un problema de autovalores y autovectores en la **RA**, con nuestro producto que altera ambos lados de la ecuación. Esto lo pudimos entender cuando nos dimos cuenta que de no considerar nuestro producto a ambos lados de la ecuación el conmutador de dos matrices simétricas no nos daba una matriz antisimétrica, en circunstancias que se puede demostrar que las matrices simétricas son cerradas bajo conmutación.

Si imponemos que $J_+^\dagger = J_- \longrightarrow c^* = e$, $(-2|c|^2 = b_3)$. Verificar que se sigue satisfaciendo el álgebra mencionada es trivial[12].

Si construimos la carga BRST como fuera definida y recordando que ahora dos de los tres conmutadores se anulan obtenemos

$$Q = c_0 \widehat{J}_3 + c_{-1}\widehat{J}_- + c_1 \widehat{J}_+ - c_1 c_{-1} b_0 \ , \tag{102}$$

que es perfectamente nilpotente. En este caso no tenemos la certeza que el vacío, llamemos $|-\rangle$, sea degenerado en número de fantasma pero lo que si podemos suponer como natural que éste sea físico. Analizando $Q|-\rangle = 0$, podemos concluir que $c_1|-\rangle = b_1|-\rangle = 0$, $c_{-1}|-\rangle \neq 0 \neq b_{-1}|-\rangle$, $c_0|-\rangle = |+\rangle$ y $b_0|-\rangle = 0$. Considerando que el vacío es aniquilado por J_- y J_3.

Ahora el camino es encontrar ecuaciones de campo que sean inducidos por la simetría BRST de algún estado $|A\rangle$. Es decir

$$|A\rangle \longrightarrow |A'\rangle = |A\rangle + Q|\lambda\rangle \ , \tag{103}$$

por lo tanto, $\delta|A\rangle = Q|\lambda\rangle$. Para poder obtener ecuaciones de campo apropiadas es preciso que $|A\rangle$ sea una función de onda escalar, con lo cual un posible $|\lambda\rangle$ será:

$$|\lambda\rangle = b_{-1}\lambda(x)|-\rangle \ . \tag{104}$$

Luego la variación de $|A\rangle = \delta|A\rangle = Q|\lambda\rangle$ es

$$\begin{aligned} Q|\lambda\rangle \ &= \ c_0 J_3 b_{-1}\lambda(x)|-\rangle \ + \ c_{-1}J_- b_{-1}\lambda(x)|-\rangle \\ &\quad + \ c_1 J_+ b_{-1}\lambda(x)|-\rangle \ - \ c_1 c_{-1} b_0 b_{-1}\lambda(x)|-\rangle \ . \end{aligned} \tag{105}$$

Pero J_- tiene un operador de destrucción anulando así el término donde aparece y el último término se anula por la acción de b_0 sobre el vacío. Luego la variación de $|A\rangle$ es

$$Q|\lambda\rangle = c_0 J_3 b_{-1}\lambda(x)|-\rangle \ + \ c_1 J_+ b_{-1}\lambda(x)|-\rangle \ . \tag{106}$$

Notando que $J_3\lambda(x)$ es un escalar y que $J_+\lambda(x)$ es un vector vemos que el estado $|A\rangle$ que estamos buscando debe ser de la forma:

$$|A\rangle = \Omega(x) c_0 b_{-1}|-\rangle \ + \ A_\mu(x) a_1^{\mu\dagger}|-\rangle \ + \ \phi(x)|-\rangle \ , \tag{107}$$

talque las variaciones de los campos introducidos sean:

$$\delta\phi(x) = 0, \qquad \delta\Omega(x) = J_3\lambda(x) \qquad \text{y} \qquad \delta A_\mu(x) = c p_\mu \lambda(x) \ . \tag{108}$$

[12]El álgerba aludida es un álgebra de Lie que ha sido estudiada, ver [1] pag. 306

de manera que la transforamción cierre el álgebra. Finalmente podemos calcular las ecuaciones de movimiento para los campos auxiliares introducidos imponiendo $Q|A\rangle = 0$, con lo cual obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\Box A_\mu(x) - \frac{2ic}{b_3}\partial_\mu\Omega(x) = 0 \ , \tag{109}$$

$$\Box\phi(x) = 0 \qquad \text{y} \tag{110}$$

$$\partial_\nu A_\nu(x) + \frac{i}{c^*}\Omega(x) = 0. \tag{111}$$

Que de reemplazar (111) en (109) y recordando que $2|c|^2 = -1$, se obtiene:

$$\partial_\nu(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)) = \partial_\nu F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu,\nu} = 0. \tag{112}$$

Recuperamos las ecuaciones de Maxwell en notación tensorial. Esto nos hace sospechar que vamos por un buen camino.

Podríamos ver que sucede si tomamos como un nuevo generador de la simetría una función de onda a primer nivel de excitación en masa: $|\Lambda\rangle = b_{-1}a_1^{\mu\dagger}\Lambda(x)_\mu|-\rangle$. Entendiendo que ahora

$$|\tilde{A}\rangle \longrightarrow |\tilde{A}'\rangle = |\tilde{A}\rangle + Q|\Lambda\rangle \ . \tag{113}$$

Calculando $Q|\Lambda\rangle$ para que ver que forma tiene que tener $|A\rangle$ de manera que transforme como corresponda,

$$\begin{aligned} Q|\Lambda\rangle &= \frac{b_3}{2}p^2\Lambda_\mu(x)a^{\mu\dagger}c_0b_{-1}|-\rangle + c^*p_\mu\Lambda_\mu(x)c_{-1}b_{-1}|-\rangle \\ &\quad + \frac{c}{2}(p_\mu\Lambda_\nu(x) + p_\nu\Lambda_\mu(x))a^{\mu\dagger}a^{\nu\dagger}|+\rangle \ , \end{aligned} \tag{114}$$

donde en el último término hay que considerar la parte simétrica ya que los operadores $a^{\nu\dagger}$ y $a^{\mu\dagger}$ los puedo conmutar y luego cambiar los índices mudos $\mu \leftrightarrow \nu$.

Luego la variación de $|\tilde{A}\rangle = Q|\Lambda\rangle$ implica que $|\tilde{A}\rangle$ tiene que ser de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |\tilde{A}\rangle &= \psi_\mu(x)a_1^{\mu\dagger}c_0b_{-1}|-\rangle \ + \ \eta(x)c_{-1}b_{-1}|-\rangle \\ &\quad h_{\mu\nu}(x)a_1^{\mu\dagger}a_1^{\nu\dagger}|-\rangle, \end{aligned} \tag{115}$$

sujeto a que las variaciones de los campos sean:

$$\delta\psi_\nu(x) = \frac{b_3p^2}{2}\Lambda_\nu(x) \tag{116}$$

$$\delta\eta(x) = c^*p_\nu\Lambda_\nu(x) \tag{117}$$

$$\delta h_{\mu\nu}(x) = \frac{c}{2}(p_\mu \Lambda_\nu(x) + p_\nu \Lambda_\mu(x)) \ . \tag{118}$$

Nuevamente de imponer las ecuaciones de movimentos $Q|\tilde{A}\rangle = 0$ se obtienen las siguientes ecuaciones para los campos:

$$\Box\eta(x) - \frac{2ic^*}{b_3}\partial_\mu\psi_\mu(x) = 0 \ , \tag{119}$$

$$\Box h_{\mu\nu}(x) - \frac{ic}{b_3}(\partial_\mu\psi_\nu(x) + \partial_\nu\psi_\mu(x)) = 0 \ , \tag{120}$$

$$c\partial_\nu\eta(x) - 2c^*\partial_\mu h_{\mu\nu}(x) - i\psi_\nu(x) = 0 \ . \tag{121}$$

Que efectivamente son invariante bajos las transformaciones (116) hasta (118). Resolviendo para $h_{\mu\nu}(x)$ obtenemos:

$$\Box h_{\mu\nu} + h_{\lambda\lambda,\mu\nu} - (h_{\lambda\nu,\lambda\mu} + h_{\lambda\mu,\lambda\nu}) = 0 \ . \tag{122}$$

Ahora si nos detenemos a mirar esta última ecuación veremos que hemos llegado a otro resultado muy interesante. En la teoría de la relatividad general las ecuaciones para el campo graviatcional $g_{\mu\nu}$ se obtienen como soluciones a la ecuación de Einstein. En el estudio de las soluciones radiativas de campo débil[13], se supone que la métrica está cerca de la Minkowskiana $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, con $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Las ecuaciones de campo de Einstein para $h_{\mu\nu}$ a primer orden en h son:

$$\Box h_{\mu\nu} + h_{\lambda\lambda,\mu\nu} - (h_{\lambda\nu,\lambda\mu} + h_{\lambda\mu,\lambda\nu}) = -16\pi G S_{\mu\nu} \ . \tag{123}$$

(En nuestro caso no tenemos el término de materia, lo cual no es muy relevante ahora). Por lo tanto hemos encontrado un campo $h_{\mu\nu}$ que satisface las ecuaciones de Einstein linearizadas. Además si se compara como transforma nuestro campo $h_{\mu\nu}$ con el del campo gravitacional (ver [9]) vemos que éstos transforman de la misma de manera. Por lo tanto no sólo hemos recuperado el electromagnetismo y por ende tenemos un fotón en nuestra teoría sino también hemos recuperado parte de la gravitación, entonces tenemos además un gravitón.

[13]Esto no es una sorpresa puesto que, tal como en electromagnetismo hay soluciones radiativas a las ecuaciones de Maxwell, en gravitación habrán soluciones radiativas a las ecuaciones de Einstein y en el marco de las teorías de campos, estas dos presentan muchas similitudes, ver [9].

7 Conclusión:

En este trabajo vimos que la teoría de representaciones de las álgebras de Lie es una herramienta que provée un buen entendimiento de situaciones en física teórica. En nuestro caso era fundamental el poder crear operadores de creación y aniquilación de excitaciones de los campos de materia de la **TC**, (en otras áreas también la teoría de representaciones es fundamental, de hecho en la física de altas energías se habla de que las partículas fundamentales *viven* en las distintas representaciones irreducibles de un grupo). Luego pudimos entender como la cuantización BRST juega un papel muy importante en la cuantización de teorías fundamentales.

En particular logramos obtener resultados muy interesantes a partir de una teoría que está basada un principio de simetría (BRST). De hecho, logramos formular una teoría cuántica de campo que contiene sólo campos sin masa. La simetría BRST nos implica la existencia de dos de estos campos, uno de los cuales satisface las ecuaciones de Maxwell (con la debida ley de transformación para el campo A_μ) y otro que satisface las ecuaciones de Einstein linearizadas para el perturbaciones del campo gravitacional $h_{\mu\nu}(g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$, también con la debida ley de transformación. Es decir, dentro de nuestra teoría tenemos fotones y gravitones.

No obstante queda mucho por estudiar al respecto, hasta aquí sólo hemos reproducido parte de los resultados importantes de la **TC**. Particularmente interesante sería ver como poder introducir interacciones en esta teoría o incluso ver a donde nos lleva considerar álgebras más ricas que la que aquí usamos.

Finalmente es importante resaltar algo que hasta ahora no se había comentado. Nosotros trabajamos con representaciones simétricas y en base a ellas pudimos construir una teoría invariante de gauge mediante el operador nilpotente Q. Esto se asemeja mucho al operador derivada exterior que tambén es , lo cual sugiere fuertemente que debemos seguir estudiando si nuestro método nos permite desarrollar una teoría de gauge para campos tensoriales completamente simétricos, pues ésta es un área que aún no ha sido suficientemente estudiada.

A El problema $V.B$ de Georgi

Mostramos aquí el problema propuesto que aparece en [2], p 50, el cual nos mostró algunas pistas al momento de querer generalizar la forma del **AV**.

El enunciado

Sean Λ_i unas matrices de $N \times N$ que satisfacen $[\Lambda_l, \Lambda_m] = i\ f^k_{\ lm}\ \Lambda_k$. Sean $a_k^\dagger$ y a_k operadores de subida y bajada con $k = 1 \cdots N$, tales que:

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \qquad [a_i, a_j] = 0. \tag{124}$$

Si definimos unos operadores

$$\widehat{\Lambda}_i \equiv \sum_{l,m} \ a_l^\dagger [\Lambda_i]_{lm} a_m \ , \tag{125}$$

Estos satisfarán la siguiente álgebra:

$$[\widehat{\Lambda}_l, \widehat{\Lambda}_m] = i\ f^k_{\ lm}\ \widehat{\Lambda}_k\ , \tag{126}$$

Solución

Sólo basta calcular el conmutador $[\widehat{\Lambda}_a, \widehat{\Lambda}_b]$, recordar que $[\widehat{\Lambda}_a]_{ij}$ son sólo números y hacer uso de la propiedad del conmutador $[AB, CD] = [A, C]DB + C[A, D]B + A[B, C]D + AC[B, D]$.

$$\begin{aligned} [\widehat{\Lambda}_a, \widehat{\Lambda}_b] &= [\widehat{\Lambda}_a]_{ij}\ [\widehat{\Lambda}_b]_{lm}\ [b_i^\dagger\ b_j, b_l^\dagger\ b_m] \\ &= [\widehat{\Lambda}_a]_{ij}\ [\widehat{\Lambda}_b]_{lm} \Big\{ [b_i^\dagger, b_l^\dagger]\ b_m\ b_j + b_l^\dagger\ [b_i^\dagger, b_m]\ b_j \\ &\qquad b_i^\dagger\ [b_j^\dagger, b_l] b_m + b_i^\dagger\ b_l^\dagger [b_j, b_m] \Big\} \end{aligned} \tag{127}$$

Ahora,por las reglas de conmutación de los operadores en (124), el primer y último término en la ecuación anterior son cero, con lo cual sólo quedan dos términos

$$[\widehat{\Lambda}_a, \widehat{\Lambda}_b] = [\widehat{\Lambda}_a]_{ij}\ [\widehat{\Lambda}_b]_{lm} b_i^\dagger b_m \delta_{jl} - [\widehat{\Lambda}_b]_{lm}\ [\widehat{\Lambda}_a]_{ij} b_l^\dagger b_j \delta_{im}\ . \tag{128}$$

Donde se han reordenado los elementos de matriz en el segundo término, lo cual es legítimo puesto que son sólo números. Ahora si en este término hacemos el cambio $i \leftrightarrow l$ y $j \leftrightarrow m$ que son índices mudos, obtenemos el resultado pedido:

$$\begin{aligned} [\widehat{\Lambda}_a, \widehat{\Lambda}_b] &= [\widehat{\Lambda}_a]_{ij}\ [\widehat{\Lambda}_b]_{lm} b_i^\dagger\ b_m - [\widehat{\Lambda}_b]_{ij}\ [\widehat{\Lambda}_a]_{lm} b_i^\dagger\ b_m \\ &= b_i^\dagger [\widehat{\Lambda}_a\ \widehat{\Lambda}_b]_{im} b_m - b_i^\dagger [\widehat{\Lambda}_b\ \widehat{\Lambda}_a]_{im} b_m \\ &= b_i^\dagger [\widehat{\Lambda}_a, \widehat{\Lambda}_b]_{im} b_m \quad = \quad b_i^\dagger\ i\ f^c_{\ ab}\ [\widehat{\Lambda}_c]_{im} b_m \\ &= i\ f^c_{\ ab} \sum_{i,j} b_i^\dagger [\widehat{\Lambda}_c]_{im} b_m \quad = \quad i\ f^c_{\ ab}\ \widehat{\Lambda}_c. \end{aligned} \tag{129}$$

Es decir, los nuevos generadores definidos en (125) preservan el álgebra de *Lie* que satifacen las matrices originales.

B Nilpotencia de Q_{BRST}

$$Q^2_{BRST} = (c^i K_i - 1/2\ f^k_{\ ij}\ c^i c^j b_k)(c^l K_l - 1/2\ f^n_{\ lm}\ c^l c^m b_n)$$

$$\begin{aligned} Q^2_{BRST} &= c^i K_i c^l K_l - 1/2\ f^n_{\ lm} c^i K_i c^l c^m b_n \\ &\quad - 1/2\ f^k_{\ ij} c^i c^j b_k c^l K_l - 1/4\ f^k_{\ ij} f^n_{\ lm} c^i c^j b_k c^l c^m b_n. \end{aligned} \tag{130}$$

Vamos analizando los términos uno por uno:

- Primer término A:

$$A \equiv c^i K_i c^l K_l = c^l K_l c^i K_i = c^m K_m c^p K_p.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c^m K_m c^p K_p &= \frac{1}{2}(c^i c^l K_i K_l + c^l c^i K_l K_i) \\ &= \frac{1}{2}(c^i c^l K_i K_l - c^i c^l K_l K_i) = \frac{1}{2} c^i c^l [K_i, K_l]. \end{aligned} \tag{131}$$

  Por lo tanto $A = \frac{1}{2} c^i c^l f^k_{\ il}\ K_k$.

- Segundo Término B:

$$\begin{aligned} B &\equiv -1/2\ f^n_{\ lm} c^i K_i c^l c^m b_n = -1/2\ f^n_{\ lm} K_i c^i c^l c^m b_n \\ &= 1/2\ f^n_{\ lm} K_i c^l c^i c^m b_n = -1/2\ f^n_{\ lm} K_i c^l c^m c^i b_n \\ &= -1/2\ f^n_{\ lm} K_i c^l c^m (\delta^i_n - b_n c^i). \end{aligned} \tag{132}$$

  Donde se hizo uso de la anticonmutación entre c^i y b_n y además se usa la propiedad grassmaniana de los c^i. Por lo tanto, B contribuye con:

$$B = -1/2\ f^k_{\ lm} K_k c^l c^m + 1/2\ f^n_{\ lm} K_i c^l c^m b_n c^i$$

$$B = -A + C.$$

  Donde $-C$ es el tercer término que aparece en (130).

- Cuarto Término D:
  Falta verificar que $-1/4\ f^k_{\ ij} f^n_{\ lm} c^i c^j b_k c^l c^m b_n = 0$. Para esto, notemos que:

$$\begin{aligned} c^i c^j b_k c^l c^m b_n &= c^i c^j (\delta^l_k - c^l b_k) c^m b_n \\ &= c^i c^j c^m b_n \delta^l_k - c^i c^j c^l b_k c^m b_n \\ &= c^i c^j c^m b_n \delta^l_k - c^i c^j c^l (\delta^m_k - c^m b_k) b_n \\ &= c^i c^j c^m b_n \delta^l_k - c^i c^j c^l b_n \delta^m_k + c^i c^j c^l c^m b_k b_n. \end{aligned} \tag{133}$$

Al introducir las constantes de estructura, éstas son afectadas por las deltas:

$$D = f^k{}_{ij} f^n{}_{km} c^i c^j c^m b_n - f^k{}_{ij} f^n{}_{lk} c^i c^j c^l b_n - f^k{}_{ij} f^n{}_{lm} c^i c^j c^l c^m b_k b_n.$$

Haciendo el cambio $l \leftrightarrow m$ en el segundo término y usando el hecho que las constantes de estructura son completamente antisimétricas en el intercambio de cualquiera de sus índices, este se suma con el primero y quedan dos términos, E y F, respectivamente:

$$D = 2 f^k{}_{ij} f^n{}_{km} c^i c^j c^m b_n + f^k{}_{ij} f^n{}_{lm} c^i c^j c^l c^m b_k b_n.$$

- Quinto Término E:
  Este término se anula debido a la identidad de Jacobi que satisfacen las constantes de estructura:

$$f^k{}_{ij}\ f^n{}_{km} + f^k{}_{jm}\ f^n{}_{ki} + f^k{}_{mi}\ f^n{}_{kj} = 0.$$

$$\begin{aligned} E &= f^k{}_{ij} f^n{}_{km} c^i c^j c^m b_n \\ E &= f^k{}_{jm} f^n{}_{ki} c^j c^m c^i b_n = -f^k{}_{jm} f^n{}_{ki} c^j c^i c^m b_n = f^k{}_{jm} f^n{}_{ki} c^i c^j c^m b_n \\ E &= f^k{}_{mi} f^n{}_{kj} c^m c^i c^j b_n = -f^k{}_{mi} f^n{}_{kj} c^m c^i c^j b_n = f^k{}_{mi} f^n{}_{kj} c^i c^j c^m b_k \end{aligned} \tag{134}$$

  Entnoces $E = \frac{1}{3}\ c^i c^j c^m b_n\ (f^k{}_{ij}\ f^n{}_{km} + f^k{}_{jm}\ f^n{}_{ki} + f^k{}_{mi}\ f^n{}_{kj})$. Por lo tanto $E = 0$.

- Sexto Término F:
  Acá usaremos que el producto de dos variables grassmann es una variable grassman, entonces:

$$F = f^k{}_{ij} f^n{}_{lm} c^i c^j c^l c^m b_k b_n = -f^k{}_{ij} f^n{}_{lm} (c^l c^m)(c^i c^j) b_k b_n.$$

  Haciendo los cambios: $l \leftrightarrow i, m \leftrightarrow j, n \leftrightarrow k$ se obtiene que $F = -F$. Con lo que $F = 0$. Por lo tanto la carga BRST satisface:

$$Q^2_{BRST} = 0$$

Referencias

[1] M. Hamermesh: *Group Theory and its aplication to physical problems.* Dover (1989).

[2] H. Georgi: *Lie Algebras in Particle Physics. From Isospin to Unified Theories.* The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. (1982).

[3] M. Green, J. Schwarz, & E. Witten: *Superstring theory, Vol 1.* Cambridge University Press (1988).

[4] B. DeWitt: *Supermanifolds.* Cambridge University Press (1992).

[5] J. Polchinski: *String Theory, Vol I.* Cambridge University Press (1998).

[6] M. Chaichan & N. Nelipa: *Introduction to Gauge Field Theories.* Springer-Verlag (1984).

[7] M. Henneaux: *Quantization of systems with constraints.* The ICTP series in theoretical physics (Vol 5), World Scientific (1988).

[8] S Jain & A. Jevicki: *String field theory from Weyl invariance.* Phys. Lett. B **220** (1989), 379.

[9] S. Weinberg: *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*, John Wiley & Sons, Inc. (1972).