

Gravedad Cuántica de Lazos y Rayos Cósmicos Altamente Energéticos

Por

Gonzalo Alejandro Palma Quilodrán

20 de agosto de 2002

Agradecimientos

Estoy en deuda con muchas personas e instituciones. En primer lugar quiero agradecer a Jorge Alfaro, mi tutor, por su muy entusiasta apoyo y constante guía durante el transcurso de esta investigación. A Claudio Romero, por su apoyo, confianza, y excelentes clases durante mi periodo de estudiante de Licenciatura en la Facultad de Ingeniería de la U. de Chile. A Sebastián Gálvez, por las interminables y útiles discusiones con las cuales este trabajo se vio enormemente enriquecido (pero mucho más importante, por su cercana amistad).

Debo reconocer, en forma especial, a la Comisión Nacional de Ciencia y Tecnología (CONICYT), por el soporte brindado a través de la beca para estudiantes de postgrado y con la cual fui beneficiado durante el periodo 2000-2001.

También quisiera señalar mi más profunda gratitud hacia mis padres, Samuel y Cecilia. Sin su amor, apoyo y paciencia, el logro de este trabajo habría sido mucho más difícil, y mucho menos gratificante. Incluyo también a mis familiares (a todos sin excepción), en especial a Willo.

Finalmente, quisiera agradecer a mis amigos y amigas, que han estado muy presentes en esta última etapa de mi vida (sin ningún orden especial y repitiendo nombres): a Francisco, Rodrigo, Diego, Daniela, Juanita, Andrea, Martina, Alejo, Cristián, Carlos, Alejandra, Paris, Coti, Viño, Nadia, Pablo, Gonzalo, Fernando, etc. A todos con quienes juego fútbol. A mis actuales compañeros de celda, Mauro y Axel, y a mis antiguos compañeros de celda Emilio y Pato. Por último, no puedo dejar de mencionar a S. Prokofiev, F. Kafka y S. Kubrick (por mantenerme cuerdo).

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	V
Notación y Convenciones	VI
Introducción	VIII
1. Rayos C3smicos	1
1.1. Descripci3n del Fen3meno	1
1.2. Cinemática	5
1.3. Vida Media $\tau(E)$	6
1.4. P3rdida de Energ3a y Espectro	8
1.5. Foto-Producci3n $p + \gamma \rightarrow p + \pi$	12
1.6. Producci3n de Pares $p + \gamma \rightarrow p + e^+ + e^-$	15
1.7. Espectro Te3rico y Observado	17
2. Gravedad Cuántica de Lazos	21
2.1. Formalismo	21
2.2. Ecuaciones de Movimiento Efectivas	26
2.2.1. Fermiones	26
2.2.2. Fotones	29
2.3. Relaciones de Dispersi3n y Correcciones	30
2.3.1. Fermiones	30
2.3.2. Fotones	33
2.3.3. Otras Part3culas	34

2.3.4. Otras Relaciones de Dispersión	35
3. Modificaciones Cinemáticas	37
3.1. Generalidades	37
3.2. ILR, Causalidad y Estabilidad	41
3.2.1. Causalidad	42
3.2.2. Estabilidad	43
3.3. Condiciones de Umbral	44
3.4. Reacciones de Decaimiento	46
3.4.1. Producción de Pares, $\gamma + \gamma_e \rightarrow e^- + e^+$	47
3.4.2. Decaimiento Resonante, $p + \gamma \rightarrow \Delta$	50
3.4.3. Foto-Producción de Piones, $p + \gamma \rightarrow p + \pi$	52
3.4.4. Producción de Pares, $p + \gamma \rightarrow p + e^+ + e^-$	54
3.5. Resultados	56
3.5.1. Corrección α	56
3.5.2. Corrección η	57
3.5.3. Corrección λ	58
3.5.4. Corrección θ_γ	58
3.5.5. Relación de Dispersión $f(E) \propto E^3$	59
4. Modificaciones Sobre el Espectro	61
4.1. Algo Más de Cinemática	62
4.1.1. Sistemas de Varias Partículas	63
4.1.2. Inelasticidad Modificada: $p + \gamma \rightarrow p + x$	64
4.1.3. Prescripción $m_a^2 \rightarrow s_a = f_a(E) + m_a^2$	66
4.2. Secciones Eficaces Modificadas	67
4.2.1. Foto-Producción de Piones $p + \gamma \rightarrow p + \pi$	67
4.2.2. Producción de Pares $p + \gamma \rightarrow p + e^+ + e^-$	69
4.3. Corrimiento al Rojo	70
4.3.1. Principio de Mínima Acción	71
4.3.2. Espacios de FRW	72
4.3.3. Formalismo Hamiltoniano	73
4.4. Resultados	75
4.4.1. Modificación Vía Resonancias	76

4.4.2. Modificación Vía Foto-Producción	78
4.4.3. Modificación Vía Producción de Pares	80
4.4.4. Modificaciones Combinadas	82
5. Conclusiones	86
A. Ecuaciones de Friedmann y Modelos Cosmológicos	89
B. Cinemática en espacios de FRW	94
C. Fondo de Radiación Cósmica	99
D. Otros Resultados	102

Resumen

Desde hace más de una década se han estado observado rayos cósmicos extragalácticos con energías superiores a 1×10^{20} eV, lo que corresponde a los eventos más energéticos conocidos. La medición de tales energías se opone a la cota teórica conocida como el límite Greizen-Zatsepin-Kuz'min (GZK), que predice la inexistencia de rayos cósmicos con energías mayores que 5×10^{19} eV, imponiendo así un verdadero dilema entre teoría y observación. Algunas de las propuestas más recientes sugieren que un fenómeno tan energético como éste puede estar influenciado por efectos gravitacionales-cuánticos. En dicho contexto, la teoría de la gravedad cuántica de lazos (que es una de las teorías candidatas a conformar la anhelada teoría de la gravedad cuántica) ofrece un modelo efectivo para la descripción de la propagación de partículas en el vacío. Una de las principales características de esta descripción efectiva es la aparición explícita, en las ecuaciones de movimiento, de la longitud de Planck l_p junto con una nueva escala de longitud \mathcal{L} denominada escala del “weave” (y cuyo valor es desconocido). La presente tesis tiene por objeto establecer restricciones observacionales sobre los efectos provenientes de gravedad cuántica de lazos. Esto se realizará mediante el estudio de las deformaciones producidas por \mathcal{L} y l_p , a las relaciones de dispersión de las partículas libres en el vacío. Para tales efectos nuestra discusión se centrará en el análisis del fenómeno de los rayos cósmicos altamente energéticos. Se encontrarán, como resultado, fuertes cotas sobre los parámetros de la teoría y, en particular, se sugerirá un valor $\mathcal{L} \approx 8 \times 10^{-18}$ eV $^{-1}$ para resolver el dilema relacionado con el límite GZK.

Notación y Convenciones

Las unidades estarán fijadas de acuerdo a la regla $c = 1$ y $\hbar = 1$, donde c es la velocidad de la luz, y \hbar es la constante de Planck (unidades naturales).

Los índices latinos $i, j, k \dots$ corresponderán en general a las coordenadas espaciales, que serán tomadas como 1,2,3.

Los índices griegos μ, ν, \dots corresponderán en general a las 4 coordenadas espacio-temporales, que serán tomadas como 0,1,2,3. La coordenada $x^0 \equiv t$ será la coordenada temporal del sistema.

La aparición de un índice superior e inferior repetidos se entenderá como una suma sobre éstos (contracción de índices). Por ejemplo; índices espaciales: $v^i v_i = \sum_i v^i v_i$; índices espacio-temporales: $u^\mu u_\mu = \sum_\mu u^\mu u_\mu$.

La métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ tendrá la signatura $(-, +, +, +)$. El intervalo espacio-temporal vendrá dado por $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Definimos el tiempo propio del intervalo τ a través de $d\tau^2 = -ds^2$.

Un vector v en el espacio 3-dimensional vendrá dado indistintamente por \mathbf{v} o \vec{v} , y sus componentes serán v^i con $i = 1, 2, 3$. El módulo de \vec{v} será simplemente v , y vendrá dado por $v = \sqrt{g_{ij} v^i v^j}$ donde g_{ij} es la métrica 3-espacial. Un vector u en el espacio-tiempo 4-dimensional será manipulado sólo a través de sus componentes u^μ , donde $\mu = 0, 1, 2, 3$, y por lo tanto nos referiremos a éste simplemente por u^μ .

El factor de Lorentz γ conectando un sistema en que una partícula está en reposo con un

sistema en donde tiene energía E y momento p , vendrá dado por $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, donde β es la velocidad de Lorentz definida como $\beta = p/E$ (a diferencia de la velocidad propia, definida por $v = \partial E/\partial p$).

Las abreviaciones usadas a lo largo de esta tesis son:

AGASA: Akeno Giant Air Shower Array.

FRC: Fondo de Radiación Cósmica.

FRW: Friedman-Robertson-Walker.

GCL: Gravedad Cuántica de Lazos.

GRB: Gamma Ray Burst.

GZK: Greisen-Zatsepin-Kuz'min.

ILR: Invarianza de Lorentz Rota.

RCA: Rayos Cósmicos Anómalos.

RCAE: Rayos Cósmicos Altamente Energéticos.

RCG: Rayos Cósmicos Galácticos.

RCS: Rayos Cósmicos Solares.

Introducción

Los rayos cósmicos son partículas muy energéticas, generalmente cargadas, provenientes del espacio exterior y que nos llegan desde todas las direcciones. Pueden ir desde partículas livianas como electrones y neutrinos, hasta núcleos de átomos pesados. Sus energías observadas van desde unos pocos MeV hasta unos considerables 3×10^{11} GeV (equivalente a la energía de una piedra bien arrojada). El origen y composición varía según el rango de energía en el cual son observados. Usualmente se clasifican en tres grandes grupos: Rayos Cósmicos Solares (RCS), aquellos provenientes de las erupciones solares; Rayos Cósmicos Anómalos (RCA), originados en el medio interestelar, más allá de la helio-pausa; y Rayos Cósmicos Galácticos (RCG), originados lejos del Sistema Solar, incluso en regiones extragalácticas. Son observados a través de las interacciones que tienen con nuestra atmósfera por detectores localizados tanto en tierra como en globos aerostáticos, así como directamente a través de satélites artificiales diseñados especialmente para la tarea.

Los rayos cósmicos fueron observados por primera vez en 1912 por Victor Hess¹, cuando encontró que un electroscopio se descargaba con mayor rapidez a medida que éste ascendía en un globo. Hess atribuyó dicho efecto a la radiación que penetraba la atmósfera, generada por alguna fuente necesariamente localizada en el espacio exterior. En primera instancia se consideró que la radiación debía ser de naturaleza electromagnética (de ahí el término “rayos cósmicos”). Sin embargo, más tarde se entendió que estos rayos debían estar compuestos por partículas cargadas, ya que eran fuertemente afectados por los campos magnéticos de la Tierra.

Desde su descubrimiento, los rayos cósmicos han sido fundamentales en la investigación y desarrollo de la Física, dado que han permitido estudiar y entender la naturaleza de numerosos tipos de partículas así como las propiedades y características de los campos a los que representan. El descubrimiento de la primera anti-partícula observada e^+ (positrón)

¹Este descubrimiento le valió el premio Nobel de Física en 1936.

así como el del muón, durante la primera mitad del siglo pasado, y la detallada medición de las masas de los neutrinos solares que aún se realiza durante nuestros días, son algunos de los ejemplos del desarrollo que han permitido los rayos cósmicos.

Un entendimiento detallado y acabado del origen y naturaleza de los rayos cósmicos aún está lejos de ser logrado; la forma en que se nos presenta el espectro de rayos cósmicos² es, en gran parte, todavía un misterio. En este sentido resulta particularmente interesante la detección de los rayos cósmicos altamente energéticos (RCAE) [1, 2] —aquellos con energías mayores a los 10^{20} eV— que según los modelos teóricos no deberían ser observados. Una primera dificultad para explicar la existencia de dichos RCAE, consiste en la carencia de modelos razonables que logren dar cuenta de la copiosa producción de partículas con energías tan altas por parte de algún tipo de fuente conocida (como lo podrían ser supernovas, agujeros negros, núcleos galácticos activos, quasars, etc.).

Una segunda dificultad proviene de la presencia del Fondo de Radiación Cósmica³ (FRC). Dicho fondo necesariamente produce un roce sobre la propagación de los RCAE haciéndoles perder energía y, por lo tanto, afectando la posibilidad de que alcancen grandes distancias. Una primera estimación de la distancia característica que los RCAE pueden alcanzar (antes de perder una porción considerable de su energía) fue hecha en 1966, en forma simultánea por K. Grasen [3] y G.T. Zatsepin & V.A. Kuz'min [4], mostrando que los rayos cósmicos con energías superiores a los 4×10^{19} eV están fuertemente suprimidos, y que las distancias características de tales rayos son inferiores a los ~ 50 Mpc. Tal límite para las energías de los RCAE es conocido como el límite GZK. Si consideramos que 50 Mpc está en el rango de las distancias típicas entre galaxias vecinas (Andrómeda, nuestra vecina más cercana se encuentra a ~ 1 Mpc), entonces deberíamos concluir que los RCAE provienen de aquellas galaxias ubicadas dentro de un radio marcado por el límite GZK. Sin embargo, dentro de dicho radio no se sabe de la existencia de objetos activos capaces de actuar como fuentes. A esto sumemos el hecho que la detección de los RCAE señala que éstos nos llegan desde el espacio exterior con una distribución isotrópica, sin privilegiar ninguna fuente cercana (< 50 Mpc). De este modo, si pretendemos asociar la creación de estos RCAE con la existencia de fuentes activas conocidas, debemos concluir que el origen se halla más allá del grupo de galaxias locales en el cual nos encontramos. Este último

²Espectro de Rayos Cósmicos: distribución con respecto de la energía, del flujo con el cual llegan los rayos cósmicos desde el espacio exterior.

³Gas de fotones que baña por completo al Universo con una distribución térmica de temperatura $T = 2,7$ K (ver Apéndice C).

hecho es conocido como la violación del límite GZK [5, 6] .

La situación anterior plantea un serio desafío a la física convencional. Numerosos modelos han intentado evadir el límite GZK para dar cuenta de las observaciones mencionadas. Desde un punto de vista teórico algunas de las propuestas más interesantes son:

- *Monopolos magnéticos*: La posibilidad de que las fuentes primarias de los RCAE sean monopolos magnéticos [7]. Una motivación para esta hipótesis reside en lo fácil que sería, para los campos magnéticos cósmicos, impartir energía cinética de la magnitud deseada a los monopolos.
- *Z-burst*: Otra posibilidad interesante reside en la producción copiosa de partículas producidas en nuestra vecindad, debido a la colisión entre neutrinos altamente energéticos (producidos en Gamma Ray Burst u otro evento astrofísico energético) y los neutrinos del predicho —pero aún no observado— fondo cósmico de neutrinos (distribución térmica de un gas de neutrinos de temperatura $T = 1,3$ K, similar en todos sus aspectos al fondo de radiación cósmica) [8, 9, 10].
- *Super-partículas*: Una tercera posibilidad se encuentra en el decaimiento de las hipotéticas super-partículas (que son partículas provenientes de las teorías supersimétricas) en partículas secundarias identificadas como los RCAE, en la proximidad de nuestro planeta [11].

Otra propuesta interesante, y que en esta tesis nos concierne profundamente, es la posibilidad de que la invarianza de Lorentz se encuentre rota a nivel de teoría de campos [12, 13, 14], y que sus efectos comiencen a ser notorios en el rango de energías involucrado por los RCAE.

Por Invarianza de Lorentz Rota (ILR) entendemos el hecho de que la relación de dispersión de una partícula arbitraria a , con masa m_a , no se presenta con la forma usual

$$E^2 = p^2 + m_a^2, \quad (1)$$

donde E y p son la energía y momento de la partícula. Sino, por el contrario, se presenta mediante la expresión modificada

$$E^2 = p^2 + m_a^2 + f_a(E, p), \quad (2)$$

donde $f_a(E, p)$ es una función de la energía y del momento, y cuya forma precisa dependerá de la teoría correcta que describa a la partícula en cuestión. Evidentemente, para que

(2) esté de acuerdo con la física conocida, $|f_a(E, p)|$ debe ser despreciable en comparación a m_a^2 , cuando E adquiere valores dentro del rango de energía de aquellos procesos y reacciones de a bien constatados experimentalmente. Dicho de otra manera, de ser válida la hipótesis de la ILR formulada mediante (2), entonces el término $|f_a(E, p)|$ sólo será relevante cuando la energía E de la partícula a sea mayor que cierta escala M_a definida por la teoría subyacente. El hecho de que los RCAE alcancen energías tan altas, ha dado pie a la idea de que es posible que los efectos de una teoría con ILR afecte la propagación de éstos al interferir en su interacción con el FRC. Para entender esto, tomemos como ejemplo la siguiente posibilidad de una ruptura de la invarianza de Lorentz para una partícula arbitraria a involucrada en una reacción del tipo $a + b \rightarrow a + d$:

$$E^2 = c_a^2 p^2 + m_a^2, \quad (3)$$

donde $c_a = 1 + \alpha_a$ es una desviación de la velocidad de la luz ($c = 1$) producida por el parámetro adimensional $\alpha_a \ll 1$ introducido por la teoría con ILR. Es posible mostrar⁴ que con pequeñas desviaciones del tipo $\alpha_a \neq 0$, la energía umbral E_{\min} a partir de la cual es posible producir la reacción descrita, puede sufrir modificaciones relevantes. El efecto anterior puede incluso suprimir por completo a la reacción $a + b \rightarrow a + d$ para cierto rango de energía donde previamente sí ocurría. Debido a este fenómeno, se ha propuesto que la presencia de términos que rompen la invarianza de Lorentz en la relación de dispersión para los RCAE podría estar suprimiendo su interacción con el FRC, desapareciendo de este modo el mencionado límite GZK [15, 16].

La invarianza de Lorentz proviene del exigir la inexistencia de sistemas de referencia absolutos, de modo que la física sea la misma en todos los sistemas (con nuestro ejemplo anterior, una energía de reposo E_r igual en todos los sistemas de referencia: $E_r = m_a$). Por lo tanto, una característica inherente de las teorías con ILR será la aparición inevitable de un sistema de referencia privilegiado. Afortunadamente, la naturaleza sí nos ofrece un sistema de referencia absoluto: aquél en donde el FRC se encuentra en “reposo”. No obstante, se debe hacer una distinción entre estos dos tipos de sistemas: el sistema de referencia del FRC se debe a la estructura global del espacio-tiempo del Universo, mientras que localmente todos los sistemas de referencia son equivalentes. Por otro lado, al haber una ruptura de la invarianza de Lorentz se está privilegiando no tan solo un sistema de

⁴Se verá en detalle en el Capítulo 3, “Modificaciones Cinemáticas”.

referencia global, sino que también uno local⁵. Esta última situación subraya el carácter esencial y de primeros principios escondida en la ruptura de la invarianza discutida.

Son pocas las teorías que ofrecen la posibilidad de violar la invarianza de Lorentz a partir de primeros principios. Esto debido a la ya discutida poco natural exigencia de que la física privilegie, a un nivel fundamental, la existencia de un sistema de referencia absoluto. Sin embargo, existe una elegante alternativa como solución a este problema: estar ante la presencia de una ruptura espontánea de la simetría. Frente a esta alternativa, las ecuaciones de movimiento fundamentales de la naturaleza son invariantes bajo las transformaciones de Lorentz, y la violación de la invarianza ocurre cuando el valor de expectación de los campos de la teoría —en el vacío— son distintos de cero. Es decir, si bien las ecuaciones de movimiento son invariantes bajo transformaciones de Lorentz, las soluciones no presentan tal simetría. Aun así, son excepcionales los casos en que es posible introducir tal ruptura espontánea de la simetría; ejemplos conocidos son las teorías de super-cuerdas [17] y algunos modelos específicos de D-branas con dimensiones extras [18, 19]. Como sea, resulta claro que de haber alguna ruptura espontánea de la simetría de Lorentz, ésta ha de venir de una teoría de carácter fundamental; por lo tanto nos vemos tentados, y a la vez obligados, a depositar nuestra mirada sobre los desarrollos de la teoría de la gravedad cuántica (que a nuestro limitado entender, ha de ser la teoría fundamental por excelencia).

La aún inexistente teoría Cuántica de la Gravitación tiene como finalidad la unificación de las dos teorías más exitosas de la física contemporánea; es decir, la unificación de la teoría cuántica con la teoría general de la relatividad. La lucha intelectual por el logro de tal unificación ha recorrido un duro camino, teniendo periodos de gran excitación y satisfacción así como de profundas decepciones. En la actualidad son básicamente dos las grandes candidatas a conformar la teoría de gravedad cuántica: Teoría de Cuerdas y Gravedad Cuántica de Lazos (o Loop Quantum Gravity). Estas dos formas de aproximarse al problema de la Gravedad Cuántica son, en muchos sentidos, diametralmente opuestas. La teoría de cuerdas es quizás la heredera más cercana de los desarrollos de la teoría de campos, y constituye uno de los programas teóricos más ambiciosos de la actualidad. Su finalidad no es tan sólo la de resolver los problemas básicos presentes en la cuantización de la gravedad (que dicen relación con las restricciones canónicas de la teoría), sino que

⁵Por lo mismo, de existir una ILR, resulta natural tomar a ambos sistemas como el mismo. En el Capítulo 2, “Gravedad Cuántica de Lazo”, veremos que dicha elección es la única posible para la validez de los resultados.

busca por añadidura la predicción completa de todos los estados físicos posibles en la naturaleza. Su formalismo involucra los convencionales enfoques perturbativos en donde la métrica del espacio-tiempo ha de ser tomado como un objeto de “background” (con una existencia postulada a priori) sobre la cual se desarrollan las perturbaciones físicas como cuerdas u otros objetos extendidos (la existencia de este background es necesaria incluso en la versión no perturbativa de la teoría, como lo es la teoría M). Lo anterior plantea una verdadera dificultad para la teoría, ya que no se cuenta con una relación completa entre la dinámica de la métrica y los estados físicos que la habitan. Aun así, la teoría de cuerdas se presenta exitosa al momento de definir estos estados físicos como partículas, branas, etc., y ha permitido desarrollar cálculos bien definidos tales como algunas interacciones a altas energías, así como la conocida relación termodinámica de un agujero negro.

Por su parte, la Gravedad Cuántica de Lazos (GCL) [20, 21] hereda una visión más cercana a la mantenida por la tradición relativista. Su primer objetivo reside en la solución de los problemas básicos de la cuantización de la gravedad, presentes en las restricciones canónicas de ésta. Desde tal enfoque, la intención de tomar a la métrica como un objeto externo a la teoría y sobre la cual viven las excitaciones físicas, resulta físicamente chata. Por el contrario, la métrica juega un papel íntegro y fundamental en el desarrollo dinámico del sistema físico en estudio. Por ello es que GCL intenta cuantizar a la teoría a partir del formalismo canónico, en donde la métrica se incorpora desde un principio como un objeto fundamental y no uno cuyo status es el de escenario externo. Esta forma de enfrentar el problema de la cuantización de la gravedad trae consigo una concepción del espacio-tiempo a escalas de Planck (ver más adelante) completamente distinta a la ofrecida por la teoría de cuerdas.

Sin embargo, es posible encontrar una característica común (y al parecer universal) en ambas propuestas: A diferencia de otros tipos de teorías, el aumento de la energía del sistema físico trae consigo el consecuente aumento de los efectos cuántico-gravitacionales. De este modo es posible determinar heurísticamente una escala en la cual los efectos cuánticos (caracterizados por la constante de Planck \hbar) y gravitacionales (caracterizados por la constante de Newton G) se hacen igualmente importantes. Dicha cantidad es denominada escala de Planck l_p y está definida como

$$l_p \equiv \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^3}} \quad (4)$$

($l_p = G_N^{1/2}$ con $\hbar = c = 1$). A la larga, l_p constituye una cantidad fundamental en cualquier

teoría que pretenda cuantizar la gravitación. Por lo mismo, y ante la carencia de una teoría de la Gravedad en su versión cuántica, resulta natural estudiar los efectos de las propuestas actuales (cuerdas y GCL) a través de teorías efectivas en donde se presenten, de forma manifiesta, los efectos de la escala de Planck a través de correcciones a las teorías convencionales ya bien conocidas. En esta dirección hay numerosos y recientes trabajos que han intentado extraer tales correcciones a través de diversas técnicas [22, 23, 24, 25, 26]. La validez de dichas técnicas será sólo revelada con el tiempo; no obstante, nos ofrecen la posibilidad de contrastar las influencias de la gravitación sobre la dinámica de las partículas a altas energías.

De especial interés para el desarrollo de esta tesis, es el tratamiento presentado en [24] y [25] realizado por J. Alfaro, H.A. Morales-Técotl y L.F. Urrutia. En estos trabajos ellos muestran cómo obtener valores de expectación para los campos de materia en el vacío definido por la teoría GCL. Como resultado ellos obtienen ecuaciones de movimiento efectivas para los campos, y que presentan violaciones a la invarianza de Lorentz. Tales violaciones producen, a su vez, la aparición de nuevos términos en la relación de dispersión para las partículas descritas por la teoría entregando, por lo tanto, la posibilidad de estudiar sus efectos en procesos de altas energías. Otra consecuencia interesante de las técnicas empleadas, es el surgimiento de una escala efectiva \mathcal{L} denominada “escala del weave”, cuya aparición delimita los efectos de la estructura de la teoría GCL sobre el espacio.

Por todo lo dicho, el análisis de los posibles efectos de una potencial teoría de la gravedad cuántica ya está al alcance y debe ser emprendido. La tarea de contrastar observaciones experimentales con las predicciones preliminares de una teoría de la gravedad cuántica es de primera importancia. Por un lado, hasta ahora toda teoría tentativa de la gravedad cuántica ha padecido fuertemente de la ausencia de una correspondencia entre teoría y observación. Por otro lado, es imprescindible delinear nuevas interrogantes, tanto teóricas como empíricas, que una teoría como la gravedad cuántica deberá abordar en el futuro. Este tipo de labor está todavía en su génesis y sí deseamos llegar a un completo entendimiento de los fenómenos físicos descritos por gravedad cuántica, debemos hacer contacto con las observaciones.

La presente tesis tiene como objeto establecer restricciones observacionales sobre los efectos provenientes de gravedad cuántica (particularmente GCL). Esto se realizará mediante el estudio de las deformaciones a las relaciones de dispersión causadas por las

versiones efectivas de GCL, desarrolladas en [24] y [25], y que asumiremos válidas para un conjunto grande de partículas. Para tales efectos nuestra discusión se centrará en el análisis del fenómeno de los RCAE que, a saber, corresponde al fenómeno directamente observable de mayor energía, lo que constituye el marco ideal para lograr nuestro objetivo. También nos serviremos de algunas observaciones experimentales hechas en torno a la llegada de rayos γ con energías sobre el TeV, provenientes de núcleos galácticos activos (Blazars), en especial aquellos provenientes de Markarian Mkn 501 [27]. Al igual que en el caso de los RCAE, estos son los fotones de mayor energía registrados.

La organización de este trabajo es la siguiente: En el Capítulo 1, “Rayos Cósmicos”, intentaremos dar una descripción auto contenida del fenómeno de los RCAE y las principales consecuencias que nos conciernen. En el Capítulo 2, “Gravedad Cuántica de Lazos”, se hará una introducción breve al formalismo GCL, para luego mostrar las principales correcciones de esta teoría a las relaciones de dispersión para las partículas. El Capítulo 3, “Modificaciones Cinemáticas”, constituye la parte central de esta tesis y en él se establecerán fuertes restricciones a las correcciones de GCL previamente desarrolladas. En el Capítulo 4, “Modificaciones Sobre el Espectro”, intentaremos proveer de una descripción plausible para la corrección sufrida por el espectro teórico de los RCAE, debido a las correcciones de GCL. Finalmente, en el Capítulo 5, “Conclusiones”, delinearemos las principales conclusiones de este trabajo.

Capítulo 1

Rayos Cósmicos

Existen tres grupos principales de rayos cósmicos: RCS, RCA y RCG. Las primeras dos familias corresponden a rayos cósmicos generados en las regiones vecinas de nuestro sistema solar, y su primordial fuente de energía son las diversas reacciones solares que tienen lugar en dicha vecindad. Por esta razón, tanto los RCS como los RCA son fácilmente identificables y su estudio difiere de los RCG que son ampliamente más numerosos y energéticos. Nuestro interés estará centrado en esta última familia, por lo que nos referiremos a éstos simple y genéricamente como “rayos cósmicos” [28].

A lo largo de este capítulo desarrollaremos y analizaremos el espectro teórico de rayos cósmicos predicho para su sector más energético ($E > 10^{18}$ eV), obtenido a través de los métodos convencionales. Esto nos permitirá entender la forma precisa en que la observación de los RCG se presenta a sí misma como un problema no resuelto.

1.1. Descripción del Fenómeno

El espectro cubierto por las observaciones va aproximadamente desde 1 GeV hasta 11 GeV (Figura 1.1). Para describir el espectro de forma cuantitativa es útil plantear un espectro de producción mediante una ley de potencia; es decir, la suposición de que las fuentes de rayos cósmicos tienen un flujo de emisión del tipo $F(E) \propto E^{-\gamma_g}$, donde γ_g es el índice de generación de la ley de potencia. De esta forma es posible dividir el espectro de rayos cósmicos en tres sectores principales: aquellos rayos con energías bajo la “rodilla” ($\sim 4 \times 10^{15}$ eV), sector que se presenta con un índice $\gamma_g = 2,7$; aquellos con energías entre la rodilla y el “tobillo” ($\sim 4 \times 10^{18}$ eV), con un índice de potencia $\gamma_g = 3,2$; y la región ubicada sobre el tobillo que se presenta con un índice $\gamma_g = 2,7$.

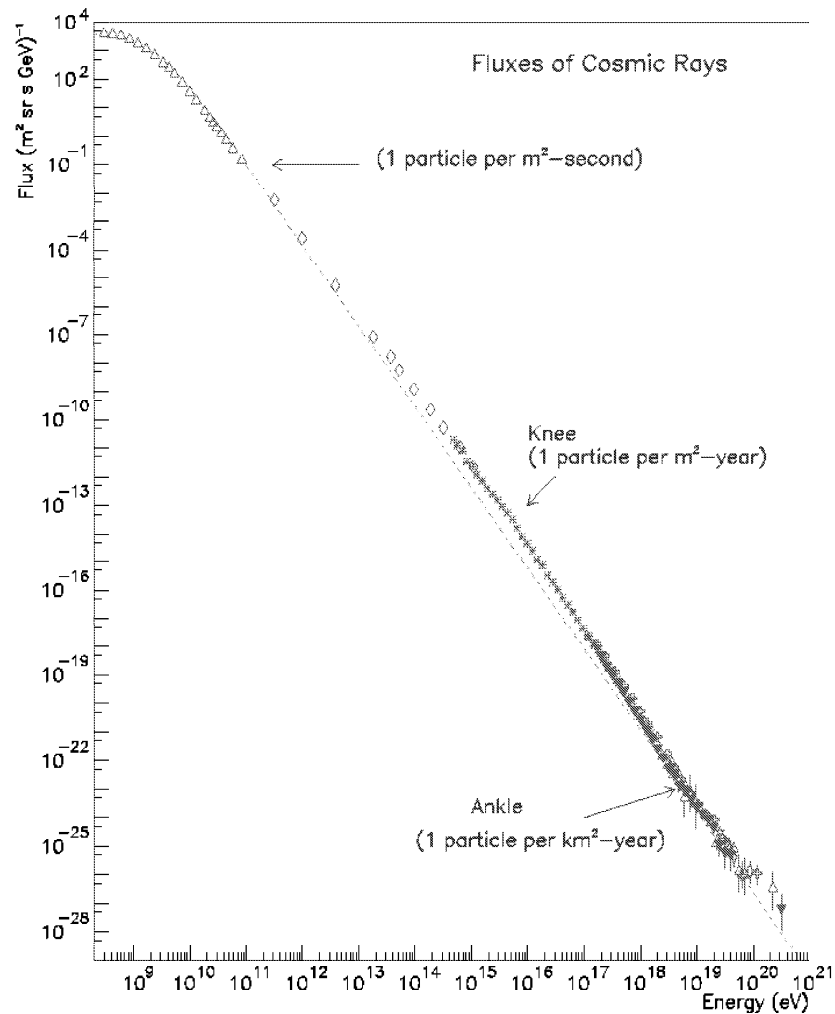


Figura 1.1: Espectro energético de rayos cósmicos.

Si bien es cierto existe un abundante número de mediciones y estudios del sector con energías bajo los 4×10^{18} eV (tobillo), la aparición de la rodilla en el espectro de rayos cósmicos está todavía sin una completa y satisfactoria explicación. Para energías mayores que 4×10^{18} eV —donde domina un índice de generación $\gamma_g = 2,7$ — los rayos cósmicos ya no pueden ser confinados por los campos magnéticos de nuestra galaxia. Esto sugiere que aquellos rayos que se presentan sobre el tobillo son de naturaleza extragalácticos. Adicionalmente, los datos obtenidos por el grupo experimental Fly's Eye sugieren que la composición química de los rayos bajo el tobillo está dominado por la presencia de núcleos de átomos pesados (mayormente Fe), mientras que para eventos sobre el tobillo la composición consiste exclusivamente en protones y neutrones [2]. Esto último es consistente

con la hipótesis de fuentes extragalácticos, ya que los núcleos con energías mayores que 4×10^{18} eV no serían capaces de sobrevivir un viaje de distancias extragalácticas sin ser desintegrados por su interacción con el FRC. La Figura 1.2 muestra el espectro medido

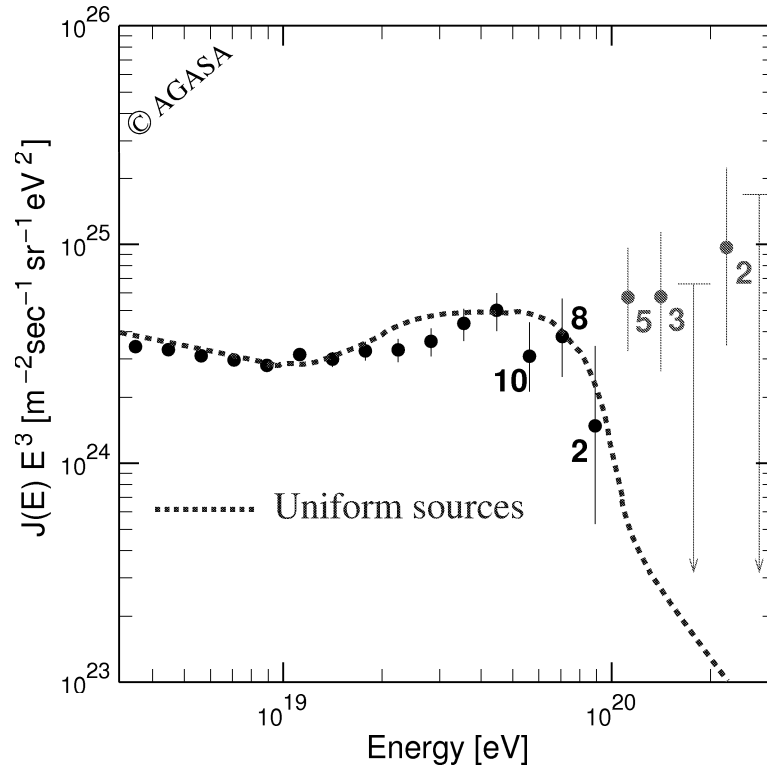


Figura 1.2: Espectro de energía observado con AGASA. El eje vertical del espectro está multiplicado por E^3 . Las barras de error representan los límites de Poisson superior e inferior con un 68 % de C.L., y las flechas corresponden a límites superiores con un 90 % de C.L. Los números junto a los puntos muestran la cantidad de eventos en cada grupo de medición de energía. La curva azul representa el espectro teórico para protones, esperado para fuentes extragalácticas distribuidas uniformemente en el Universo.

por el grupo experimental AGASA (Akeno Giant Air Shower Array) [1] para los rayos cósmicos sobre el tobillo. El eje vertical del espectro está multiplicado por E^3 . Las barras de error representan los límites de Poisson superior e inferior con un 68 % de C.L., y las flechas corresponden a límites superiores con un 90 % de C.L. Los números junto a los puntos muestran la cantidad de eventos en cada grupo de medición de energía. La curva azul representa el espectro teórico para protones, esperado para fuentes extragalácticas distribuidas uniformemente en el Universo (curva que calcularemos más adelante). El error en la medición de la energía de cada evento está estimado en un 30 % para energías

mayores que 10^{19} eV. El volumen de exposición de los detectores, con los cuales se obtuvo las mediciones mostradas en la figura, fue de $4,6 \times 10^{16}$ m² sr s.

Como puede ser apreciado en la figura anterior, la predicción teórica del espectro de rayos cósmicos consistente en protones, tiene una correspondencia bastante fiel con los datos experimentales hasta una energía $\sim 5 \times 10^{19}$ eV. Anticipadamente, podemos ver de qué manera falla la predicción teórica del espectro sobre los 8×10^{19} eV. A todo lo anterior, debemos sumar el hecho de que las mediciones tanto del grupo experimental AGASA [1] como las del grupo Fly's Eye [2], arrojan claras distribuciones isotrópicas para estos rayos supra-tobillo (Figura 1.3). Esto último refuerza enormemente la convicción de que estos rayos cósmicos son de naturaleza extragaláctica.

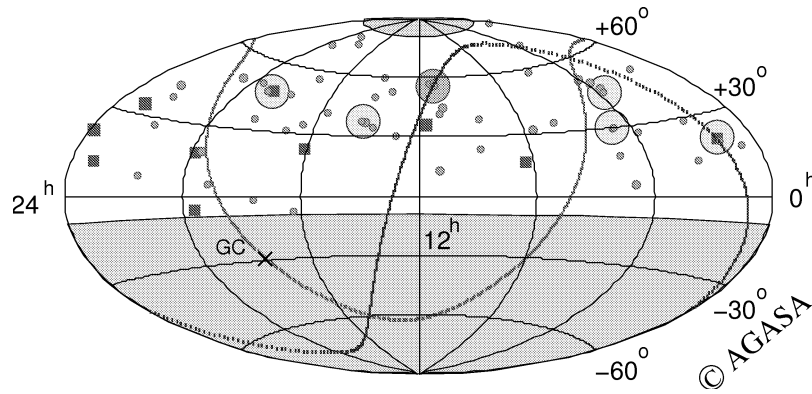


Figura 1.3: Direcciones de arribo de los rayos cósmicos con energías mayores que $10^{19,0}$ eV sobre las coordenadas ecuatoriales. Los círculos abiertos y los cuadrados abiertos representan a los rayos cósmicos con energías de $(4 - 10) \times 10^{19}$ eV, y $\geq 10^{20}$ eV, respectivamente. Los planos galácticos y supergalácticos son mostrados por las curvas roja y azul respectivamente. Los círculos grandes indican eventos acumulados entre 2.5° .

Para los RCAE (energías $> 10^{18}$ eV) mostrados en la Figura 1.2, los procesos de mayor relevancia en la interacción de un protón y el FRC son la creación de pares

$$p + \gamma \rightarrow p + e^+ + e^-, \quad (1.1)$$

que domina el espectro hasta una energía $\sim 4 \times 10^{19}$ eV, y la foto-producción de piones

$$p + \gamma \rightarrow p + \pi, \quad (1.2)$$

que se vuelve importante a energías superiores a $\sim 4 \times 10^{19}$ eV. Esta última reacción estará mediada por otros procesos intermedios tales como resonancias Δ y N , y producción

directa de bosones π , ρ y ω . La gran sección eficaz de la foto-producción producida por la resonancia $\Delta(1232)$, la convierte en la mayor causante del surgimiento del límite GZK.

1.2. Cinemática

Para estudiar la interacción entre los protones y el FRC distinguiremos tres sistemas de referencia; el sistema de laboratorio \mathcal{K} , el sistema de centro de masas \mathcal{K}^* , y el sistema \mathcal{K}' en donde el protón está en reposo¹. En términos de estos sistemas recién definidos, la energía del fotón en el sistema de laboratorio \mathcal{K} será ω , mientras que la energía del mismo fotón en \mathcal{K}' será ϵ . La relación entre estas dos cantidades es

$$\epsilon = \gamma\omega(1 - \beta \cos \theta), \quad (1.3)$$

donde $\gamma = E/m_p$ es el factor de Lorentz conectando a \mathcal{K} y \mathcal{K}' , E y m_p la energía y masa del protón incidente, $\beta = \sqrt{1 - \gamma^{-2}}$, y θ es el ángulo entre los momentos del fotón y del protón en el sistema de laboratorio \mathcal{K} . Para determinar la energía total $E_{\text{tot}}^* = E^* + \epsilon^*$ en el sistema de centro de masas, basta usar el invariante $s = E_{\text{tot}}^2 - p_{\text{tot}}^2$ (donde $E_{\text{tot}} = E + \omega$ y p_{tot} son la energía total y el momento total en el sistema de laboratorio). Esto es

$$E_{\text{tot}}^{*2} = s = m_p^2 + 2m_p\epsilon. \quad (1.4)$$

Luego, el factor de Lorentz γ_c que conecta al sistema de laboratorio \mathcal{K} con el sistema de c.m. \mathcal{K}^* será:

$$\gamma_c = \frac{E + \omega}{\sqrt{s}} \simeq \frac{E}{(m_p^2 + 2m_p\epsilon)^{1/2}}. \quad (1.5)$$

Consideremos el caso particularmente relevante en que la reacción del protón con un fotón del FRC es del tipo

$$p + \gamma \rightarrow a + b, \quad (1.6)$$

donde a y b son dos partículas resultantes de la colisión. La energía final de estas partículas se determina fácilmente a través de la conservación de energía y momento. En el sistema \mathcal{K}^* , ésta será

$$E_{a,b}^* = \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_{a,b}^2 - m_{b,a}^2). \quad (1.7)$$

¹Con mayor precisión, el sistema en donde el momento del protón es nulo. Esta distinción se hará relevante más adelante.

Por lo tanto, la energía final promedio de a (o de b) en el sistema de laboratorio, puede ser encontrada como:

$$\begin{aligned} \langle E_{a,b} \rangle &= \gamma_c E_{a,b}^* \\ &= \frac{1}{2} E \left(1 + \frac{m_{a,b}^2 - m_{b,a}^2}{s} \right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Definimos la inelasticidad $K = \Delta E/E$ de la reacción como la razón entre la diferencia $\Delta E = E_f - E_i$ entre la energía final E_f e inicial E del protón (luego de perder energía a través de la emisión de una partícula) y la energía inicial E del mismo. Para el caso particular de la emisión de una partícula arbitraria a (es decir $p + \gamma \rightarrow p + a$), la expresión (1.8) nos permite encontrar:

$$K_a(s) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m_a^2 - m_p^2}{s} \right), \quad (1.9)$$

donde K_a es la inelasticidad del proceso cuando existe la emisión de una partícula a . De mayor complejidad será el caso en que la colisión tenga como resultado la emisión de varias partículas simultáneas, tal como la creación de pares $p + \gamma \rightarrow p + e^+ + e^-$. Tal caso será examinado más adelante.

Por último, en el caso general de la producción de N partículas a , $p + \gamma \rightarrow p + Na$, es posible calcular la energía umbral ϵ_{th} requerida por el fotón del FRC en el sistema K' para producir las N partículas. Basta reemplazar en (1.4), $E_{tot}^{*2} = (m_p + Nm_a)^2$. De este modo, la energía umbral para la producción de N partículas a 's, será

$$\epsilon_{th a} = Nm_a \left(1 + N \frac{m_a}{2m_p} \right). \quad (1.10)$$

Algunos valores relevantes son:

Foto-Producción de π ($p + \gamma \rightarrow p + \pi$)	$\epsilon_{th \pi} = 0,145$ GeV
Foto-Producción de ρ ($p + \gamma \rightarrow p + \rho$)	$\epsilon_{th \rho} = 1,084$ GeV
Creación de pares ($p + \gamma \rightarrow p + e^+ + e^-$)	$\epsilon_{th e} = 1,02$ MeV

1.3. Vida Media $\tau(E)$

Para calcular el espectro necesitamos conocer la vida media $\tau(E)$ de un protón con energía E propagándose en el espacio, debido a la atenuación de su energía por las interacciones

con el FRC. Definimos a la vida media $\tau(E)$ a través de la relación:

$$\tau(E)^{-1} = \left(-\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} \right)_{\text{col}}, \quad (1.11)$$

donde la etiqueta “col” se refiere al hecho de que la pérdida de energía es debido a las colisiones con los fotones del FRC. Para determinar explícitamente la forma de $\tau(E)$, es mejor expresar la definición (1.11) en términos de las cantidades microscópicas que dicen relación con las colisiones. Esto es:

$$\tau(E)^{-1} \Delta t = \frac{1}{E} \Delta E, \quad (1.12)$$

donde Δt es el tiempo característico entre colisiones, y ΔE la pérdida de energía en cada colisión. Naturalmente, el recíproco de Δt es el número de colisiones por unidad de tiempo. Conociendo la densidad del gas de fotones ρ , la velocidad relativa v_{rel} del fotón con respecto al protón con el cual colisiona, y la sección eficaz de la interacción σ , es posible reescribir Δt de la forma:

$$\begin{aligned} (\Delta t)^{-1} &= \text{No. de colisiones/sec} \\ &= \sigma \times \text{fotones incidentes/sec/área} \\ &= \sigma \rho v_{\text{rel}}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Reemplazando la última relación en la ecuación (1.12), obtenemos $\tau(E)$:

$$\tau(E)^{-1} = \frac{\Delta E}{E} \sigma \rho v_{\text{rel}}, \quad (1.14)$$

Notemos, sin embargo, que tanto v_{rel} como σ y ΔE son funciones de la energía y de la dirección de propagación del fotón perteneciente al gas. Esto nos obliga a modificar la relación anterior a

$$d\tau(E)^{-1} = \frac{\Delta E}{E} \sigma v_{\text{rel}} \eta(\omega) d\omega d\Omega/4\pi, \quad (1.15)$$

donde $\eta(\omega)d\omega$ es la densidad de fotones del FRC con energías en el rango $d\omega$, y $d\Omega/4\pi = \sin\theta d\theta d\phi/4\pi$ es la sección de ángulo sólido normada que nos permitirá promediar con respecto a la dirección relativa entre protón y fotón. Para desarrollar (1.15), notemos que la velocidad relativa entre dos partículas arbitrarias 1 y 2 con 4-momentos p_1^μ y p_2^μ , es²

$$v_{\text{rel}} = \sqrt{(p_1^\mu p_{2\mu})^2 - m_1^2 m_2^2} / E_1 E_2. \quad (1.16)$$

²Nótase que cuando $p_1^\mu = (m_1, 0)$, es decir, cuando expresamos las cantidades con respecto al sistema en reposo de la partícula 1, entonces se cumple $v_{\text{rel}} = p_2/E_2$, como debe ser.

En el caso en que las partículas 1 y 2 correspondan a un protón y un fotón respectivamente, se tendrá $v_{\text{rel}} = 1 - \beta_p \cdot \beta_\gamma = 1 - \beta_p \cos \theta$, donde θ es el ángulo entre el protón y el fotón incidente. Recordando la ecuación (1.3), podemos reescribir v_{rel} mediante la siguiente forma:

$$v_{\text{rel}} d\Omega / 4\pi = \frac{\epsilon d\epsilon d\phi}{4\pi\gamma^2\omega^2}, \quad (1.17)$$

con $\epsilon \in [0, 2\gamma\omega]$ y $\phi \in [0, 2\pi]$. Substituyendo (1.17) en (1.15) e integrando, obtenemos la expresión buscada:

$$\tau(E)^{-1} = \frac{1}{2\gamma^2} \int_{\epsilon_{th}/2\gamma}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2} \eta(\omega) \int_{\epsilon_{th}}^{2\gamma\omega} \sigma(\epsilon) K(\epsilon) \epsilon d\epsilon, \quad (1.18)$$

en donde hemos usado la definición $K = \Delta E/E$ de la inelasticidad de la reacción. Los límites de integración en (1.18) han sido fijados bajo el entendido que K es necesariamente nulo para energías inferiores a ϵ_{th} . Recordando que $\eta(\omega)d\omega$ corresponde a una distribución de Planck (ver Apéndice C)

$$\eta(\omega)d\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 (e^{\omega/kT} - 1)}, \quad (1.19)$$

podemos, intercambiando el orden de integración, reescribir (1.18) en una forma más conveniente:

$$\tau(E)^{-1} = -\frac{kT}{2\pi^2\gamma^2} \int_{\epsilon_{th}}^{\infty} d\epsilon \sigma(\epsilon) K(\epsilon) \epsilon \ln[1 - \exp(-\epsilon/2\gamma kT)]. \quad (1.20)$$

Esta será la principal expresión que usaremos para encontrar el espectro de rayos cósmicos.

1.4. Pérdida de Energía y Espectro

Como es de esperar, la pérdida de energía sufrida por un protón muy energético durante su viaje, desde una fuente muy distante hasta nuestros detectores, no es producida sólo por las colisiones que tiene con el FRC en determinada época. También existirá una disminución de su energía debido al corrimiento al rojo producido por la expansión del Universo. Así mismo, dicha expansión también se manifestará en la atenuación de la densidad de fotones, que puede ser interpretada como un enfriamiento de la temperatura a través de la relación $T \sim (1+z)T_0$ (Ver Apéndice C). Para que nuestros cálculos consideren estos

factores, debemos establecer la tasa de pérdida de energía durante las distintas épocas z del Universo.

Como ya hemos mencionado, las observaciones de la evolución del universo favorecen un radio de densidad $\Omega = 1$, correspondiente a un Universo plano (al menos localmente). Esto impone la siguiente relación entre la coordenada temporal (tiempo propio en el sistema comovil) t y el redshift z :

$$dt = -\frac{dz}{H_0(1+z)^{5/2}}, \quad (1.21)$$

donde H_0 es la constante de Hubble en el presente. Dado que el momento de una partícula libre en un espacio de FRW se comporta de la forma $p \sim R(t)^{-1}$ en conjunto con el asunto $p \gg m$ (donde m es la masa de la partícula), tendremos que la pérdida de energía debido al corrimiento al rojo es

$$\left(-\frac{1}{E} \frac{dE}{dt}\right)_{\text{rs}} = H_0(1+z)^{3/2}. \quad (1.22)$$

Por otro lado, la pérdida de energía debido a la interacción con el FRC tendrá una evolución debido al cambio de temperatura del espectro. Para encontrar la evolución de $\tau(E)$ con respecto al redshift z , basta recordar que la temperatura T del FRC reescala de la forma $T \propto (1+z)$. Luego, tendremos que

$$\left(-\frac{1}{E} \frac{dE}{dt}\right)_{\text{col}} = (1+z)^3 \tau([1+z]E)^{-1}. \quad (1.23)$$

La pérdida total de energía puede ser expresada como la suma de las distintas contribuciones; esto es

$$-\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \left(-\frac{1}{E} \frac{dE}{dt}\right)_{\text{rs}} + \left(-\frac{1}{E} \frac{dE}{dt}\right)_{\text{col}}, \quad (1.24)$$

o en forma más conveniente

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dz} H_0(1+z)^{5/2} = H_0(1+z)^{3/2} + (1+z)^3 \tau([1+z]E)^{-1}. \quad (1.25)$$

La ecuación (1.25) puede ser integrada numéricamente para encontrar la energía $E_g(E, z)$ del protón generado por la fuente en una época z y que será detectado en la Tierra con una energía E . Designemos a tal solución la expresión formal

$$E_g(E, z) = \lambda(E, z)E \quad (1.26)$$

También es posible manipular la ecuación (1.25) para obtener una expresión de la dilatación del intervalo de energía dE_g/dE . Para ello basta integrar y reexpresar (1.25) de la siguiente manera

$$E_g - E = \int_0^z [(1+z)^{-1}E_g + \frac{1}{H_0}(1+z)^{-1/2}E'\tau(E')^{-1}]dz, \quad (1.27)$$

donde $E' \equiv (1+z)E_g$. Derivando a (1.27) con respecto a E obtenemos la siguiente ecuación integral para dE_g/dE :

$$\frac{dE_g}{dE} = 1 + \int_0^z \left[(1+z)^{-1} + \frac{1}{H_0}(1+z)^{1/2} \frac{db(E')}{dE'} \right] \frac{dE_g}{dE} dz, \quad (1.28)$$

en donde $b(E) \equiv E\tau(E)^{-1} = -dE/dt$. La ecuación (1.28) puede ser resuelta por iteración del argumento en el integrando. Para simplificar la notación reescribamos (1.28):

$$\frac{dE_g}{dE} = 1 + \int_0^z f(z) \frac{dE_g}{dE} dz, \quad (1.29)$$

Iterando dE_g/dE en el integrando de (1.29) se obtiene

$$\frac{dE_g}{dE} = 1 + \int_0^z f(z_1)dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} f(z_1)f(z_2)dz_2dz_1 + \dots \quad (1.30)$$

La integración en el n -ésimo término está realizada sobre el n -simplex en el espacio z^n . Esto nos permite reescribir cada término como una integración múltiple completa (cada integral desde 0 a z) normalizada por el factor apropiado. Es decir:

$$\frac{dE_g}{dE} = 1 + \int_0^z f(z_1)dz_1 + \frac{1}{2} \int_0^z \int_0^{z_1} f(z_1)f(z_2)dz_2dz_1 + \dots \quad (1.31)$$

$$+ \frac{1}{n!} \int_0^z \dots \int_0^{z_{n-1}} f(z_1) \dots f(z_n) dz^n + \dots \quad (1.32)$$

Este es claramente el desarrollo de una exponencial sobre la integral de $f(z)$. Al usar este hecho es posible encontrar la solución buscada:

$$\frac{dE_g(z_g)}{dE} = (1+z_g) \exp \left[\int_0^{z_g} \frac{dz}{H_0} (1+z)^{1/2} \left(\frac{db(E')}{dE'} \right)_{E'=(1+z)\lambda(E,z)E} \right]. \quad (1.33)$$

A continuación describiremos cómo las expresiones recién encontradas son de utilidad para el cálculo del espectro de rayos cósmicos. El flujo total $dj(E)$ de partículas emitidas desde un elemento de volumen $dV = R^3(z)r^2drd\Omega$, en la época z y coordenada r , medido en la Tierra durante el presente con energía E , es (ver Apéndice B):

$$dj(E)dE = \frac{F(E_0, z)dE_0n(z)dV}{(1+z)4\pi R_0^2r^2}, \quad (1.34)$$

donde $j(E)$ es el flujo de partículas por unidad de energía, $F(E_0, z)dE_0$ el flujo de partículas con energías emitidas en el rango dE_0 , y $n(z)$ la densidad de fuentes en z . Para decir algo con respecto al espectro de la fuente, establezcamos un modelo simple para la mencionada ley de potencias. Supongamos que la luminosidad total de partículas emitidas por la fuente, con energías menores a cierto valor E_m es $L(E_m)$. Claramente, tendremos:

$$L(E_m) = \int_0^{E_m} L'(E)dE, \quad (1.35)$$

donde $L'(E)dE$ es la luminosidad total de la fuente para energías en el rango dE . Supongamos que $L'(E)$ tiene la ley de potencias $L'(E) = C(E/E_0 + 1)^{1-\gamma_g}$ (válido para $\gamma_g > 2$), con C una constante por determinar, y E_0 una escala de energía arbitraria. Substituyendo $L'(E)$ en (1.35) y fijando la condición $L(\infty) = L_p$, de modo que L_p es la luminosidad total con la que los protones son emitidos, obtenemos $C = L_p(\gamma_g - 2)$. Por otro lado, estamos interesados en el número diferencial de partículas $F(E)$ emitidas por unidad de energía y de tiempo. Este vendrá dado por la relación $L'(E) = EF(E)$. Luego,

$$\begin{aligned} F(E) &= (\gamma_g - 2)L_p(1 + E)^{1-\gamma_g} E^{-1} \\ &\simeq (\gamma_g - 2)L_p E^{-\gamma_g}, \end{aligned} \quad (1.36)$$

en donde hemos fijado la escala en $E_0 = 1$ GeV. Queda aún modelar la evolución de las fuentes con respecto al redshift z . Para ello supondremos que la luminosidad total L_p varía su magnitud según la siguiente ley:

$$\begin{aligned} L_p(z)n(z) &= (1 + z)^{(3+m)}L_p(0)n(0), \\ &= (1 + z)^{(3+m)}\mathcal{L}_0, \end{aligned} \quad (1.37)$$

de modo que el caso sin evolución vendrá dictado por la condición $m = 0$. Considerando que $R_0 = (1 + z)R(z)$ y $R(z)dr = dt$ para espacios planos (y partículas muy energéticas $v \simeq 1$), utilizando (1.21) para expresar todo en términos de z , y finalmente integrando (1.34) desde $z = 0$ hasta algún $z = z_{max}$ para el cual las fuentes ya no son relevantes en el fenómeno, es posible obtener:

$$j(E) = (\gamma_g - 2) \frac{1}{4\pi} \frac{\mathcal{L}_0}{H_0} E^{-\gamma_g} \int_0^{z_{max}} dz_g (1 + z_g)^{m-5/2} \lambda^{-\gamma_g}(E, z_g) \frac{dE_g(z_g)}{dE}. \quad (1.38)$$

La expresión anterior constituye el buscado espectro de RCAE. Los parámetros por fijar (observacionalmente) son la luminosidad volumétrica \mathcal{L}_0 y los índices γ_g y m . Pronto

compararemos el resultado arrojado por (1.38) con las más recientes observaciones experimentales. A continuación revisaremos con mayor detalle las reacciones involucradas en la atenuación de la energía de los protones altamente energéticos. Comencemos por la foto-producción $p + \gamma \rightarrow p + \pi$.

1.5. Foto-Producción $p + \gamma \rightarrow p + \pi$

La principal causante de la aparición del límite GZK es la foto-producción de piones $p + \gamma \rightarrow p + \pi$. En condiciones normales, esta reacción comienza a dominar la dinámica del protón cuando sus energías ingresan al rango $> 3 \times 10^{19}$ eV. Los principales canales para describir el proceso de foto-producción son

$$p + \gamma \rightarrow N + \pi \quad (1.39)$$

$$\rightarrow \Delta + \pi \quad (1.40)$$

$$\rightarrow R \quad (1.41)$$

$$\rightarrow N + \rho(770) \quad (1.42)$$

$$\rightarrow N + \omega(782). \quad (1.43)$$

La lista anterior muestra básicamente tres tipos de procesos. Las primeras dos reacciones, (1.39) y (1.40), corresponden a una producción directa de piones. La tercera reacción, (1.41), es una foto-producción vía decaimiento resonante que puede involucrar resonancias Δ y N . Mientras que los dos últimos, (1.42) y (1.43), corresponden a la producción múltiple de piones intermediada por la producción de bosones $\rho(770)$ u $\omega(782)$. En las reacciones descritas por los procesos (1.39 - 1.43), N corresponderá a un protón p o un neutrón n . Dada la gran similitud que hay entre ambas partículas, tanto en las masas como en los valores de los diversos parámetros que describen tales procesos, no distinguiremos entre ellas y simplemente tomaremos N como un protón. A lo anterior agreguemos la pequeña vida media del neutrón (aún a tales energías) comparada con el tiempo característico entre colisiones.

A continuación revisaremos las secciones eficaces correspondientes a cada uno de los procesos recién descritos. Las expresiones para estas secciones eficaces fueron en su mayoría extraídas de los trabajos de Stanev *et al.* [29, 30] para los procesos astrofísicos de foto-producción.

Resonancias

Para la descripción de las resonancias usaremos la sección eficaz de Breit-Wigner σ_{bw} . Esta viene dada por

$$\sigma_{\text{bw}}(s) = \frac{s}{(s - m_N^2)^2} \frac{4\pi b_\gamma (2J + 1) s \Gamma_R^2}{(s - m_R^2)^2 + s \Gamma_R^2}, \quad (1.44)$$

donde m_R y Γ_R son las respectivas masa y recíproco de la vida media de la resonancia R , s es la energía total al cuadrado en el sistema de centro de masas (o $s = E_{\text{tot}}^2 - p_{\text{tot}}^2$ en cualquier sistema de referencia), J es el spin de la resonancia y b_γ es el radio de ramificación para el decaimiento vía foto-producción. Para simplificar la notación, usemos

$$\sigma_{\text{bw}}(s) = \frac{s^2}{(s - m_N^2)^2} \frac{\sigma_0 \Gamma_R^2}{(s - m_R^2)^2 + s \Gamma_R^2}, \quad (1.45)$$

en donde $\sigma_0 = 4\pi b_\gamma (2J + 1)$. A continuación se muestran los valores usados para los distintos parámetros de las resonancias involucradas en la reacción:

Resonancia	m_R [MeV]	Γ_R [MeV]	$\sigma_0 \times 10^{-18}$
$\Delta(1232)$	1232	120	109.541
$N(1440)$	1440	350	4.888
$N(1520)$	1520	120	89.979
$N(1535)$	1535	150	24.452
$N(1650)$	1650	150	9.780
$N(1680)$	1680	130	61.617
$\Delta(1700)$	1700	300	39.121
$\Delta(1905)$	1905	350	5.866
$\Delta(1950)$	1950	300	39.121

Dado que la producción resonante de piones tiene como resultado la producción de un pión y un protón (o neutrón), usaremos como inelasticidad $K_\pi(s)$ de la reacción a la cantidad dada en la expresión (1.9) anteriormente expuesta, es decir

$$K_\pi(s) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m_\pi^2 - m_p^2}{s} \right). \quad (1.46)$$

Producción Directa de Piones

Para la producción directa de piones se usó la siguiente parametrización fenomenológica [29]:

$$\sigma_{\text{dir}} \propto (s - s_{\text{th}})^{A-2} (s - m_p^2)^{-A} \quad (1.47)$$

para $s > s_{\text{th}}$, donde s_{th} es la energía de c.m. umbral al cuadrado, y donde el exponente A dependerá del canal bajo el cual se produzca la reacción. Estos canales son:

$$p + \gamma \rightarrow N + \pi \quad (1.48)$$

$$p + \gamma \rightarrow \Delta^{++} + \pi^-, \quad (1.49)$$

y los respectivos valores de A son: $A = 3,29$ para el canal $N\pi$, y $A = 3,0$ para el canal $\Delta\pi$. En cuanto a las inelasticidades de estas reacciones, para (1.48) se utilizó la expresión (1.46), mientras que para (1.49) se utilizó la expresión

$$K_{\Delta}(s) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m_{\Delta}^2 - m_{\pi}^2}{s} \right) \times \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m_{\pi}^2 - m_p^2}{m_{\Delta}^2} \right), \quad (1.50)$$

que proviene de la relación (1.8) cuando se considera que Δ decaerá en un protón (o neutrón) y un pión (que es su principal decaimiento).

Multi-Producción de Piones

En este caso debemos representar las dos reacciones (1.42) y (1.43) ya mencionadas. Esto se logra mediante la descripción fenomenológica del intercambio Reggeones y Pomerones. Las siguientes son las respectivas secciones eficaces usadas [29] para describir estos intercambios:

$$\sigma_{\text{reg}} \propto (s - m_p^2)^{-0,34}, \quad (1.51)$$

y

$$\sigma_{\text{pom}} \propto (s - m_p^2)^{0,095}. \quad (1.52)$$

Las secciones eficaces σ_{ρ} y σ_{ω} para la producción de $\rho(770)$ y $\omega(782)$ respectivamente, serán combinaciones lineales de las secciones eficaces σ_{reg} y σ_{pom} . Al restringirnos al canal

no resonante de la producción de $N\rho$ y $N\omega$ —que es el canal principal— podemos usar la predicción teórica $\sigma_\rho = 9\sigma_\omega$. La sección eficaz σ_ρ será

$$\sigma_\rho(s) = \left[1 - \exp\left(-\frac{s - s_{\text{th}}}{1,294}\right) \right] (\sigma_{\text{reg}}(s) + \sigma_{\text{pom}}(s)), \quad (1.53)$$

donde las energías están dadas en GeV. En la expresión anterior, la función en el paréntesis cuadrado corresponde a una función de “quenching” y cumple el rol de suavizar la transición desde la región $s < s_{\text{th}}$, donde σ_ρ es nulo.

Las inelasticidades a ocupar serán aquellas correspondientes al de la producción de $\rho(770)$ y de $\omega(782)$ respectivamente. Es decir:

$$K_\rho(s) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m_\rho^2 - m_p^2}{s} \right), \quad (1.54)$$

$$K_\omega(s) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m_\omega^2 - m_p^2}{s} \right). \quad (1.55)$$

La Figura (1.4) muestra la sección eficaz total para la foto-producción de piones. El resultado está de acuerdo con numerosos estudios de dicha reacción [5, 29].

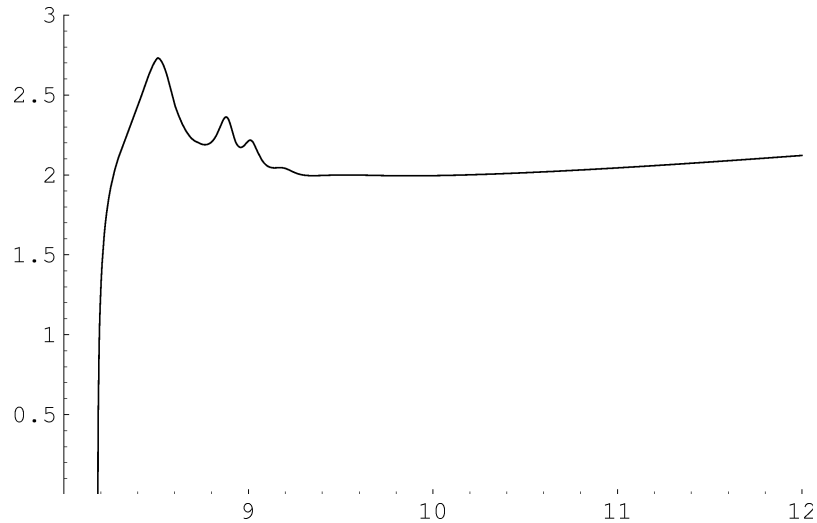


Figura 1.4: Sección eficaz total para la foto-producción de piones, como función de la energía ϵ del fotón del FRC en el sistema de referencia de reposo para el protón incidente.

1.6. Producción de Pares $p + \gamma \rightarrow p + e^+ + e^-$

Para la producción de pares, consideraremos la sección eficaz de Bethe-Heitler [31]. A continuación se detallan los resultados desarrollados por Chodorowski *et al.* [32], en relación

a la sección eficaz σ_e y la inelasticidad K_e para la creación de pares en el régimen $\gamma \gg 1$. Por lo extenso del tratamiento, nos limitaremos a mostrar sólo las expresiones esenciales.

El desarrollo en serie de la sección eficaz $\sigma_e(k)$ (donde $k \simeq \epsilon/m_e$, con m_e la masa del electrón) para la región $2 < k < 4$, viene dado por:

$$\sigma_e(k) \simeq \frac{2\pi}{3} \alpha r_0^2 \left(\frac{k-2}{k} \right)^3 \left(1 + \frac{1}{2} \eta + \frac{23}{40} \eta^2 + \frac{37}{120} \eta^3 + \frac{61}{192} \eta^4 \right), \quad (1.56)$$

donde $\alpha = 1/137$ es la constante de estructura fina, r_0 es el radio clásico del electrón, y $\eta = (k-2)/(k+2)$. El error fraccional es menor que $1,1 \times 10^{-3}$. La expansión para $k > 4$ es:

$$\begin{aligned} \sigma_e(k) \simeq \alpha r_0^2 \left\{ \frac{28}{9} \ln 2k - \frac{218}{27} + \left(\frac{2}{k} \right)^2 \left[6 \ln 2k - \frac{7}{2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{3} \ln^3 2k - \ln^2 2k - \frac{1}{3} \pi^2 \ln 2k + 2\zeta(3) + \frac{\pi^2}{6} \right] \right. \\ \left. - \left(\frac{2}{k} \right)^4 \left[\frac{3}{16} \ln 2k + \frac{1}{8} \right] \right. \\ \left. - \left(\frac{2}{k} \right)^6 \left[\frac{29}{9 \cdot 256} \ln 2k - \frac{77}{27 \cdot 512} \right] \right\}, \quad (1.57) \end{aligned}$$

donde el error fraccional es menor que $4,4 \times 10^{-5}$.

Por su parte, la inelasticidad $K_e(k)$ puede ser ajustada mediante el siguiente desarrollo. Para el rango $2 \leq k \leq 10^3$ (con un error fraccional menor a 6×10^{-3}),

$$K_e(k) = 4 \frac{m_e}{m_p} k^{-1} \sum_{i=0}^3 a_i \ln^i(k-1), \quad (1.58)$$

donde $a_0 = 1$, $a_1 = 0,3958$, $a_2 = 0,1$ y $a_3 = 0,00781$. Mientras que para la región $10^3 \leq k$ (con un error fraccional menor a $2,5 \times 10^{-3}$), contamos con

$$K_e(k) = \frac{4(m_e/m_p)k^{-1}}{(28/9) \ln 2k - 218/27} \sum_{i=0}^3 b_i \ln^i(k), \quad (1.59)$$

donde

$$\begin{aligned} b_0 &= -\frac{41}{2} + 11 \ln 2 - 2 \ln^2 2 + \frac{\pi^2}{6} (3 - 2 \ln^2 2) + 2\zeta(3) \\ &\simeq -8,778, \\ b_1 &= 12 - 6 \ln 2 + 2 \ln^2 2 - \frac{1}{3} \pi^2 \simeq 5,512, \\ b_2 &= -3 + 2 \ln 2 \simeq -1,614, \\ b_3 &= \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

La figura (1.5) muestra el producto $K_e(k)\sigma_e(k)$, en función del parámetro $k = \epsilon/m_e$.

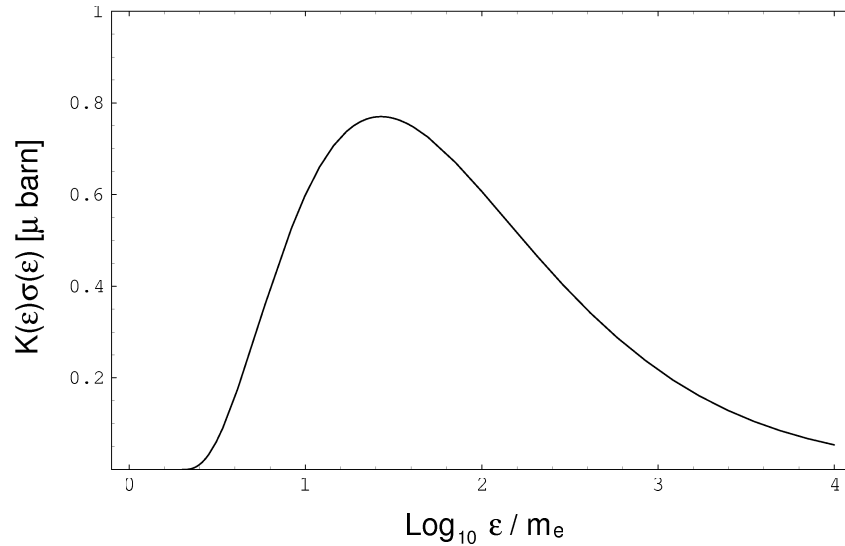


Figura 1.5: Producto $K\sigma$ en función de la variable $k = \epsilon/m_e$

1.7. Espectro Teórico y Observado

Ya estamos en condiciones de reproducir el espectro de rayos cósmicos teórico válido para energías $> 10^{18}$ eV. La Figura 1.6a muestra la pérdida de energía $(E^{-1}dE/dt)_{\text{col}}$ debido a colisiones (curva 1) y la pérdida de energía $(E^{-1}dE/dt)_{\text{rd}}$ debido al corrimiento al rojo (curva 2), ambas en tiempo presente ($z = 0$). También se ilustran las contribuciones independientes a $(E^{-1}dE/dt)_{\text{col}}$ otorgadas por la foto-producción de piones (curva 3) y la producción de pares (curva 4). Por su parte, la Figura 1.6b muestra la derivada $db(E)/dE$ en tiempo presente, también necesaria para el cálculo del espectro. Es posible apreciar que la pérdida de energía, como función de la energía E , puede ser dividida en tres sectores. En primer lugar, está la región $E \lesssim 3 \times 10^{18}$ eV, donde la pérdida de energía es debido principalmente al corrimiento al rojo. En segundo lugar, está la región intermedia 3×10^{18} eV $\lesssim E \lesssim 3 \times 10^{19}$ eV, dominada principalmente por la producción de pares. Y, finalmente, el sector $E \gtrsim 3 \times 10^{19}$ eV, donde la foto-producción es la principal causante de la pérdida de energía de los protones. Nótese que cuando la pérdida de energía está dominada por el corrimiento al rojo, ésta se vuelve independiente de E . Por lo tanto, para energías inferiores al tobillo ($E \simeq 4 \times 10^{18}$ eV) el espectro medido

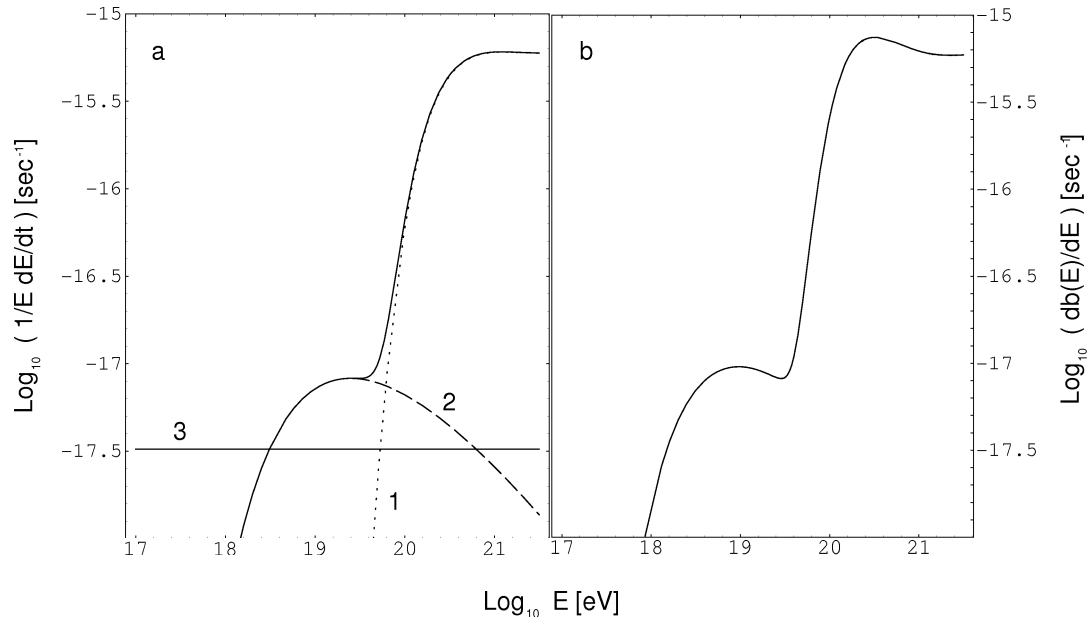


Figura 1.6: a) Pérdidas de energía para los rayos cósmicos. Curva sólida: pérdida de energía debida a colisiones para la propagación de un protón en un espacio de FRW con un FRC de $T=2,7$ K. Adicionalmente; curva 1: foto-producción; curva 2: producción de pares; curva 3: corrimiento al rojo. b) Derivada db/dE para tiempo presente $z = 0$, donde $b(E) = dE/dt$.

$j(E)$ tendrá básicamente la misma ley de potencias que el espectro de producción $F(E)$, y se tendrá la relación

$$j(E) \propto E^{-\gamma_g}. \quad (1.61)$$

No es difícil anticipar que, debido al fuerte escalonamiento que sufre la pérdida de energía cuando la foto-producción toma importancia, habrá una consecuente disminución en el flujo de partículas viajando por el Universo con energías en dicho rango. Este hecho dará origen al límite GZK. Una definición precisa de una energía de corte E_{GZK} para caracterizar al límite GZK, es necesariamente dependiente del modelo que se utilice para describir a las fuentes de rayos cósmicos. En el presente trabajo utilizaremos como criterio la usual definición de E_{GZK} como aquella energía en donde la influencia de la foto-producción comienza a dominar la pérdida de energía; esto es $E_{GZK} \approx 4 \times 10^{19}$ eV. La distancia característica de viaje correspondiente es $R_{GZK} = 1,3 \times 10^3$ Mpc. Si bien es cierto que esta definición es sólo nominal, tiene la ventaja de ser independiente del índice γ_g del espectro y nos permitirá estudiar al espectro en forma cuantitativa. Otras definiciones alternativas pueden ser igualmente empleadas [33].

Los resultados de la Figura 1.6 pueden ser comparados positivamente con los respectivos desarrollados por Stecker *et al.* [5], Stanev *et al.* [30] y Berezhinsky *et al.* [33].

Usando las pérdidas de energía mostradas en la Figura 1.6, se calculó, mediante la ecuación (1.38), el espectro teórico para rayos cósmicos. La Figura 1.7 muestra el espectro

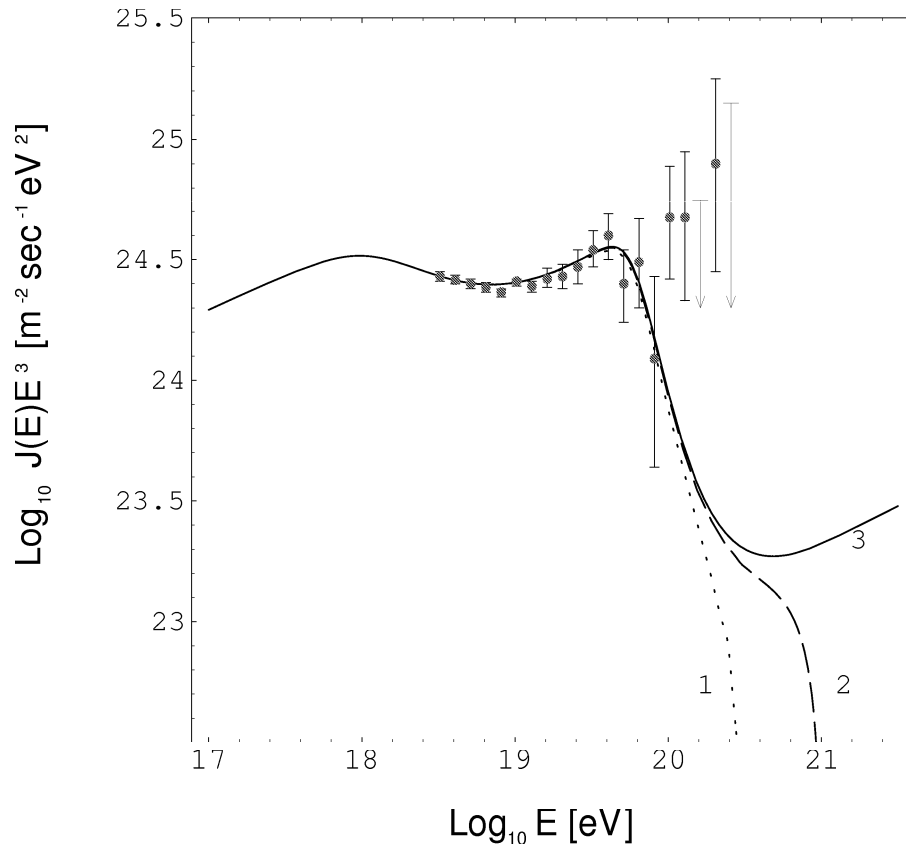


Figura 1.7: Espectro teórico para rayos cósmicos altamente energéticos. Las curvas 1, 2 y 3 muestran al espectro predicho para fuentes distribuidas uniformemente, sin evolución ($m = 0$, $\gamma_g = 2,7$) con una luminosidad volumétrica $\mathcal{L}_0 = 4,7 \times 10^{51}$ ergs/Mpc³yr, para energías máximas de producción $E_{\max} = 3 \times 10^{20}$ eV, 1×10^{21} eV y ∞ , respectivamente. Adicionalmente, se muestran los resultados observacionales del grupo experimental AGASA (ver Figura 1.2).

para protones con energías sobre el tobillo, así como las mediciones hechas por el grupo experimental AGASA. En el presente cálculo se usó como índice de generación $\gamma_g = 2,7$ y se consideró únicamente el caso sin evolución $m = 0$. Para que esta elección de los índices se ajustase correctamente a los datos, se requirió una luminosidad volumétrica $\mathcal{L}_0 = 4,7 \times 10^{51}$ ergs/Mpc³yr. Otras combinaciones alternativas de estos parámetros pueden ser también encontradas, sin embargo, esta elección es la que mejor se ajusta a las mediciones en el

sector $1 \times 10^{18} - 5 \times 10^{19}$ eV [33, 34]. Las curvas 1, 2 y 3 de la Figura 1.7, muestran al espectro para distintas energías de corte de producción E_{\max} ; éstas son 3×10^{20} eV, 1×10^{21} eV y ∞ respectivamente. En cuanto al redshift máximo z_m , para partículas con energías $E > 1 \times 10^{17}$ eV su valor no será importante si éste es mayor que 4 [33].

Al observar la Figura 1.7, no es difícil notar la precariedad con que la curva predicha se ajusta a las mediciones efectuadas sobre los $\sim 8 \times 10^{19}$ eV de energía. Para estimar la discrepancia estadística entre el espectro predicho y el espectro observado, usemos como hipótesis la existencia del corte GZK observadas en las curvas de la Figura 1.7. Para esta estimación calcularemos la función χ^2 de Poisson para eventos con energías mayores a $E_{GZK} = 3 \times 10^{19}$ eV. Para χ^2 utilizaremos la expresión [35]

$$\chi^2 = \sum_i [2(N_i^{\text{th}} - N_i^{\text{obs}}) + 2N_i^{\text{obs}} \ln(N_i^{\text{obs}}/N_i^{\text{th}})], \quad (1.62)$$

donde N_i^{th} y N_i^{obs} son el número de partículas teóricas y observadas, respectivamente, en el grupo de medición i . Cuando $N_i^{\text{obs}} = 0$, el segundo término de (1.62) es nulo. Para los 8 grupos medidos en el intervalo energético $4 \times 10^{19} - 3 \times 10^{20}$ eV, se tiene $\chi^2 = 34,4$ para la curva 1, $\chi^2 = 29,9$ para la curva 2, y $\chi^2 = 29$ para la curva 3. Otra forma de estimar la discrepancia estadística es mediante el cálculo de la probabilidad de Poisson de encontrar un exceso de los eventos observados. Hagamos esto para los 5 grupos de mayor energía con $E > 10^{20}$ eV, que son 5, 3, 0, 2 y 0 eventos en cada uno. Esta probabilidad es $7,1 \times 10^{-10}$ para la curva 1, 7×10^{-9} para la curva 2, y $1,1 \times 10^{-8}$ para la curva 1. La conclusión inevitable es que los cortes GZK predichos por las curvas 1 - 3 contradicen fuertemente las observaciones.

Se han propuesto varias soluciones teniendo a la física convencional como base para dar una explicación coherente a estos resultados experimentales³. De las últimas propuestas encontradas en la literatura científica, amerita la mención de la posibilidad de que los rayos cósmicos primarios sean en realidad fotones altamente energéticos [36, 37, 38], teniendo como fuente a cierto tipo de Blazars, conocidos como los BL Lacterae. Esta presunción se basa en que las pequeñas asimetrías en la distribución angular del arribo de los RCAE pueden ser correlacionadas con las pertenecientes a la ubicación de los BL Lacterae. Sin embargo, una dificultad sería de este modelo radica en el hecho de que la energía de generación para dichos fotones requiere, cuanto menos, ser superior a los 10^{23} eV, lo que es inconsistente con los modelos para núcleos galácticos activos como los BL Lacterae.

³En contraposición a las ya mencionadas en la Introducción (página x).

Capítulo 2

Gravedad Cuántica de Lazos

Como ya se ha dicho, en esta tesis recogeremos los resultados que dicen relación con una de las versiones efectivas de GCL para la descripción de la propagación de partículas en el vacío. Comenzaremos este capítulo con una breve descripción del formalismo de GCL, para luego continuar con la constatación de las ecuaciones de campo efectivas, y su posterior análisis.

2.1. Formalismo

Para llevar la teoría de la relatividad general a un formalismo canónico, se asume que la variedad M del espacio-tiempo de dimensión 3+1 consiste en una topología $M = \mathbb{R} \times \Sigma$, donde Σ es una variedad compacta de dimensión 3, sin frontera. Esta suposición es consistente con la exigencia física de que M sea globalmente hiperbólico¹; es decir, la existencia de superficies de Cauchy σ , de dimensión 3, insertadas en todo M . Adicionalmente, se definen los triedros e_a^i , con $a, b, c \dots$ índices tensoriales tipo espacio, e $i, j, k \dots$ índices del álgebra $SU(2)$. Así, la tres-métrica de las superficies σ estará dada por $q_{ab} = \sum_i e_a^i e_b^i$. Se definen también los campos K_a^i a través de

$$K_{ab} = \text{sgn}[\det e_c^j] K_a^i e_b^i, \quad (2.1)$$

donde K_{ab} es la curvatura extrínseca de σ . El par canónico para el espacio de fase gravitacional será $(A_a^i, \underline{E}_{jb}/\kappa)$, donde

$$\underline{E}_i^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \epsilon_{ijk} e_b^j e_c^k, \quad (2.2)$$

$$A_a^i = \Gamma_a^i + K_a^i, \quad (2.3)$$

¹Con esta exigencia se tendrá que la física es determinista a nivel clásico.

con Γ_a^i la conexión libre de torsión compatible con e_a^i . Con las cantidades anteriores es posible determinar los hamiltonianos para el campo gravitacional H_{Einstein} , para un campo fermiónico H_{Dirac} , y para un el campo electro-magnético H_{Maxwell} . Estos son:

$$H_{\text{Einstein}} = \int_{\Sigma} d^3x N \frac{1}{\kappa \sqrt{\det q}} \text{tr}(2[K_a, K_b] - K_{ab})[\underline{E}_a, \underline{E}_b], \quad (2.4)$$

donde $N = N(x)$ es un coeficiente de proporcionalidad definido a través de la parametrización de la inserción σ (ver referencia [21]);

$$H_{\text{Dirac}} = \int_{\Sigma} d^3x N \frac{\underline{E}_i^a}{2\sqrt{\det q}} (i \pi^T \tau^i D_a \xi + c.c.), \quad (2.5)$$

donde ξ es un componente espinorial del campo de Dirac, $\pi = i\xi^*$ es el conjugado de ξ , D_a es la derivada covariante, y $\tau^i = -i\sigma^i/2$, donde σ^i son las matrices de Pauli del álgebra $\text{SU}(2)$;

$$H_{\text{Maxwell}} = \int_{\Sigma} d^3x N \frac{q_{ab}}{2Q^2 \sqrt{\det q}} (E^a E^b + B^a B^b), \quad (2.6)$$

donde E^a y B^a son los campos eléctricos y magnéticos respectivamente, y Q es la constante de acoplamiento del campo electromagnético.

Para llevar a los hamiltonianos anteriores al formalismo cuántico, en GCL se construye como base —para los estados cuánticos en M — una red espinorial etiquetada por grafos insertados en el espacio Σ . Además, es necesario introducir un método consistente de regularización debido a las restricciones canónicas sobre los Hamiltonianos descritos (en especial las restricciones sobre H_{Einstein}). Para ello T. Thiemann [39] propuso un procedimiento basado en la triangulación del espacio mediante tetraedros Δ cuyos lados son de orden l_p . En dicha propuesta, resulta vital la incorporación de un operador de volumen. Dado que su acción sobre los estados físicos es finita, resulta ser un regularizador ideal.

Una vez incorporados los elementos anteriores, es posible escribir la versión cuántica de los Hamiltonianos anteriores. Para los casos H_{Dirac} y H_{Maxwell} , éstos son

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{Dirac}} = & -\frac{\hbar}{4l_p^4} \sum_{v \in V(\gamma)} N(v) \frac{8}{E(v)} \epsilon^{ijk} \sum_{s_I \cap s_J \cap s_K = v} \epsilon^{IJK} \\ & \left\{ \hat{\xi}_B(v + s_K(\Delta)) \frac{\partial}{\partial \xi^A(v)} (\tau_k h_{s_K(\Delta)})^{AB} \hat{w}_{iI\Delta}(v) \hat{w}_{jJ\Delta}(v) \right. \\ & \left. - \tau_k \hat{\xi}(v) \frac{\partial}{\partial \xi(v)} \hat{w}_{iI\Delta}(v) \hat{w}_{jJ\Delta}(v) - c.c. \right\}, \quad (2.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\text{Maxwell}} &= \frac{1}{2\hbar^2 \kappa^2 Q^2} \sum_{v \in V(\gamma)} N(v) \left(\frac{2}{3!} \frac{8}{E(v)} \right)^2 \sum_{v(\Delta)=v(\Delta')=v} \epsilon^{JKL} \epsilon^{MNP} \\
&\quad \hat{w}_{iL\Delta}(v) \hat{w}_{iP\Delta'}(v) \left[\left(e^{-i\hat{\Phi}^B(F_{JK})} - 1 \right) \left(e^{-i\hat{\Phi}^B(F'_{MN})} - 1 \right) \right. \\
&\quad \left. - \hat{\Phi}^E(F_{JK}) \hat{\Phi}^E(F'_{MN}) \right]. \tag{2.8}
\end{aligned}$$

En estas expresiones, los tetraedros Δ están adaptados al grafo γ constituido por un conjunto $V(\gamma)$ de vértices v . Las cantidades $s_J(\Delta)$, $s_K(\Delta)$ y $s_L(\Delta)$ denotan los bordes de los tetraedros Δ con los que se ha triangulado Σ , teniendo a v como vértice común. F_{JK} corresponde a una superficie paralela a la cara determinada por $s_J(\Delta)$, $s_K(\Delta)$ y transversal a $s_L(\Delta)$. Adicionalmente, $E(v) = n_v(n_v - 1)(n_v - 2)/6$ corresponde al número posible de triangulaciones cuando el vértice v es alcanzado por n_v bordes del grafo. El operador auxiliar $\hat{w}_{iI\Delta}$ viene definido mediante

$$\hat{w}_{iI\Delta} = \text{tr} \left(\tau_k h_{s_I(\Delta)} \left[h_{s_I(\Delta)}^{-1}, \sqrt{\hat{V}_v} \right] \right), \tag{2.9}$$

donde \hat{V}_v es el operador volumen restringido a actuar sobre el vértice v , y $h_{s_I(\Delta)}$ corresponde a las holonomías a lo largo de los segmentos $s_I(\Delta)$.

Con el propósito de obtener una versión efectiva de los hamiltonianos anteriores y así poder estudiar los efectos de gravedad cuántica a escalas mucho mayores que la escala de Planck l_p (en donde la estructura del espacio se manifiesta discreta), se define un estado de “lazo” en donde la acción de la métrica se aproxime a su versión plana y continua, para escalas $d \gg l_p$. En el caso de gravedad pura (sin materia) este estado es denominado “weave” [40, 41, 42, 43, 44]. Un estado de weave $|W\rangle$ está caracterizado por una escala $\mathcal{L} \gg l_p$, tal que para distancias $d \geq \mathcal{L}$, la geometría clásica, plana y continua, es reobtenida, mientras que para distancias $l_p \leq d \ll \mathcal{L}$, la estructura grávitico-cuántica del espacio está presente. Para ilustrar lo anterior, mencionemos que bajo estas condiciones el operador 3-métrica satisface

$$\langle W | \hat{q}_{ab} | W \rangle = \delta_{ab} + \mathcal{O}(l_p/\mathcal{L}). \tag{2.10}$$

Una extensión de la idea de weave para el caso en que contamos con campos de materia (como fermiones o campos electromagnéticos), puede ser hecha exigiendo que las ecuaciones clásicas para estos campos sean reproducidas. Por supuesto, al igual que en la ecuación (2.10), es de esperar que dichas ecuaciones tengan correcciones de orden $\mathcal{O}(l_p/\mathcal{L})$.

Para el caso fermiónico usaremos $|W, \xi\rangle$ como símbolo para dicho estado, mientras que para el caso electromagnético usaremos $|W, E, B\rangle$. Al igual que en el caso gravitacional puro, en ambos casos simplemente nos referiremos a dicho estado como el “weave”.

Dicho lo anterior, nos interesa estimar los hamiltonianos efectivos

$$H_{\text{Dirac}} = \langle W, \xi | \hat{H}_{\text{Dirac}} | W, \xi \rangle, \quad (2.11)$$

en el caso fermiónico, y

$$H_{\text{Maxwell}} = \langle W, E, B | \hat{H}_{\text{Maxwell}} | W, E, B \rangle, \quad (2.12)$$

en el caso electromagnético. Para evaluar ambas expresiones les asociamos c -números respecto a la estructura de los índices, junto con factores de escala que aparecerán por razones dimensionales consistente con la aproximación del estado de weave plano considerado. Lo anterior se logra mediante una expansión de los valores de expectación en torno a los vértices del weave. La forma precisa de la expansión se logra mediante

$$\hat{w}_{iI\Delta}(v) = s_I^a \hat{w}_{ia} + s_I^a s_I^b \hat{w}_{iab} + \dots, \quad (2.13)$$

en donde

$$\hat{w}_{ia} = \frac{1}{2} [A_{i,a}, \sqrt{\hat{V}_v}], \quad \hat{w}_{iab} = \frac{1}{8} \epsilon_{ijk} [A_{j,a}, [A_{k,b}, \sqrt{\hat{V}_v}]]. \quad (2.14)$$

Para estimar las contribuciones de los términos en (2.14) debemos considerar que los promedios bajo el weave de A_{ia} y $\sqrt{\hat{V}_v}$ son del orden $\sim 1/\mathcal{L}$ y $\sim l_p^{3/2}$ respectivamente. De este modo, para proceder con la aproximación podemos pensar que el espacio está constituido por cajas de volumen \mathcal{L}^3 , cuyo centro está dado por la coordenada x . Naturalmente, cada caja contendrá un gran número de vértices del weave; aún así son consideradas infinitesimales en la escala donde el espacio puede ser tratado como continuo, de modo que $\mathcal{L}^3 \approx d^3x$. Con todos estos elementos bajo nuestra consideración, supongamos que $\hat{F}(v)$ es un operador de algún campo de materia que produce una función $F(x)$ en la caja, y que $\hat{G}(v)/l_p^3$ es un operador gravitacional (como los mostrados en (2.14)) con un promedio $\bar{G}(x)$ en la caja. El valor de expectación de estas cantidades en el weave será tal que

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(\gamma)} \frac{8}{E(v)} \langle W, \xi | \hat{F}(v) \hat{G}(v) | W, \xi \rangle &= \sum_{\text{Caja}(x)} F(x) \sum_{v \in \text{Caja}(x)} l_p^3 \frac{8}{E(v)} \times \\ &\quad \langle W, \xi | \frac{1}{l_p^3} \hat{G}(v) | W, \xi \rangle \\ &= \int_{\Sigma} d^3x F(x) \bar{G}(x). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Para desarrollar este valor de expectación en conjunto con las ecuaciones (2.7) y (2.8), debemos establecer las simetrías del espacio-tiempo dado por $|W\rangle$ que nos interesa para la descripción de los campos de materia ξ . La elección natural es un espacio-tiempo localmente plano, homogéneo e isotrópico. Esta elección define en forma única la estructura tensorial y la estructura del álgebra de Lie de las distintas cantidades involucradas en el promedio (2.15); ésta deberá estar conformada exclusivamente por cantidades clásicas del espacio-tiempo plano, i.e. ${}^0E^{ia}$, ϵ^{abc} , τ^k , ∂_a , ϵ^{ijk} y δ_{ab} según sea el caso. Es importante señalar que con las propiedades que estamos pidiendo a la estructura algebraica, estas ecuaciones serán válidas sólo en un sistema de referencia con tales propiedades. Afortunadamente, en nuestro universo dicho sistema sí existe y corresponde al sistema de referencia co-móvil del FRC. En consecuencia, para lograr el propósito que esta tesis tiene por finalidad, las ecuaciones que deduciremos a partir de este método, constituirán el marco ideal para el estudio de procesos extragalácticos altamente energéticos cuando son observadas desde la Tierra².

Para ilustrar en forma concreta el método del desarrollo, mostremos algunos términos de la expansión del caso fermiónico³. Para ello, recordemos que el weave debe permitir que las ecuaciones de campos sean reobtenidas a orden cero en l_p/\mathcal{L} . Lo anterior ocurrirá si exigimos la condición

$$\begin{aligned} & \langle W, \xi | \hat{\xi}_B(v) \frac{\partial}{\partial \xi^A(v)} (\tau_k \mathcal{D}_c^{(\xi)})^{AB} \hat{w}_{ia}(v) \hat{w}_{jb}(v) | W, \xi \rangle \\ & \approx \left(\frac{i}{\hbar} \xi_B(v) \pi_A(v) l_p \mathcal{L}^2 \right) \left(\frac{l_p^3}{\mathcal{L}^2} (\tau_k \partial_c^{(\xi)})^{AB} {}^0E_{ia}(v) {}^0E_{jb}(v) \right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde el segundo paréntesis en (2.16) viene directamente de considerar $A_{ia} \sim 1/\mathcal{L}$ y $\sqrt{\hat{V}_v} \sim l_p^{3/2}$, además del hecho de que los valores de expectación deben estar constituidos por ${}^0E^{ia}$, τ^k y ∂_a . Por otra parte, el primer paréntesis se presenta con los respectivos campos $\xi_B(v)$ y $\frac{\partial}{\partial \xi^A(v)} \rightarrow \pi_A$ además del factor $l_p \mathcal{L}^2$ (que es el adecuado para que (2.7) entregue el Hamiltoniano correcto a orden cero).

La relación (2.16) marca adecuadamente el camino para calcular los valores de expectación del resto de los términos comprometidos en la expansión de (2.7). Para ilustrar

²Si bien es cierto que la Tierra se desplaza con respecto al sistema co-móvil del FRC, consideraremos durante todo este trabajo que dicho desplazamiento es despreciable.

³El caso correspondiente al campo electromagnético puede ser tratado en forma similar

esto veamos un ejemplo; uno de los términos que aparece en la expansión es

$$\frac{i}{4} \frac{\mathcal{L}^2}{l_p^3} \sum_{v \in V(\gamma)} \frac{8}{E(v)} \epsilon^{ijk} \epsilon^{IJK} \frac{1}{3!} s_K^a s_K^b s_K^c s_I^d s_J^e \pi(v) \tau_k \partial_a \partial_b \partial_c \xi(v) \times \langle W, \xi | \hat{w}_{id}(v) \hat{w}_{je}(v) | W, \xi \rangle. \quad (2.17)$$

Trabajando esta expresión de la misma forma en que se hizo con (2.7) encontramos que puede ser reducido a

$$\rightarrow -i\kappa l_p^2 \int d^3x \pi(x) \tau_k {}^0 E^{kc} \partial_c \nabla^2 \xi(x), \quad (2.18)$$

donde κ es un coeficiente de orden 1 que, por el momento, ha de quedar indeterminado. El resto de los términos pueden ser tratados en la misma forma. Salvo nuevas consideraciones empleadas en la referencia más reciente [25], el sector electromagnético puede ser trabajado análogamente. Veamos ahora las ecuaciones de movimiento resultantes del procedimiento.

2.2. Ecuaciones de Movimiento Efectivas

En esta sección veremos las ecuaciones de movimiento que resultan del tratamiento anterior. Así mismo, analizaremos brevemente algunas propiedades tales como el comportamiento de estas ecuaciones bajo transformaciones CPT.

2.2.1. Fermiones

Una vez desarrolladas las técnicas anteriores en forma extensa, es posible encontrar las siguientes ecuaciones de movimiento efectivas para el campo de Majorana:

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} - i \hat{A} \vec{\sigma} \cdot \nabla + \frac{\hat{C}}{2\mathcal{L}} \right] \xi(x) - m(\alpha - i\beta \vec{\sigma} \cdot \nabla) \chi(x) = 0, \quad (2.19)$$

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} + i \hat{A} \vec{\sigma} \cdot \nabla - \frac{\hat{C}}{2\mathcal{L}} \right] \chi(x) - m(\alpha - i\beta \vec{\sigma} \cdot \nabla) \xi(x) = 0, \quad (2.20)$$

donde $\xi(x)$ y $\chi(x)$ son los espinores componentes del campo de Dirac $\Psi(x) = (\xi(x), \chi(x))$. En las ecuaciones anteriores, dado que $\Psi(x)$ es adicionalmente un campo de Majorana, las componentes $\xi(x)$ y $\chi(x)$ cumplen la condición de realidad

$$\xi(x) = -i\sigma^2 \chi^*(x), \quad \chi(x) = i\sigma^2 \xi^*(x). \quad (2.21)$$

En las ecuaciones (2.19) y (2.20) los operadores \hat{A} y \hat{C} vienen dados por

$$\hat{A} = 1 + \kappa_1 \frac{l_p}{\mathcal{L}} + \kappa_2 \left(\frac{l_p}{\mathcal{L}} \right)^2 + \frac{\kappa_3}{2} l_p^2 \nabla^2, \quad (2.22)$$

$$\hat{C} = \kappa_4 + \kappa_5 \frac{l_p}{\mathcal{L}} + \kappa_6 \left(\frac{l_p}{\mathcal{L}} \right)^2 + \frac{\kappa_7}{2} l_p^2 \nabla^2, \quad (2.23)$$

y son claramente hermíticos. Además, las constantes α y β vienen dados por

$$\alpha = 1 + \kappa_8 \frac{l_p}{\mathcal{L}}, \quad (2.24)$$

$$\beta = \frac{\kappa_9}{2\hbar} l_p. \quad (2.25)$$

En las expresiones anteriores los κ_i son coeficientes desconocidos de orden 1, y deben ser determinados. Para mayor simplicidad, reduciremos las ecuaciones (2.19) y (2.20) a una sola ecuación, expresada en términos del espinor $\xi(x)$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \hat{A} \vec{\sigma} \cdot \nabla - \frac{i\hat{C}}{2\mathcal{L}} \right] \xi(x) - m(\alpha - i\beta \vec{\sigma} \cdot \nabla) \sigma^2 \xi^*(x) = 0. \quad (2.26)$$

Comportamiento Bajo CPT

Analicemos ahora la forma en que se comporta la ecuación (2.26) bajo transformaciones CPT. Partamos viendo como transforma el espinor $\xi(x)$ y su conjugado $\xi^*(x)$, bajo las operaciones C, P y T [45],

- Conjugación de carga C:

$$\xi_C(x) = \xi^* \xi(x), \quad \xi_C^*(x) = \xi^* \xi^*(x). \quad (2.27)$$

- Paridad P:

$$\xi_P(x) = i\eta^* \sigma^2 \xi^*(\mathcal{P}x), \quad i\sigma^2 \xi_P^*(x) = \eta^* \xi(\mathcal{P}x). \quad (2.28)$$

- Inversión temporal T:

$$\xi_T(x) = i\zeta^* \sigma^2 \xi(-\mathcal{P}x), \quad i\sigma^2 \xi_T^*(x) = \zeta^* \xi^*(-\mathcal{P}x). \quad (2.29)$$

En donde $\mathcal{P}t = t$ y $\mathcal{P}x = -x$.

Mediante el uso de las relaciones anteriores, resulta directo que la ecuación de movimiento (2.26) es invariante bajo conjugación de carga; de hecho, la regla (2.27) constituye la relación bajo la cual se define a un campo fermiónico de Majorana. Para ver como actúa P , tomemos el conjugado de (2.26):

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - A(\vec{\sigma} \cdot \nabla)^* + \frac{i\hat{C}}{2\mathcal{L}} \right] \xi^*(x) + m(\alpha + i\beta(\vec{\sigma} \cdot \nabla)^*)\sigma^2\xi(x) = 0. \quad (2.30)$$

Multiplicando por σ^2 (notemos que $\sigma^2\vec{\sigma} = -\vec{\sigma}^*\sigma^2$), obtenemos

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + A\vec{\sigma} \cdot \nabla + \frac{i\hat{C}}{2\mathcal{L}} \right] \sigma^2\xi^*(x) + m(\alpha - i\beta\vec{\sigma} \cdot \nabla)\sigma^2(\sigma^2\xi(x)) = 0. \quad (2.31)$$

Haciendo el cambio de variables $x \rightarrow \mathcal{P}x$ y multiplicando por $i\eta^*$,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} - A\vec{\sigma} \cdot \nabla + \frac{i\hat{C}}{2\mathcal{L}} \right] (i\eta^*\sigma^2\xi^*(\mathcal{P}x)) \\ + m(\alpha + i\beta\vec{\sigma} \cdot \nabla)(i\eta^*\xi(\mathcal{P}x)) = 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

por último, identificando los nuevos campos en paréntesis con los respectivos $\xi_P(x)$ y $\xi_P^*(x)$, quedamos con

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - A\vec{\sigma} \cdot \nabla + \frac{i\hat{C}}{2\mathcal{L}} \right] \xi_P(x) - m(\alpha + i\beta\vec{\sigma} \cdot \nabla)\sigma^2\xi_P^*(x) = 0. \quad (2.33)$$

Como puede ser apreciado a través de (2.33), la ecuación de movimiento (2.26) viola paridad debido a los términos que contienen a \hat{C} y β .

Veamos por último la acción de la inversión temporal T ; multiplicando (2.26) por $-i\zeta^*\sigma^2$ y haciendo el cambio de variables $x \rightarrow -\mathcal{P}x$, obtenemos

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} - A(\vec{\sigma} \cdot \nabla)^* + \frac{i\hat{C}}{2\mathcal{L}} \right] (i\zeta^*\sigma^2\chi(-\mathcal{P}x)) \\ + m(\alpha + i(\beta\vec{\sigma} \cdot \nabla)^*)(i\zeta^*\chi^*(-\mathcal{P}x)) = 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Identificando ahora los campos $\xi_T(x)$ y $\xi_T^*(x)$, podemos escribir

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - A\vec{\sigma} \cdot \nabla - \frac{i\hat{C}}{2\mathcal{L}} \right]^* \xi_T(x) - m[(\alpha - i\beta\vec{\sigma} \cdot \nabla)]^*\xi_T^*(x) = 0. \quad (2.35)$$

Como T es anti-unitario, la última ecuación revela que (2.26) es invariante bajo inversión temporal.

En conclusión, la ecuación modificada por GCL (2.26) para campos de Majorana es invariante bajo C y T, pero no P. En otras palabras tenemos una violación de CPT. Dicha violación será manifiesta a la hora de calcular la relación de dispersión para neutrinos de Majorana, pues encontraremos que los estados libres, con distinta helicidad, ya no serán degenerados. Es decir, verificaremos que la energía de las partículas representadas por un campo de Majorana dependerá de la helicidad que éstas tengan.

2.2.2. Fotones

Similar al caso del campo fermiónico, es posible encontrar las siguientes ecuaciones para el campo electromagnético efectivo:

$$A(\nabla \times \vec{B}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 2l_p^2 \theta_3 \nabla^2 (\nabla \times \vec{B}) - 2\theta_8 l_p \nabla^2 \vec{B} + 4\theta_4 \mathcal{L}^2 \left(\frac{\mathcal{L}}{l_p} \right)^{2\Upsilon} l_p^2 \nabla \times (\vec{B}^2 \vec{B}) = 0, \quad (2.36)$$

$$A(\nabla \times \vec{E}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + 2l_p^2 \theta_3 \nabla^2 (\nabla \times \vec{E}) - 2\theta_8 l_p \nabla^2 \vec{E} = 0, \quad (2.37)$$

donde la constante A viene dada por

$$A = 1 + \theta_7 \left(\frac{l_p}{\mathcal{L}} \right)^{2+2\Upsilon}. \quad (2.38)$$

Comportamiento Bajo CPT

Para el campo electromagnético, las cantidades transformadas bajo C, P y T, en términos de las no transformadas, son:

- Conjugación de carga C:

$$\vec{E}_C(x) = \vec{E}(x), \quad \vec{B}_C(x) = \vec{B}(x). \quad (2.39)$$

- Paridad P:

$$\vec{E}_P(x) = -\vec{E}(\mathcal{P}x), \quad \vec{B}_P(x) = \vec{B}(\mathcal{P}x). \quad (2.40)$$

- Inversión temporal T:

$$\vec{E}_T(x) = \vec{E}(-\mathcal{P}x), \quad \vec{B}_T(x) = -\vec{B}(-\mathcal{P}x). \quad (2.41)$$

Al igual que en el caso fermiónico, resulta directo que las ecuaciones de movimiento son invariantes bajo C. Veamos ahora como transforman éstas bajo P. Haciendo el cambio de variables $x \rightarrow \mathcal{P}x$ en las ecuaciones (2.36) y (2.36), y luego identificando los campos $\vec{E}_P(x)$ y $\vec{B}_P(x)$, se encuentra:

$$A(\nabla \times \vec{B}_P) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_P}{\partial t} + 2l_p^2 \theta_3 \nabla^2 (\nabla \times \vec{B}_P) + 2\theta_8 l_p \nabla^2 \vec{B}_P + 4\theta_4 \mathcal{L}^2 \left(\frac{\mathcal{L}}{l_p} \right)^{2\Upsilon} l_p^2 \nabla \times (\vec{B}_P^2 \vec{B}_P) = 0, \quad (2.42)$$

$$A(\nabla \times \vec{E}_P) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_P}{\partial t} + 2l_p^2 \theta_3 \nabla^2 (\nabla \times \vec{E}_P) + 2\theta_8 l_p \nabla^2 \vec{E}_P = 0. \quad (2.43)$$

Vemos así que los términos asociados con θ_8 aparecen con el signo cambiado, indicando esto una violación de paridad a través de θ_8 . Por último la inversión temporal; realizando el cambio de variables $x \rightarrow -\mathcal{P}x$ para luego identificar $\vec{E}_T(x)$ y $\vec{B}_T(x)$, encontramos:

$$A(\nabla \times \vec{B}_T) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_T}{\partial t} + 2l_p^2 \theta_3 \nabla^2 (\nabla \times \vec{B}_T) - 2\theta_8 l_p \nabla^2 \vec{B}_T + 4\theta_4 \mathcal{L}^2 \left(\frac{\mathcal{L}}{l_p} \right)^{2\Upsilon} l_p^2 \nabla \times (\vec{B}_T^2 \vec{B}_T) = 0, \quad (2.44)$$

$$A(\nabla \times \vec{E}_T) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_T}{\partial t} + 2l_p^2 \theta_3 \nabla^2 (\nabla \times \vec{E}_T) - 2\theta_8 l_p \nabla^2 \vec{E}_T = 0. \quad (2.45)$$

Este último resultado nos dice que (2.36) y (2.37) son invariantes bajo inversión temporal T.

Nuevamente, tenemos que la simetría CPT se ve violada a través de la ruptura de la paridad P. Esta violación se manifestará a través de la aparición de distintas relaciones de dispersión, dependiendo de la helicidad del estado descrito.

2.3. Relaciones de Dispersión y Correcciones

En esta sección veremos cómo obtener las relaciones de dispersión tanto para los fermiones de Majorana como para los fotones, y estableceremos aquellos términos relevantes para contrastar los efectos de GCL.

2.3.1. Fermiones

Para calcular la relación de dispersión para los fermiones de Majorana, volvamos a las ecuaciones (2.19) y (2.20) de la sección anterior. Multiplicando (2.20) por $m(\alpha - i\beta \vec{\sigma} \cdot \nabla)$,

obtenemos

$$m(\alpha - i\beta\vec{\sigma} \cdot \nabla) \left[i\frac{\partial}{\partial t} + i\hat{A}\vec{\sigma} \cdot \nabla - \frac{\hat{C}}{2\mathcal{L}} \right] \chi(x) - m^2(\alpha - i\beta\vec{\sigma} \cdot \nabla)^2 \xi(x) = 0. \quad (2.46)$$

Como $m(\alpha - i\beta\vec{\sigma} \cdot \nabla)$ conmuta con los términos del paréntesis cuadrado en (2.46), podemos reescribir

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} + i\hat{A}\vec{\sigma} \cdot \nabla - \frac{\hat{C}}{2\mathcal{L}} \right] m(\alpha - i\beta\vec{\sigma} \cdot \nabla) \chi(x) - m^2(\alpha - i\beta\vec{\sigma} \cdot \nabla)^2 \xi(x) = 0. \quad (2.47)$$

Recordando con la ayuda de (2.19) qué forma tiene $m(\alpha - i\beta\vec{\sigma} \cdot \nabla)\chi(x)$, y reemplazando dicha cantidad en (2.47), se obtiene

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} + i\hat{A}\vec{\sigma} \cdot \nabla - \frac{\hat{C}}{2\mathcal{L}} \right] \left[i\frac{\partial}{\partial t} - i\hat{A}\vec{\sigma} \cdot \nabla + \frac{\hat{C}}{2\mathcal{L}} \right] \xi(x) - m^2(\alpha - i\beta\vec{\sigma} \cdot \nabla)^2 \xi(x) = 0. \quad (2.48)$$

O reescrito

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(i\hat{A}\vec{\sigma} \cdot \nabla - \frac{\hat{C}}{2\mathcal{L}} \right)^2 - m^2(\alpha - i\beta\vec{\sigma} \cdot \nabla)^2 \right] \xi(x) = 0. \quad (2.49)$$

Esta última ecuación tiene como solución autoestados de energía del tipo:

$$W(\vec{p}, h) e^{\pm \frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad (2.50)$$

Donde $W(\vec{p}, h)$ es un autoestado del operador helicidad $(\vec{\sigma} \cdot \hat{p})$ con autovalor $h = \pm 1$. Es decir

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) W(\vec{p}, h) &= hp W(\vec{p}, h) \\ &= \pm p W(\vec{p}, h). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Notemos, sin embargo, que la solución $\xi(x)$ para (2.26) será una combinación lineal del tipo de solución recién expuesta. Introduciendo (2.51) en (2.49), obtenemos finalmente la relación de dispersión buscada:

$$E_{\pm}^2 = \left(Ap \pm \frac{B}{2\mathcal{L}} \right)^2 + m^2(\alpha \pm \beta p)^2 \quad (2.52)$$

donde

$$\begin{aligned}
A &= \left(1 + \kappa_1 \frac{l_p}{\mathcal{L}} + \kappa_2 \left(\frac{l_p}{\mathcal{L}} \right)^2 + \frac{\kappa_3}{2} l_p^2 p^2 \right), \\
B &= \left(\kappa_4 + \kappa_5 \frac{l_p}{\mathcal{L}} + \kappa_6 \left(\frac{l_p}{\mathcal{L}} \right)^2 + \frac{\kappa_7}{2} l_p^2 p^2 \right), \\
\alpha &= \left(1 + \kappa_8 \frac{l_p}{\mathcal{L}} \right), \\
\beta &= \frac{\kappa_9}{2} l_p.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

En las expresiones anteriores, E_{\pm} es la energía de la partícula fermiónica con masa m y momento p , y los κ_i son parámetros adimensionales de orden 1, cuyo valor preciso es desconocido. Los signos \pm se refieren a la helicidad del fermión. Debe ser notado que los términos asociados con B y β , y que precisamente están causando los signos \pm , rompen tanto paridad como la invarianza CPT (siendo las ecuaciones de movimiento invariantes bajo las operaciones de conjugación de carga C e inversión temporal T).

En lo que sigue será suficiente considerar sólo aquellos términos más relevantes. Por ello tomaremos

$$E_{\pm}^2 = A^2 p^2 + \kappa_3 l_p^2 p^4 \pm \kappa_5 \frac{l_p}{\mathcal{L}^2} |p| + m^2 + \frac{1}{4} \left(\kappa_5 \frac{l_p}{\mathcal{L}^2} \right)^2, \tag{2.54}$$

donde ahora $A = 1 + \kappa_1 l_p/\mathcal{L}$ y κ_1 , κ_3 y κ_5 son de orden 1. Para simplificar aún más la notación de la relación de dispersión fermiónica (2.54), resulta útil escribir

$$E_{\pm}^2 = p^2 + 2\alpha p^2 + \eta p^4 \pm 2\lambda p + m^2, \tag{2.55}$$

donde hemos absorbido el término cuadrático en κ_5 en la masa m , y hemos definido a las correcciones⁴ α , η y λ mediante

$$\alpha = \kappa_{\alpha} \frac{l_p}{\mathcal{L}}, \tag{2.56}$$

$$\eta = \kappa_{\eta} l_p^2, \tag{2.57}$$

$$\lambda = \kappa_{\lambda} \frac{l_p}{2\mathcal{L}^2}, \tag{2.58}$$

con $\kappa_{\alpha} = \kappa_1$, $\kappa_{\eta} = \kappa_3$ y $\kappa_{\lambda} = \kappa_5$. Con frecuencia, también nos referiremos al parámetro A de la expresión (2.54) que, con esta notación, es simplemente $A = 1 + \alpha$.

⁴No confundir el parámetro α utilizado aquí, con aquel utilizado en la expresión (2.53).

2.3.2. Fotones

Veamos ahora el sector electromagnético. Para obtener las relaciones de dispersión para los fotones, concentremos nuestro interés sólo en el sector lineal de las ecuaciones de movimiento (2.36) y (2.37) (los efectos no lineales son analizados en [25]). Es decir, consideremos las ecuaciones:

$$A(\nabla \times \vec{B}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 2l_p^2 \theta_3 \nabla^2 (\nabla \times \vec{B}) - 2\theta_8 l_p \nabla^2 \vec{B} = 0, \quad (2.59)$$

$$A(\nabla \times \vec{E}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + 2l_p^2 \theta_3 \nabla^2 (\nabla \times \vec{E}) - 2\theta_8 l_p \nabla^2 \vec{E} = 0. \quad (2.60)$$

Si consideramos soluciones del tipo $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$ y $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$, obtenemos

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{B}_0 \cdot \vec{k} = 0, \quad (2.61)$$

$$(\vec{k} \times \vec{E}_0)[A - 2\theta_3(l_p k)^2] - 2i\theta_8 l_p k^2 \vec{E}_0 - \frac{\omega}{c} \vec{B}_0 = 0, \quad (2.62)$$

$$(\vec{k} \times \vec{B}_0)[A - 2\theta_3(l_p k)^2] - 2i\theta_8 l_p k^2 \vec{B}_0 + \frac{\omega}{c} \vec{E}_0 = 0, \quad (2.63)$$

que, con un poco de álgebra, implica la siguiente relación de dispersión

$$E_{\pm} = p[A_{\gamma} - \theta_3(l_p p)^2 \pm \theta_8 l_p p], \quad (2.64)$$

donde

$$A_{\gamma} = 1 + \kappa_{\gamma} \left(\frac{l_p}{\mathcal{L}} \right)^{2+2\Upsilon}. \quad (2.65)$$

En la expresión previa, E_{\pm} y p son las respectivas energía y momento del fotón, mientras κ_{γ} y θ_i son los parámetros adimensionales de orden 1, y Υ es un parámetro libre que, por ahora, aún necesita interpretación (notemos que la presencia de Υ en la relación de dispersión para los fermiones no fue considerada en [24]). Para ser consistentes con la relación de dispersión de los fermiones de Majorana, consideraremos sólo las posibilidades $\Upsilon = -1/2, 0, 1/2, 1, \text{etc.}$, de modo que $A_{\gamma} \sim 1 + \mathcal{O}[(l_p/\mathcal{L})^n]$, donde $n = 2 + 2\Upsilon$ es un entero positivo. Con este asunto de por medio, podremos encontrar un valor tentativo para Υ , a través del acotamiento de la corrección de menor orden de $\delta A \sim \mathcal{O}[(l_p/\mathcal{L})^n]$ (donde $\delta A = A_{\gamma} - A_a$, siendo a otra partícula).

Como antes, notemos la presencia de los signos \pm que denotan la dependencia en la helicidad del fotón. Rescatando aquellos términos de mayor orden en las escalas, la ecuación (2.64) puede ser escrita

$$E_{\pm}^2 = p^2 + 2\alpha_{\gamma} p^2 \pm 2\theta_{\gamma} l_p p^3, \quad (2.66)$$

donde α_γ viene definida a través de la relación $A_\gamma = 1 + \alpha_\gamma = 1 + \kappa_\gamma (l_p/\mathcal{L})^{2+2\Upsilon}$. En forma notable, (2.66) es esencialmente el mismo resultado que R. Gambini y J. Pullin [23] obtuvieron para la relación de dispersión de fotones, con la diferencia que ellos tienen $\alpha_\gamma = 0$ y, por lo tanto, la escala semiclásica \mathcal{L} está ausente.

Una contribución similar para el caso electromagnético fue también sugerida por Ellis *et al.* [47, 48] (en este caso sin dependencia en la helicidad). Ellos encontraron

$$E^2 = p^2 [1 - 2M_D^{-1}p], \quad (2.67)$$

donde M_D es una escala de masa que viene de los efectos de recogimiento de la D-brana para la propagación de fotones en el vacío. Cuando los datos experimentales en torno a los Gamma Ray Burst (GRB) son analizados para restringir a la masa M_D [48], la siguiente condición surge

$$M_D \gtrsim 10^{24} \text{ eV}. \quad (2.68)$$

Para las relaciones de dispersión de fotones que estamos considerando en el presente trabajo, (2.68) puede ser interpretado como la cota $\theta_\gamma \lesssim 10^4$. Puesto que θ_γ es un parámetro adimensional de orden 1, la expresión (2.66) sigue estando permitida en lo que a GRB se refiere. Pronto veremos otras posibilidades para contrastar un término como θ_γ .

2.3.3. Otras Partículas

Ya hemos revisado las relaciones de dispersión provenientes de GCL tanto para fermiones de Majorana como para fotones.

Una cuestión de importancia para la presente tesis consiste en establecer una extensión de los resultados anteriores para el caso de otras partículas. En particular, nos interesa contar con relaciones de dispersión para fermiones masivos y bosones de spin 0 masivos en general. Un procedimiento preciso y riguroso requeriría que calculásemos las ecuaciones de campo efectivas, provenientes de GCL, para cada sabor de partículas que nos interese. Dado que el desarrollo requerido para encontrar la relación de dispersión correspondiente a cada partícula es muy extenso y está fuera del alcance de esta tesis, sólo nos queda conjeturar la forma que éstas puedan a tener. Futuros cálculos y desarrollos derimirán la validez de estas suposiciones.

Para el caso de otras partículas fermiónicas, supondremos que la relación de dispersión

(2.55),

$$E_{\pm}^2 = p^2 + 2\alpha p^2 + \eta p^4 \pm 2\lambda p + m^2, \quad (2.69)$$

es una relación de dispersión válida en general. Este asunto recae sobre el hecho de que las ecuaciones de campo efectivas, (2.19) y (2.20), fueron estimadas considerando la condición de realidad (2.21). De este modo, en el caso más general donde dicha condición está ausente, cuanto mucho podríamos esperar la aparición de más términos correctivos (aparte de los ya presentes), los que por ahora no anticiparemos.

Por su parte, para el caso de partículas bosónicas de spin 0, supondremos que la relación de dispersión válida consiste en

$$E^2 = p^2 + 2\alpha p^2 + \eta p^4 + m^2. \quad (2.70)$$

La razón de esta elección consiste en que las simetrías involucradas en la construcción de un hamiltoniano efectivo para bosones de spin 0, impediría la aparición de términos del tipo λ (a diferencia del caso fermiónico). Esta conjetura se ha visto fuertemente reforzada por los recientes desarrollos de M. Reyes [46] quien, calculando las ecuaciones de campo efectivas de GCL para bosones de Higgs, ha encontrado que (2.70) es la relación de dispersión correcta para su descripción.

Para concluir, mencionemos que la relación de dispersión (2.69) será utilizada para la descripción física de electrones, protones, neutrones, resonancias Δ 's y resonancias N 's. Mientras que la relación de dispersión (2.70) será empleada para bosones π , ρ y ω .

2.3.4. Otras Relaciones de Dispersión

Por referencia, a lo largo de esta tesis también haremos mención de otras relaciones de dispersión provenientes de otras teorías con ILR. En particular, resultará muy interesante el estudio de la relación de dispersión [13, 16, 47]

$$E^2 = p^2 + \xi p^3 + m^2, \quad (2.71)$$

donde ξ es una escala de longitud determinada por la teoría particular en que la ILR está presente. Por ejemplo, en los últimos trabajos desarrollados por G. Amelino-Camelia [13], se tiene que $\xi = -l_p$. Por su parte, J. Ellis *et al.* [47, 48] han propuesto como extensión a la relación de dispersión (2.67) para partículas masivas, la relación de dispersión dada

por (2.71), con $\xi = -2M_D^{-1}$, donde M_D es la masa de las Branas presentes en su modelo teórico.

Pronto veremos algunas restricciones posibles sobre una escala del tipo ξ .

Capítulo 3

Modificaciones Cinemáticas

En este capítulo intentaremos cubrir algunas de las principales consecuencias provenientes de una ruptura de la invarianza de Lorentz, a través de un análisis cinemático de las relaciones de dispersión modificadas. Estudiaremos las implicancias de una ILR sobre aspectos fundamentales como la estabilidad y causalidad de un sistema físico. También sentaremos las bases bajo las cuales es posible distinguir si las modificaciones encontradas anteriormente (y otras modificaciones más generales) son relevantes para algún proceso de altas energías, en particular aquellos correspondientes a los fenómenos astrofísicos mencionados en la introducción. Con dicho propósito, nuestro enfoque estará centrado en el análisis de las condiciones de umbral energéticas para que dichos procesos ocurran. De momento, dado el contenido energético inicial de las partículas que participan de cierta reacción, una condición de umbral indicará a partir de qué energía es posible tal reacción. De este modo, una corrección a las ecuaciones de movimiento comenzará a ser relevante en cierto proceso cuando, a través de la modificación de la relación de dispersión correspondiente a dicha corrección, las condiciones de umbral se vean modificadas a sí mismas en forma relevante.

3.1. Generalidades

El hecho de contar con una teoría con ruptura espontánea de la simetría de Lorentz, nos permite utilizar las aún válidas transformaciones de Lorentz para expresar cantidades físicas observadas en un sistema de referencia determinado, en términos de las mismas, observadas en otro. Esto es posible pues, bajo una ruptura espontánea de la simetría, las representaciones del grupo de simetría roto preservan sus propiedades de transformación.

En particular, será posible relacionar los 4-momentos observados en sistemas de referencia distintos, mediante la regla usual

$$p'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu p_\nu, \quad (3.1)$$

donde $p_\mu = (-E, \mathbf{p})$ es un 4-momento arbitrario expresado en un sistema de referencia \mathcal{K} , p'_μ es el mismo vector expresado en \mathcal{K}' , y $\Lambda_\mu{}^\nu$ es la usual transformación de Lorentz conectando a ambos sistemas. Por añadidura, dicha transformación mantendrá invariante al producto escalar

$$p^\mu p_\mu = -E^2 + p^2, \quad (3.2)$$

así como a cualquier otro producto.

Ilustremos, para la transformación (3.1), la situación en que \mathcal{K}' es un sistema de referencia con la misma orientación de \mathcal{K} y que representa a un observador con velocidad $\vec{\beta}$ respecto a \mathcal{K} . En tal caso $\Lambda_\mu{}^\nu$ corresponderá a un “boost” en la dirección $\hat{\beta} = \vec{\beta}/|\beta|$, y la expresión (3.1) se reducirá a

$$E' = \gamma(E - \vec{\beta} \cdot \vec{p}), \quad (3.3)$$

$$\vec{p}' = \gamma(\vec{p} - \vec{\beta}E), \quad (3.4)$$

donde $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Un caso particular de esta transformación será aquel en que $\vec{\beta}$ tenga la misma dirección que \vec{p} , y \mathcal{K}' corresponda al sistema de referencia de “centro de masas” (aquel donde $\vec{p}' = 0$). En dicho caso tendremos $\vec{\beta} = \vec{p}/E$ y $\gamma = E/(E^2 - p^2)^{-1/2}$, junto con la relación

$$E' = E/\gamma = (E^2 - p^2)^{1/2}. \quad (3.5)$$

En otras palabras, la energía de centro de masas (c.m.) de una partícula con energía E y momento \vec{p} corresponderá al invariante $(E^2 - p^2)^{1/2}$. Además, dicha energía corresponderá a la menor energía medible por un observador arbitrario. Para comprobar la veracidad de tal afirmación basta resolver la ecuación $\partial E'/\partial \beta = 0$ a partir de la relación (3.3) y verificar que la solución es $\beta = p/E$. Esto nos permite interpretar a $E' = (E^2 - p^2)^{1/2}$ como la “energía en reposo” de la partícula en cuestión. Para simplificar la notación y las próximas discusiones, introduzcamos la usual variable $s = (E')^2$, donde E' viene dada por (3.5).

Hasta aquí la cinemática relativista no ha sufrido modificación alguna. Sin embargo, a diferencia del marco teórico usual, en la presente teoría el producto (3.2) ya no será independiente de la energía; por el contrario, tendremos la expresión general

$$p^\mu p_\mu = -f_a(E, \mathbf{p}) - m_a^2, \quad (3.6)$$

donde $f_a(E, \mathbf{p})$ es una función de la energía y el momento, y que representa la desviación de la invarianza de Lorentz entregada por las teorías efectivas de GCL. Notemos que la expresión (3.6) no es más que la relación de dispersión

$$E^2 = p^2 + f_a(E, \mathbf{p}) + m_a^2. \quad (3.7)$$

Por consistencia $f_a(E, \mathbf{p})$ debe ser invariante bajo transformaciones de Lorentz y, por lo tanto, puede ser escrita como una función escalar (o pseudo escalar) de la energía y el momento.

Ya hemos mencionado que una ruptura de la invarianza de Lorentz contempla la aparición de un sistema privilegiado; en la presente discusión elegiremos como tal sistema a aquel que se presenta isotrópico (que por asunto corresponde al sistema co-móvil del FRC), y expresaremos $f_a(E, \mathbf{p})$ en términos de E y \mathbf{p} medidos en dicho sistema. Como es de esperar, en esta situación f_a será función sólo de la energía E y del módulo del momento $p = |\mathbf{p}|$, ya que ningún rastro de algún campo vectorial externo puede sobrevivir al imponer isotropía. Por ejemplo, en el caso particular de la relación de dispersión para un fermión encontrada en el capítulo anterior, la función $f_a(E, \mathbf{p})$ depende únicamente del momento, y puede ser escrita como

$$f_a(p) = 2\alpha_a p^2 + \eta_a p^4 \pm 2\lambda_a p. \quad (3.8)$$

Por simplicidad, seguiremos usando $f_a(p)$ en lugar de $f_a(E, \mathbf{p})$. Nótese que, a primer orden en las correcciones $f_a(p)$ a las relaciones de dispersión, podemos intercambiar indistintamente la energía E por el momento p .

Mediante el uso de la notación recién introducida y, en conjunto con la expresión (3.5), la energía en reposo de una partícula a con masa m_a y desviación $f_a(p)$ será

$$s_a^{1/2} = \sqrt{f_a(p) + m_a^2}. \quad (3.9)$$

De este modo, cuando estamos frente a violaciones de la invarianza de Lorentz mediante una ruptura espontánea de la simetría, la energía en reposo de una partícula arbitraria dependerá de la energía que ésta posea en el sistema privilegiado en cuestión. Este resultado

será de utilidad más adelante. Es importante notar que la validez de esta interpretación estará subordinada únicamente a aquellos estados en donde se cumpla la condición

$$s_a = f_a(p) + m_a^2 > 0, \quad (3.10)$$

o, equivalentemente, para aquellos estados que posean un 4-momento tipo tiempo. Resulta claro que en caso de contar con partículas con correcciones y energías tales que $s_a = f_a(p) + m_a^2 \leq 0$, éstas estarán descritas por estados físicos tipo luz (si se produce la igualdad) o tipo espacio (si se produce la desigualdad), y por lo tanto no existirán observadores capaces de medir un momento p nulo. Aún así, mantendremos la terminología motivada por (3.5), y diremos que s_a es la energía en reposo cuadrática de la partícula a , independiente de si es positiva o negativa.

Un efecto nuevo proporcionado por la ILR es que, de existir un sistema en donde $p = 0$, en dicho sistema la partícula no estará realmente en reposo. Para entender esto con mayor precisión, basta comprobar que en general

$$v = \frac{\partial E}{\partial p} \neq \frac{p}{E}. \quad (3.11)$$

Volviendo a las ecuaciones (3.3) y (3.4), podemos ver que cuando $\beta = v = \partial E/\partial p$, se cumple

$$\frac{\partial E'}{\partial p'} = \gamma_v \left(\frac{\partial E}{\partial p} - v \right) \frac{\partial p}{\partial p'} = 0, \quad (3.12)$$

donde $\gamma_v = (1 - v^2)^{-1/2}$. El resultado (3.12) es una consecuencia natural de la consistencia de las transformaciones de Lorentz aun en una teoría con ILR, y muestra que la velocidad del sistema donde la partícula está en reposo, es efectivamente v . Surge entonces una distinción importante entre la “velocidad de fase” $\beta = p/E$ del sistema de c.m. de una partícula, y la velocidad de grupo $v = \partial E/\partial p$ de la partícula.

Con las relaciones de dispersión que estamos considerando, cuando $p^2 \gg s$, la velocidad de fase puede ser escrita en la forma

$$\beta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + s}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{s}{p^2}. \quad (3.13)$$

Notemos que mientras $s = m^2 + f(p) > 0$, la velocidad de fase será siempre < 1 . Esto es consistente con la interpretación que hemos forjado a partir de (3.5), ya que si $\beta < 1$,

siempre habrá un observador capaz de medir la energía de c.m. $E' = \sqrt{s}$. Otra consecuencia de $s > 0$, es la inexistencia de sistemas de referencia en donde la energía pueda ser negativa.

Por su parte, cuando se cumple $p^2 \gg s$, la velocidad de grupo de una partícula puede ser escrita como

$$v = \frac{p}{E} + \frac{1}{2E} \frac{\partial f(p)}{\partial p} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{s}{p^2} + \frac{1}{2p} \frac{\partial f(p)}{\partial p}. \quad (3.14)$$

No es difícil constatar que habrán correcciones $f(p)$ para las cuales será posible tener $v > 1$, lo que en primera instancia parece ser una situación crítica. No obstante, la inexistencia de observadores clásicos con velocidades > 1 no impide, necesariamente, la existencia de estados físicos con $v > 1$ medidas en el sistema de laboratorio.

3.2. ILR, Causalidad y Estabilidad

Dos aspectos fundamentales de la física contemporánea que deben ser examinados bajo el marco de una teoría con ILR, son la estabilidad y la causalidad. La primera propiedad dice relación con la capacidad que tiene el vacío de una teoría para mantenerse inalterado frente a la existencia de campos de materia. Por su lado, la segunda propiedad plantea la inexistencia de eventos cuyos efectos puedan preceder a sus propias causas, de tal forma que la teoría física subyacente permita que dichos efectos puedan ser identificados a su vez, como causas de las primeras. En diversas publicaciones recientes (particularmente V.A. Kostelecky and R. Lehnert [50]) se ha recalcado con énfasis que la aparición de estados con energías tales que $s_a < 0$, violaría inevitablemente la estabilidad de un sistema físico. Análogamente, se afirma que la aparición de estados con velocidades $v > 1$, implicaría violaciones a la causalidad de una teoría. Sin embargo, estas conclusiones se basan en preceptos válidos en teorías de campo convencionales, y cuyas extensiones al caso de una teoría con ILR, merecen un mayor cuidado.

A continuación haremos un análisis clásico de las propiedades recién mencionadas a través del estudio del comportamiento de las relaciones de dispersión modificadas. Por construcción, los resultados deducidos deberán ser válidos para una teoría de campos con ILR. Para simplificar las próximas discusiones, definamos a la superficie \mathcal{M} en el espacio de momentos p_μ , mediante la ecuación $p_0 = -E(\mathbf{p})$, tal que si $p_\mu \in \mathcal{M}$, entonces p_μ es el momento de un estado físico.

3.2.1. Causalidad

En la mecánica relativista clásica es bien sabido que, si en un sistema de referencia particular es posible generar una partícula con una velocidad mayor que la de la luz, entonces es también posible generar una señal hacia el pasado de dicho sistema, de tal forma que dicha señal pueda intersectar la línea de vida del emisor de la partícula antes de que ésta haya sido producida [51]. Tales partículas super-lumínicas se denominan “taquiones” y la capacidad de enviar señales hacia el pasado, en la forma descrita, constituye una clara violación a la causalidad.

La razón básica por la cual lo anterior es posible, es que en la teoría clásica la única forma en que la velocidad de una partícula puede superar a la velocidad de la luz, es que \mathcal{M} corresponda a la superficie invariante definida mediante la relación de dispersión $E^2 = p^2 - M^2$, donde M es una constante real que caracteriza a la partícula. Si este fuera el caso, se podrían construir trayectorias cerradas en el espacio 4-dimensional de coordenadas trazadas por estas partículas, con 4-momentos $p_\mu \in \mathcal{M}$ (lo que otorgaría la posibilidad de enviar una señal hacia el pasado, a través de observadores arbitrarios localizados en la trayectoria cerrada). Una condición necesaria para la existencia de tal camino cerrado, es que la velocidad de la partícula sea infinita en al menos un punto de éste. Para el caso particular $E^2 = p^2 - M^2$, la velocidad como función del momento p es

$$v = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{p}{\sqrt{p^2 - M^2}}, \quad (3.15)$$

lo que muestra la factibilidad del caso $v = \infty$, con momentos $p_\mu \in \mathcal{M}$. Este es uno de los motivos por los cuales, en la teoría clásica, la definición de los estados físicos se limita a representaciones del grupo homogéneo de Lorentz cuyos 4-momentos pertenecen a superficies \mathcal{M} definidas mediante $E^2 = p^2 + m^2$, con $E > 0$.

En el caso de una teoría con ruptura espontánea de la simetría de Lorentz como la que analizamos, la situación cambia. A diferencia del caso convencional, sí es posible contar con estados con velocidades mayores que la velocidad de la luz $c = 1$, sin que éstos violen causalidad. Esto se debe básicamente al hecho de que la elección anterior para \mathcal{M} ya no es la única posibilidad para que una partícula tenga velocidades $v > 1$. Para precisar esta situación, notemos que en el sistema isotrópico de laboratorio, dada una partícula arbitraria con una relación de dispersión del tipo $E^2 = p^2 + f(p) + m^2$, su velocidad en

dicho sistema será

$$v = \frac{p}{E} + \frac{1}{2E} \frac{\partial f(p)}{\partial p}. \quad (3.16)$$

Dado que la relación de dispersión es válida sólo para valores $p^2 \gg s$, no será posible generar velocidades infinitas para ningún 4-momento $p_\mu \in \mathcal{M}$. Este resultado limita a todas las señales intercambiadas por observadores, a ser enviadas únicamente en la dirección temporal positiva (del sistema de laboratorio), evitándose de este modo la posibilidad de generar curvas cerradas y, por lo tanto, una violación de la causalidad. Claramente este resultado es extendible al resto de los sistemas de referencia, pues basta que esta condición se dé en un solo sistema. Sin embargo, es interesante recalcar que en otros sistemas si pueden haber velocidades infinitas, para 4-momentos $p_\mu \in \mathcal{M}$.

3.2.2. Estabilidad

En la mecánica cuántica relativista convencional, la eventual existencia de partículas con energías negativas posibilitaría, inevitablemente, la creación de pares de partícula y antipartícula a partir del vacío. Tal situación afectaría notablemente a la estabilidad de un sistema físico arbitrario pues la copiosa producción de partículas a partir de una cantidad nula de energía, no tendría límite, y haría que el vacío se aleje inexorablemente de su estado inicial (más coloquialmente, el vacío dejaría de ser vacío).

El motivo por el cual el fenómeno anteriormente descrito se daría, en una teoría convencional, es que de existir superficies \mathcal{M} permitiendo energías negativas, éstas constatarían inevitablemente la simetría $E \rightarrow E' = -E$ y $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' = -\mathbf{p}$. En consecuencia, por cada 4-momento $p_\mu \in \mathcal{M}$ con energía positiva, existiría un $p_\mu \in \mathcal{M}$ con energía negativa. Esto permitiría, en una teoría cuántica de campos, la aparición de vértices capaces de crear pares de partículas y antipartículas (con 4-momentos p_μ y $-p_\mu$ respectivamente) a partir del vacío, sin restricción en la energía y el momento. Dado que las superficies \mathcal{M} son invariantes bajo transformaciones de Lorentz, basta que la propiedad anterior se dé en un sistema, para que su validez se extienda al resto. En otras palabras, la aparición de energías negativas en un sistema aseguraría de forma inmediata, la inestabilidad del sistema físico en todos los sistemas.

Como es de esperar, en una teoría con una ruptura espontánea de la simetría de Lorentz, la situación anterior puede modificarse. Las relaciones de dispersión con ILR que estamos considerando, son todas definidas positivas en el sistema de referencia isotrópico.

Por lo que, al menos en este sistema de referencia, dado un estado arbitrario $p_\mu \in \mathcal{M}$, no será posible la configuración $-p_\mu \in \mathcal{M}$. De este modo, dado que la producción de pares no está permitida en el sistema isotrópico, entonces no podrá estar permitida en ningún otro sistema, aún cuando en éstos sea posible contar con la aparición de estados físicos con 4-momentos tipo espacio (lo que a su vez implica la existencia de sistemas de referencia en donde la energía es negativa).

3.3. Condiciones de Umbral

Una reacción es cinemáticamente posible cuando, para cierto valor del momento total $\vec{p}_0 = \sum_{\text{inicial}} \vec{p} = \sum_{\text{final}} \vec{p}$, uno puede encontrar un valor total para la energía E_0 tal que $E_0 \geq E_{\min}$. Aquí E_{\min} es el mínimo valor posible que la energía total de las partículas finales puede adquirir, dado un momento total \vec{p}_0 . Para encontrar E_{\min} para las relaciones de dispersión bajo consideración, es suficiente tomar los momentos individuales de las partículas finales, colineales respecto al momento \vec{p}_0 y con la misma dirección (es decir todos los momentos paralelos a \vec{p}_0). Para confirmar esto, es suficiente variar E_0 con las restricciones apropiadas:

$$E_0 = \sum_i E_i(|p_i|) + \xi_j (p_0^j - \sum_i p_i^j), \quad (3.17)$$

donde ξ_j son multiplicadores de Lagrange, el índice i especifica la i -ésima partícula, y el índice j la j -ésima componente vectorial de las distintas cantidades. Realizando la variación, se encuentra

$$\frac{\partial E_i}{\partial p_i^j} \equiv v_i^j = \xi_j. \quad (3.18)$$

Es decir, las velocidades de todas las partículas resultantes debe ser igual a ξ . Ya que las relaciones de dispersión que estamos considerando son monótonas crecientes en el rango $p > |\lambda|$, el resultado anterior significa que los momentos han de ser colineales y con la misma dirección de \vec{p}_0 .

En el presente desarrollo nos concentraremos en aquellos casos en que dos partículas, digamos a y b , colisionan para luego decaer en otras. Por ahora, estas partículas tendrán momentos \vec{p}_a y \vec{p}_b respectivamente, y un momento total \vec{p}_0 . Sin embargo, la energía total del sistema dependerá únicamente de $|p_a|$ y $|p_b|$ (al menos en el sistema isotrópico correspondiente al laboratorio). Luego, para obtener las condiciones de umbral de los procesos

mencionados, debemos encontrar la máxima energía posible E_{\max} de la configuración inicial, dado $|p_a|$ y $|p_b|$. Fijemos arbitrariamente \vec{p}_a y variemos la dirección de $\vec{p}_b \equiv |p_b|\hat{n}$ a través de la relación

$$E_0 = E_a(\vec{p}_0 - |p_b|\hat{n}) + E_b(|p_b|) + \chi(\hat{n}^2 - 1). \quad (3.19)$$

Variando (3.19) respecto a \hat{n} (χ es un multiplicador de Lagrange), encontramos

$$\hat{n}^i = \frac{v_a^i |p_b|}{2\chi}. \quad (3.20)$$

De esta forma obtenemos dos situaciones extremales: $\chi = \pm v_a |p_b|/2$, o simplemente

$$\hat{n}^i = \pm \frac{v_a^i}{v_a}. \quad (3.21)$$

Una sencilla inspección nos muestra que para las relaciones de dispersión que estamos considerando, la máxima energía viene dada cuando $\hat{n}^i = -v_a^i/v_a$ o, en palabras, cuando ocurre una colisión frontal.

Recapitulando. La condición de umbral para una colisión de dos partículas a y b , y su posterior decaimiento en estados finales f puede ser expresada a través de los siguientes requerimientos:

$$E_a + E_b \geq \sum_{\text{final}} E_f \quad (3.22)$$

con todas las partículas finales teniendo la misma velocidad, y

$$p_a - p_b = \sum_{\text{final}} p_f, \quad (3.23)$$

donde el signo del momento total $\sum_{\text{final}} p_f$ está dado por la dirección del momento inicial de la partícula con mayor magnitud.

Miremos, por último, la condición (3.18) en que las partículas emergentes deben tener todas la misma velocidad. Para una relación de dispersión del tipo (3.7) es posible encontrar que la velocidad v_a de una partícula arbitraria a perteneciente al estado final f y con energía $E \gg \sqrt{s_a}$, será

$$\begin{aligned} v_a &= \frac{p}{E} + \frac{1}{2E} \frac{\partial f(p)}{\partial p} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{s}{E^2} + \frac{1}{2E} \frac{\partial f(E)}{\partial E} \\ &= 1 - \frac{1}{2E^2} \left(f_a(E) + m_a^2 - E \frac{\partial f_a}{\partial E} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

De este modo, al imponer la condición $v_a = v_b$ para dos partículas finales a y b , tendremos la ecuación:

$$E_b^2 \left(f_a(E_a) + m_a^2 - E_a \frac{\partial f_a}{\partial E} \Big|_{E_a} \right) = E_a^2 \left(f_b(E_b) + m_b^2 - E_b \frac{\partial f_b}{\partial E} \Big|_{E_b} \right). \quad (3.25)$$

Si contamos con n partículas finales, entonces tendremos $n - 1$ ecuaciones del tipo (3.25), más la ecuación de conservación de energía $E_0 = \sum_{\text{final}} E_f$. Esto nos dará como solución a las energías finales de umbral E_f como función de la energía inicial total E_0 ; es decir $E_f = E_f(E_0)$. Es posible distinguir de (3.25) que en general se encontrará más de una solución para algún E_f determinado; sin embargo, esto no será importante para los casos que estudiaremos.

3.4. Reacciones de Decaimiento

Usando los métodos descritos en las secciones anteriores, podemos encontrar las condiciones de umbral para diversas reacciones conocidas. Dichas condiciones de umbral presentarán modificaciones consecuentes con los nuevos parámetros que rompen la invarianza de Lorentz. Conociendo la forma en que se presentan tales modificaciones y contrastándolas con las respectivas observaciones experimentales, podremos en principio acotar estos parámetros. En esta sección examinaremos las cotas impuestas por aquellos procesos de la naturaleza que se presentan con la mayor energía registrada; esto es, los rayos cósmicos altamente energéticos y los rayos γ multi-TeV del Blazar Markarian Mrk 501.

Como lo que nos interesa es encontrar cotas para los diversos parámetros en consideración (en particular para \mathcal{L}) y, ya que deseamos expresiones simples y manejables, usaremos la simplificación en que la ecuación para las velocidades (3.18) es escrita como

$$E_b m_a = E_a m_b. \quad (3.26)$$

Es decir, despreciaremos los efectos de $f(E)$ comparados con m^2 cuando de calcular la velocidad de umbral se trate. Esta aproximación es, en principio, bastante gruesa ya que los efectos nuevos serán relevantes justamente cuando $f(E) \simeq m^2$; sin embargo, esta elección nos permitirá obtener una estimación válida para los parámetros que rompen la invarianza, cuando éstos provengan de la región $f(E) \ll m^2$ y recién se empiecen a manifestar (que es lo que nos interesa). Cuando desarrollemos el espectro modificado, en el Capítulo 4, se resolverá la ecuación (3.18) en forma numérica.

3.4.1. Producción de Pares, $\gamma + \gamma_e \rightarrow e^- + e^+$

Los fotones multi-TeV de Markarian están sujetos a interacciones con el Fondo de Radiación Infra Roja (FRIR) a través del proceso $\gamma + \gamma_e \rightarrow e^- + e^+$, donde γ_e es un fotón del fondo. Para que esta reacción ocurra, la siguiente condición de umbral debe ser satisfecha:

$$E_\gamma + \omega \geq E_{e^+} + E_{e^-} \quad (3.27)$$

con

$$p_\gamma - k = p_{e^+} + p_{e^-}, \quad (3.28)$$

además de la ecuación $v_{e^+} = v_{e^-}$. En las expresiones anteriores, ω y k son la energía y el momento del fotón “blanco” del FRIR. Como la energía de estos fotones no excede en forma importante el rango $\omega \sim \text{eV}$, consideraremos para éstos la relación de dispersión usual $\omega = k$. Las ecuaciones (3.27) y (3.28) pueden ser reexpresadas como

$$E_\gamma^2 + 2\omega E_\gamma \geq E_{e^+}^2 + E_{e^-}^2 + 2E_{e^+}E_{e^-} \quad (3.29)$$

y

$$p_\gamma^2 - 2kp_\gamma = p_{e^+}^2 + p_{e^-}^2 + 2p_{e^+}p_{e^-}, \quad (3.30)$$

donde hemos despreciado los términos cuadráticos en las cantidades del FRIR. Dado que las ecuaciones de campo para los fermiones que estamos considerando son invariantes bajo conjugación de carga, podemos tomar tanto para el electrón como para el positrón la misma relación de dispersión, con la misma convención de signos. Además, un análisis de conservación de momento angular muestra que ambas helicidades son posibles para el par emergente. Luego, para el lado derecho de (3.29) debemos procurar que la energía de ambas partículas, sea la mínima posible. Esto último, en conjunto con la relación $E_{e^+} = E_{e^-}$ proveniente de $v_{e^+} = v_{e^-}$, nos dice que debemos usar $E_{e^+} = E_{e^-} = E_{(-)}$, donde $E_{(-)}$ está definido como

$$E_{(-)}^2 \equiv A^2 p^2 + \eta p^4 - 2|\lambda|p + m^2. \quad (3.31)$$

Físicamente, esta condición significa que el estado con aquella helicidad de menor energía es aquel que fija la condición umbral. Con esta consideración, obtenemos

$$E_\gamma^2 + 2\omega E_\gamma \geq 4E_{(-)}^2. \quad (3.32)$$

De las relaciones de dispersión (2.55) y (2.66) podemos escribir la última ecuación como

$$p_\gamma^2[A_\gamma^2 + (\pm)_\gamma 2\theta_\gamma(l_p p_\gamma)] + 2\omega E_\gamma \geq 4[A_e^2 p_e^2 - 2|\lambda|p_e + m_e^2]. \quad (3.33)$$

Aquí, $(\pm)_\gamma$ se refiere a la helicidad del fotón incidente. Notemos que hemos despreciado los términos relacionados con η ; estos términos serán importantes cuando estudiemos otras reacciones. Reemplazando la conservación de momento, nos queda

$$p_\gamma^2(A_\gamma^2 - A_e^2) + (\pm)_\gamma 2\theta_3 l_p p_\gamma^3 + 2(\omega E_\gamma + p_\gamma k A_e^2) + 8|\lambda|p_e \geq 4m_e^2. \quad (3.34)$$

Al orden en consideración podemos reemplazar los p 's por E 's. Adicionalmente, escribiendo $2E_e \simeq E_\gamma$, obtenemos

$$E_\gamma^2(A_\gamma^2 - A_e^2) + (\pm)_\gamma 2\theta_3 l_p E_\gamma^3 + 4\omega E_\gamma + 4|\lambda|E_\gamma \geq 4m_e^2. \quad (3.35)$$

Notemos que en la ausencia de correcciones grávitico-cuánticas habríamos obtenido la usual condición de umbral

$$E_\gamma \geq \frac{m_e^2}{\omega}, \quad (3.36)$$

por lo tanto, para contrastar los nuevos términos, los comparamos con la cantidad $4m_e^2$ en el lado derecho de la desigualdad (3.35).

Siguiendo los argumentos de F.W. Stecker y O.C. De Jager [52], las observaciones de los fotones del Blazar Markarian Mkn 501 indican que no hay invarianza de Lorentz rota para las energías involucradas. Esto impone fuertes cotas sobre nuestros parámetros y, en particular, significa que cualquier término modificado debe ser menor que $4m_e^2$ cuando la energía de los fotones está en el orden de los ~ 20 TeV [14]. Veamos en primer lugar el término asociado con los A 's; imponiendo la desigualdad descrita obtenemos:

$$E_\gamma^2|A_\gamma^2 - A_e^2| \simeq 2E_\gamma^2|A_\gamma - A_e| \leq 4m_e^2. \quad (3.37)$$

Por lo que sigue

$$|\delta A| \leq 2\frac{m_e^2}{E_\gamma^2}. \quad (3.38)$$

Evaluando con una energía de referencia $E_\gamma \sim 20$ TeV para los fotones, obtenemos $|\delta A| \leq 1,3 \times 10^{-15}$. Si asumimos que los parámetros adimensionales son de orden 1, y tomamos

para Υ el valor $\Upsilon = -1/2$ (de modo que $\delta A = \mathcal{O}(l_p/\mathcal{L})$), podemos estimar la siguiente cota para \mathcal{L}

$$\mathcal{L} \gtrsim 6,4 \times 10^{-14} \text{ eV}^{-1}. \quad (3.39)$$

Sin embargo, valores típicos para la diferencia $|\delta A|$ producida por los parámetros de ILR, están bajo el valor $\sim 10^{-22}$ [12]. Esto a su vez impone una nueva cota $\mathcal{L} \gtrsim 8,3 \times 10^{-7} \text{ eV}^{-1}$ (o $\mathcal{L} \gtrsim 10^{-11} \text{ cm}$) que está en el rango de la física nuclear. Como no existe ninguna evidencia de que el espacio manifiesta la estructura de lazo a esta escala [53], interpretamos este resultado como $\delta A = \mathcal{O}(l_p^2/\mathcal{L}^2)$. O sea, la universalidad está rota a lo más a segundo orden en el radio l_p/\mathcal{L} . Esta nueva situación favorece un valor $\Upsilon = 0$ para dicho exponente, y entrega una nueva cota

$$\mathcal{L} \gtrsim 8,3 \times 10^{-18} \text{ eV}^{-1}. \quad (3.40)$$

Esta es lejos una restricción más razonable para \mathcal{L} .

En segundo lugar, tenemos el término asociado a θ_γ (recordemos que este término depende de la helicidad del fotón). Imponiendo el mismo tipo de restricciones, con fotones de energía $E_\gamma \sim 20 \text{ TeV}$, obtenemos

$$|\theta_\gamma| \lesssim 0,8. \quad (3.41)$$

Este resultado no constituye una cota fuerte sobre el parámetro θ_γ , ya que θ_γ es por asunto de orden 1. En cualquier caso, si $|\theta_\gamma| \gtrsim 1$, entonces los observados fotones de Mrk 501 deberían tener una helicidad privilegiada (la helicidad particular dependerá del signo de θ_γ). Más aún, puesto que θ_γ se asume de orden 1, la expresión (3.41) nos dice que si fotones más energéticos que aquellos que estamos considerando son observados (energías $\gtrsim 20 \text{ TeV}$) deberían aparecer con alguna helicidad privilegiada. Esta es una posibilidad muy interesante, y queda abierta a futuras observaciones.

Finalmente, nos resta revisar el término que involucra a λ_e para los electrones. Para éste, obtenemos la restricción:

$$|\kappa_{\lambda_e}| \frac{l_p}{\mathcal{L}^2} \leq 2,6 \times 10^{-2} \text{ eV}. \quad (3.42)$$

O, asumiendo que κ_{λ_e} es de orden 1:

$$\mathcal{L} \gtrsim 5,7 \times 10^{-14} \text{ eV}^{-1}. \quad (3.43)$$

3.4.2. Decaimiento Resonante, $p + \gamma \rightarrow \Delta$

La principal reacción conducente al límite GZK es el decaimiento resonante $p + \gamma \rightarrow \Delta(1232)$. La condición de umbral puede ser descrita mediante el conjunto de ecuaciones

$$E_p + \omega \geq E_\Delta \quad (3.44)$$

con

$$p_p - k = p_\Delta, \quad (3.45)$$

siendo ω y k la energía y momento del fotón blanco del FRC (al igual que en el caso anterior, consideraremos para éste una relación de dispersión usual $\omega = k$). Aquí $E_\Delta^2 = A^2 p^2 + \eta p^4 - 2|\lambda|p + m^2$, es decir, la mínima energía posible para el Δ emergente. Con alguna manipulación algebraica podemos encontrar que

$$2\delta A E_p^2 + \delta\eta E_p^4 + ((\pm)_p \lambda_p + |\lambda_\Delta|) E_p + 4\omega E_p \geq m_\Delta^2 - m_p^2, \quad (3.46)$$

donde $\delta A = A_p - A_\Delta$ y $\delta\eta = \eta_p - \eta_\Delta$. Adicionalmente, $(\pm)_p$ se refiere a la helicidad del protón incidente. Notemos que en la ausencia de correcciones de GCL, la condición de umbral viene a ser

$$E_p \geq \frac{m_\Delta^2 - m_p^2}{4\omega}. \quad (3.47)$$

Ya que no tenemos un detallado conocimiento de los parámetros GCL, los analizaremos en forma independiente. Naturalmente, siempre existirá la posibilidad de tener una combinación adecuada de los valores de estos parámetros que puede afectar la condición de umbral simultáneamente. Sin embargo, como pronto veremos, cada uno de estos parámetros será significativo en diferentes rangos de energía.

Comencemos considerando los términos involucrando a los A 's,

$$2\delta A E_p^2 + 4\omega E_p \geq m_\Delta^2 - m_p^2. \quad (3.48)$$

No es difícil comprobar que para un valor dado ω , la reacción representada por (3.48) estará cinemáticamente prohibida para todo E , si

$$A_\Delta - A_p > \frac{2\omega^2}{m_\Delta^2 - m_p^2} \simeq 1,7 \times 10^{-25} [\omega/\omega_0]^2, \quad (3.49)$$

donde $\omega_0 = 2,35 \times 10^{-4}$ eV es la energía kT (con $T = 2,73$ K) de la distribución termal del FRC. Para todo propósito el límite GZK se verá gruesamente alterado si los parámetros correctivos cumplen la desigualdad anterior, al tomar $\omega \simeq \omega_0$. Ya que deseamos argumentar que los parámetros de GCL otorgan la posibilidad de violar el límite GZK, restringimos estas correcciones tomando $\omega = \omega_0$. Asumiendo que los parámetros adimensionales son de orden 1 y que —como previamente se mencionó— la desviación no universal de A es a lo menos de segundo orden en l_p/\mathcal{L} , obtenemos

$$\mathcal{L} \lesssim 2 \times 10^{-16} \text{ eV}^{-1}. \quad (3.50)$$

De mayor relevancia que los términos A (como pronto verificaremos), son aquellos relacionados con η . Aquí se tiene

$$\delta\eta E_p^4 + 4\omega E_p \geq m_\Delta^2 - m_p^2. \quad (3.51)$$

En este caso la condición es independiente de \mathcal{L} y depende únicamente de la diferencia $\delta\eta$. Para este caso, la reacción estará prohibida si

$$(\eta_\Delta - \eta_p) > \frac{27\omega^4}{(m_\Delta^2 - m_p^2)^3} \simeq 3,2 \times 10^{-67} [\omega/\omega_0]^4 \text{ eV}^{-2}. \quad (3.52)$$

Recordando que $\eta = \kappa_\eta l_p^2$, la ecuación (3.52) nos dice que es suficiente tener $|\kappa_\eta| > 5 \times 10^{-11}$ con $\kappa_{\eta\Delta} > \kappa_{\eta p}$, para que la reacción esté prohibida. Puesto que estamos asumiendo que $\mathcal{O}(\kappa_\eta) = 1$, este resultado nos revela que la presencia de un $\delta\eta < 0$ no nulo podría asegurar una violación del límite GZK.

En vista de las posibilidades $\delta\eta = 0$ y $\delta A = 0$, debemos considerar los términos dependientes de λ . Para éstos se cumple:

$$2((\pm)_p \lambda_p + |\lambda_\Delta|) E_p + 4\omega E_p \geq m_\Delta^2 - m_p^2. \quad (3.53)$$

Esta última expresión es muy interesante dado que hay términos que dependen de la helicidad del protón incidente. En este caso la reacción es más sensitiva a la energía del fotón blanco. Por ejemplo, si ω es tal que

$$(\pm)_p \lambda_p + |\lambda_\Delta| + 2\omega \leq 0, \quad (3.54)$$

la reacción estaría prohibida. Por supuesto, esta situación dependerá de la configuración de la helicidad del protón incidente. Por ejemplo, si

$$|\lambda_p| \geq |\lambda_\Delta| + 4,7 \times 10^{-4} [\omega/\omega_0] \text{ eV}, \quad (3.55)$$

la reacción estaría prohibida para al menos un protón con cierta helicidad. En efecto, si $|\kappa_{\lambda p}| - |\kappa_{\lambda \Delta}| \gtrsim 1$ (recordemos que $\lambda = \kappa_{\lambda} l_p / 2\mathcal{L}^2$) la condición de umbral es dominada por el término λ_p :

$$|\lambda_p| \gtrsim 4,7 \times 10^{-4} [\omega/\omega_0] \text{ eV}. \quad (3.56)$$

Esto sugiere una nueva cota sobre la escala \mathcal{L} de la teoría,

$$\mathcal{L} \lesssim 3 \times 10^{-13} \text{ eV}^{-1}. \quad (3.57)$$

Por otra parte, si $|\kappa_{\lambda \Delta}| - |\kappa_{\lambda p}| \gtrsim 1$, la conservación de momento angular siempre permite la reacción, y no se obtendría violación alguna del límite GZK. Aunque para que estos efectos sean notorios debemos demandar universalidad en ambos A y η (al menos para estas partículas hadrónicas). Puesto que los Δ 's y protones tienen diferente spin, no podemos descartar esta posibilidad.

3.4.3. Foto-Producción de Piones, $p + \gamma \rightarrow p + \pi$

La siguiente reacción relevante para el límite GZK es la producción directa de piones $p + \gamma \rightarrow p + \pi$. No olvidemos, sin embargo, que también es posible encontrar la reacción $p + \gamma \rightarrow n + \pi$. Mas, al igual que en el análisis de la pérdida de energía desarrollado en el Capítulo 1, el asumir correcciones distintas entre protones y neutrones, no traerá consecuencias relevantes en la descripción de la propagación de rayos cósmicos. Por dicho motivo, para simplificar la discusión, asumiremos que las correcciones a las relaciones de dispersión de p y n son las mismas. El mismo argumento puede ser planteado en la descripción de otras familias relevantes de hadrones tales como π (por ejemplo a través de la diferenciación entre las correcciones de π^0 , π^+ y π^-), ρ , y ω .

Como en los otros casos, la condición de umbral estará dado por

$$E_p + \omega \geq \bar{E}_p + E_\pi \quad (3.58)$$

con

$$p_p - k = \bar{p}_p + p_\pi. \quad (3.59)$$

Donde \bar{E}_p y \bar{p} son las cantidades del protón emergente. En analogía con el decaimiento Δ , para esta condición de umbral debemos usar $E_p^2 = A_p^2 \bar{p}^2 + \eta \bar{p}^4 - 2|\lambda_p| \bar{p} + m_p^2$.

Con un poco de álgebra somos capaces de encontrar

$$2\delta A E_\pi^2 + \left(\delta\eta + 3\eta_p \frac{m_p(m_p + m_\pi)}{m_\pi^2} \right) E_\pi^4 + 4E_\pi\omega + 2E_\pi(|\lambda_p| \pm \lambda_p) \geq \frac{m_\pi^2(2m_p + m_\pi)}{m_p + m_\pi}, \quad (3.60)$$

donde $\delta A = A_p - A_\pi$, y $\delta\eta = \eta_p - \eta_\pi$. En la última expresión, \pm se refiere a la helicidad del protón incidente. Ya que necesariamente habrá una helicidad del protón que puede minimizar este término, podemos tomar para la condición de umbral

$$2E_\pi(|\lambda_p| \pm \lambda_p) = 0. \quad (3.61)$$

Con esta consideración en mente, nos queda

$$2\delta A E_\pi^2 + (\delta\eta + 168\eta_p) E_\pi^4 + 4E_\pi\omega \geq \frac{m_\pi^2(2m_p + m_\pi)}{m_p + m_\pi}. \quad (3.62)$$

Como antes, consideremos las modificaciones separadamente. Si δA estuviera dominando, tendríamos que considerar

$$2\delta A E_\pi^2 + 4E_\pi\omega \geq \frac{m_\pi^2(2m_p + m_\pi)}{m_p + m_\pi}, \quad (3.63)$$

consecuentemente, la condición para violar el límite sería

$$A_\pi - A_p > \frac{2\omega^2(m_p + m_\pi)}{m_\pi^2(2m_p + m_\pi)} \simeq 3,3 \times 10^{-24} [\omega/\omega_0]^2. \quad (3.64)$$

Usando $\delta A \sim l_p^2/\mathcal{L}^2$, este resultado nos provee la cota

$$\mathcal{L} \lesssim 4,6 \times 10^{-17} \text{ eV}^{-1}. \quad (3.65)$$

Consideremos ahora los términos η . Para éstos tenemos un límite violado si

$$-\delta\eta - 168\eta_p > 27\omega^4 \left(\frac{m_p + m_\pi}{m_\pi^2(2m_p + m_\pi)} \right)^3 \simeq 2,2 \times 10^{-63} [\omega/\omega_0]^4 \text{ eV}^{-2}. \quad (3.66)$$

Puesto que $\mathcal{O}(\delta\eta) \simeq \mathcal{O}(\eta_p)$ (cuando $\delta\eta \neq 0$) asumamos que el término η_p domina en la expresión anterior (o lo que es igual, tomemos a η universal). En dicho caso, para que la condición de umbral esté completamente alterada (sin reacciones posibles) requerimos

$$\eta_p < -1,3 \times 10^{-65} \text{ eV}^{-2} \quad (3.67)$$

con η negativo. Recordando que $\eta = \kappa_\eta l_p^2$ con κ_η de orden 1, esta condición puede ser leída como $\kappa_\eta < -1,9 \times 10^{-9}$. Así, si κ_η no es estrictamente cero, este término sería un culpable aceptable para violar GZK, cuando de photo-producción directa se trata.

Para el caso de un η_p positivo, la expresión (3.62) nos dice que la energía umbral para la foto-producción directa de piones puede ser disminuida considerablemente. Como esto no ocurre con energías de a lo menos $E_{\text{ref}} \simeq 10^{20}$ eV, debemos exigir que el término con η_p en la ecuación (3.62) sea menor que el término del lado derecho de la misma ecuación. Haciendo lo señalado obtenemos

$$\eta_p < \frac{(2m_p + m_\pi)(m_p + m_\pi)^2}{3 m_p E_{\text{ref}}^4} = 8,21 \times 10^{-63} \text{ eV}^{-2}, \quad (3.68)$$

que en términos de κ_η puede ser leída como $\kappa_\eta < 1,22 \times 10^{-6}$. Dado que κ_η es de orden 1, una corrección η positiva debería estar descartada.

Finalmente, si η fuera nulo, los siguientes términos relevantes serían aquellos asociados a λ . Pero gracias a la conservación de momento angular siempre existirá una helicidad del protón que los cancelaría, sin que estos términos puedan cancelar la reacción. Aún así, resulta claro que una de las helicidades —la misma que en el caso de la producción resonante— incrementa el umbral, mientras la otra no; por lo que en términos globales seguirá existiendo un efecto dependiente de la helicidad¹.

3.4.4. Producción de Pares, $p + \gamma \rightarrow p + e^+ + e^-$

Veamos por último la producción de pares $p + \gamma \rightarrow p + e^+ + e^-$. Esta reacción se da en abundancia en el sector previo al impuesto por el límite GZK del espectro de rayos cósmicos. Al considerar las relaciones de dispersión hasta ahora utilizadas tanto para electrones como protones, se encuentra

$$\begin{aligned} \delta A \frac{m_e}{m_p} E^2 + 2 \left(\delta \eta \frac{m_e^3}{m_p^3} + \frac{3}{4} \eta_p \frac{m_e}{m_p} \right) E^4 \\ + E\omega + |\lambda_e|E + \frac{1}{2}(|\lambda_p| \pm \lambda_p)E \geq m_e(m_p + m_e), \end{aligned} \quad (3.69)$$

en donde se ha usado $m_p + 2m_e \simeq m_p$ para simplificar algunos términos de la expresión. Al igual que con la foto-producción de piones, siempre habrá una helicidad del protón incidente que minimice la desigualdad anterior, por lo que tomaremos $|\lambda_p| \pm \lambda_p \rightarrow 0$. Por

¹Volveremos a este punto en la sección 3.5 “Resultados”.

otro lado, dado que nos interesa estimar órdenes de magnitud para los diversos parámetros, despreciemos al término $\delta\eta$, dada la presencia de η_p que es evidentemente de mayor relevancia (recordemos que estamos considerando que $\mathcal{O}(\eta) = \mathcal{O}(\delta\eta)$). Esto último es equivalente a asumir universalidad en el parámetro η ; tal distinción no es relevante por el momento. Con las consideraciones previas, obtenemos

$$\delta A \frac{m_e}{m_p} E^2 + \frac{3}{2} \eta \frac{m_e}{m_p} E^4 + E\omega + |\lambda_e|E \geq m_e(m_p + m_e). \quad (3.70)$$

Ahora bien, dado que no se observan anomalías en el espectro de rayos cósmicos que nos permitan inferir alguna desviación de la física convencional para energías de hasta $E \sim 3 \times 10^{19}$ eV (donde la producción de pares domina), se infiere que aquellos términos nuevos en la ecuación (3.70) deben ser despreciables en dicho rango energético. Utilicemos como energía de referencia $E_{\text{ref}} = 10^{19}$ eV, e impongamos que sean menores que el término del lado derecho de la desigualdad (3.70). Partamos por δA ; este término debe cumplir

$$|\delta A| \lesssim \frac{m_p}{E_{\text{ref}}^2} (m_e + m_p) = 8,8 \times 10^{-21}. \quad (3.71)$$

Esta cota está en el rango ya mencionado anteriormente [12] y no representa ninguna restricción nueva sobre los parámetros de la teoría. Constatemos que (3.71) nos otorga la siguiente cota para la escala \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} \gtrsim 8,74 \times 10^{-19} \text{ eV}^{-1}. \quad (3.72)$$

El siguiente término a considerar es aquel dependiente de η . Aquí encontramos

$$|\eta| \lesssim \frac{3}{2} \frac{m_p}{E_{\text{ref}}^4} (m_p + m_e) = 1,32 \times 10^{-58} \text{ eV}^{-2}. \quad (3.73)$$

Recordando que $\eta = \kappa_\eta l_p^{-2}$, se encuentra la siguiente cota sobre κ_η :

$$|\kappa_\eta| \lesssim 1,96 \times 10^{-2}. \quad (3.74)$$

Dado que en principio κ_η se asume de orden 1, la cota (3.74) representa una fuerte restricción sobre el término η .

Por último revisemos la cota sobre el término correctivo dependiente de la helicidad. Para éste tenemos

$$|\lambda_e| \lesssim \frac{m_e}{E_{\text{ref}}} (m_p + m_e) = 4,8 \times 10^{-5} \text{ eV}, \quad (3.75)$$

lo que constituye una fuerte cota sobre un término del tipo λ , dada la posibilidad señalada anteriormente mediante la ecuación (3.56). Este resultado nos da para \mathcal{L} la restricción

$$\mathcal{L} \gtrsim 1,31 \times 10^{-12} \text{ eV}^{-1}. \quad (3.76)$$

3.5. Resultados

Hemos visto cómo la introducción de modificaciones provenientes de la gravedad cuántica de lazos puede afectar, y en principio explicar, las anomalías observadas en fenómenos de altas energías tales como los rayos cósmicos. Si bien es cierto que hemos analizado solo un número limitado de reacciones para las condiciones de umbral, los resultados anteriores pueden ser fácilmente extendidos al resto de las reacciones involucradas en la pérdida de energía de los protones. Por ejemplo, el resultado obtenido para el decaimiento resonante $p + \gamma \rightarrow \Delta(1232)$, es también válido para cualquier otra resonancia distinta a $\Delta(1232)$. Igualmente, el resultado obtenido para la foto-producción directa, $p + \gamma \rightarrow p + \pi$, puede ser extendido al caso de la foto-producción múltiple a través de la reacción $p + \gamma \rightarrow p + \rho$ ó $p + \gamma \rightarrow p + \omega$. Aún así, la foto-producción directa y el decaimiento via resonancia $\Delta(1232)$ constituyen los procesos más relevantes para la descripción del límite, lo que le imprime una mayor importancia a los valores encontrada en la sección anterior.

A continuación analizaremos los resultados obtenidos en las secciones anteriores y estableceremos con mayor detalle la fiabilidad que tiene cada uno de los términos correctivos, para poder explicar los fenómenos en cuestión. Mostraremos que de todas las correcciones consideradas, sólo $A = 1 + \alpha$ puede constituir un candidato serio para producir la violación observada del límite, mientras que los otros han de estar fuertemente suprimidos.

3.5.1. Corrección α

En la sección anterior se vio que, de haber un parámetro no universal A (como lo es en la práctica la velocidad de la luz c), entonces éste debe tener una dependencia a lo menos de segundo orden en l_p / \mathcal{L} ($\Upsilon = 0$ en el caso de fotones). Habrán dos configuraciones relevantes y no excluyentes para eliminar el límite GZK; si $A_p < A_\Delta$, entonces se verá prohibida la producción de la resonancia Δ , o más genéricamente, si $A_p < A_R$ (donde R es alguna de las resonancias producidas en la colisión de protones con fotones), entonces la producción de la resonancia R se verá afectada. Esto sin duda creará un relajamiento importante del límite GZK, ya que la producción de estas resonancias constituye la mayor fuente de pérdida de energía para los rayos cósmicos altamente energéticos. Otra alternativa es que se cumpla $A_p < A_\pi$. En este caso la foto-producción se vería afectada a nivel global (a diferencia del caso anterior que afectaría sólo a los canales resonantes). En ambos casos las cotas inferidas (3.65) y (3.50) son similares, y favorecen en conjunto

con (3.40) un valor para \mathcal{L} en el rango

$$4,6 \times 10^{-17} \text{ eV}^{-1} \gtrsim \mathcal{L} \gtrsim 8,3 \times 10^{-18} \text{ eV}^{-1}. \quad (3.77)$$

No olvidemos el resultado (3.72) inferido mediante el análisis de la producción de pares, que está igualmente de acuerdo con esta estimación.

La posibilidad de una violación del límite GZK a través de A necesariamente excluye la existencia de un término del tipo λ en la relación de dispersión para fermiones, ya que significaría la existencia de fermiones teniendo velocidades en la dirección opuesta a la dirección del momento, cuando éste tiene valores de hasta $p = \lambda \simeq \text{KeV}$ (lo que no es observado en la naturaleza). Esta última observación tiene, al mismo tiempo, como consecuencia la desaparición de violación de la paridad (y por lo tanto CPT) en la parte fermiónica de la teoría, al nivel discutido.

3.5.2. Corrección η

En segundo lugar está la posibilidad de una violación de GZK a través del parámetro η . Los cálculos de este capítulo muestran la especial relevancia del signo de η_p en la condición de umbral para la foto-producción; la sola existencia de η_p , sin importar el valor de la diferencia $\delta\eta$ tanto para la foto-producción directa como para la resonante, basta para eliminar el límite GZK. Sin embargo, la presencia añadida de una diferencia $\delta\eta = \eta_p - \eta_\Delta$ distinta de 0, posibilita la existencia de distintas configuraciones para dicha violación. Por ejemplo, teniendo una ruptura del límite a través de η_p , la diferencia $\delta\eta = \eta_p - \eta_\Delta$ podría agudizar o relajar el efecto de la violación mediante el canal más importante, que es la producción de la resonancia $\Delta(1232)$. Por otro lado, la posibilidad de alterar el límite sólo a través del producción resonante (sin modificar la foto-producción) está descartada ya que estamos asumiendo que los parámetros κ_η para protones, Δ 's y piones, son del mismo orden.

Juntando los resultados (3.52), (3.67) y (3.73), se encuentra un rango para κ_η dado por

$$1,96 \times 10^{-2} \gtrsim -\kappa_\eta \gtrsim 1,9 \times 10^{-9}, \quad (3.78)$$

cuando $\kappa_\eta < 0$.

3.5.3. Corrección λ

En tercer lugar, tenemos la ya mencionada posibilidad de una violación dependiente de la helicidad. Para que este efecto tenga lugar, la corrección λ necesitaría por lo menos satisfacer

$$|\lambda_p| \geq |\lambda_\Delta| + 4,7 \times 10^{-4} [\omega/\omega_0] \text{ eV}. \quad (3.79)$$

Sin embargo, el resultado (3.75) proveniente del estudio de la producción de pares se contrapone completamente sobre la posibilidad señalada, por lo que hemos de recoger como restricción general:

$$|\lambda| \lesssim 5 \times 10^{-5} \text{ eV}, \quad (3.80)$$

quedando de esta forma descartada la posibilidad de una violación del límite a través de efectos dependientes de la helicidad.

Otra cota más fuerte puede ser encontrada en [54] donde se analiza una relación de dispersión del tipo

$$E^2 = p^2 + \lambda p + m^2. \quad (3.81)$$

Ellos encuentran que $\lambda \geq 10^{-7} \text{ eV}$, debería estar descartado por las extremadamente sensitivas mediciones hechas sobre el desplazamiento de Lamb. Sin embargo, en el presente esquema, dado que el efecto de Lamb depende primeramente del detalle de las interacciones entre electrones y fotones, estamos obligados a esperar un cuadro completo de las interacciones entregadas por las teorías efectivas de GCL, para poder decir algo acerca de las simetrías envueltas en un efecto de bajas energías como ese. En este sentido, nuestro desarrollo es estrictamente válido para análisis hechos sobre los estados asintóticamente libres de las partículas, donde los efectos de las interacciones son consideradas despreciables, y las consideraciones cinemáticas son válidas.

3.5.4. Corrección θ_γ

Pongamos atención a un resultado complementario, válido para el sector electromagnético. Dado que la diferencia δA entre A_γ y A_e no está afectando la observación del arribo de fotones multi-TeV (lo que es mostrado por los últimos análisis), tenemos la fuerte posibilidad garantizada por (2.66)

$$E_\pm^2 = p^2 [A_\gamma^2 \pm 2\theta_\gamma(l_p p)],$$

de estar en el borde de observar fotones multi-TeV polarizados. En pocas palabras, el universo actual podría ser transparente para un estado de helicidad (mientras que para el otro, no), en el rango de energías un tanto mayor que el TeV. La helicidad específica necesariamente dependerá del signo de θ_γ y por el momento, no hay observaciones que puedan decidir este signo.

Para concluir este capítulo, debe constatar que las cotas encontradas revelan que de todos los términos considerados, el más aceptable corresponde a aquel que proviene de la corrección A . Por lo mismo, será el caso que analizaremos en mayor detalle a la hora de estudiar el espectro de rayos cósmicos.

3.5.5. Relación de Dispersión $f(E) \propto E^3$

Vale la pena poner atención sobre la relación de dispersión del tipo

$$E^2 = p^2 + m^2 + \xi E^3, \quad (3.82)$$

(con ξ una escala por ahora arbitraria) debido a su reiterada aparición en múltiples trabajos [13, 47, 16]. Veremos que fuertes cotas pueden ser impuestas sobre la desviación $f(E) = \xi E^3$, al punto de quedar completamente descartada como posibilidad de explicar el fenómeno de rayos cósmicos, mediante escalas razonables. Supondremos durante esta sección que ξ es un parámetro universal (asunto compartido por la mayoría de los trabajos en la materia).

La condición de umbral para que ocurra la foto-producción de piones es

$$4\omega E + 2\xi \frac{m_\pi m_p}{(m_p + m_\pi)^2} E^3 \geq m_\pi (2m_p + m_\pi). \quad (3.83)$$

Claramente, cuando ξ es positivo, el umbral puede ser fuertemente relajado. Como en la práctica esto no ocurre con energías de hasta $E_{\text{ref}} \sim 10^{20}$ eV, debemos demandar que el nuevo término en (3.83) sea a lo menos menor que el lado derecho en dicha ecuación. Haciendo lo señalado obtenemos

$$\xi < \frac{(2m_p + m_\pi)(m_p + m_\pi)^2}{2m_p E_{\text{ref}}^3} = 1,23 \times 10^{-42} \text{ eV}^{-1}. \quad (3.84)$$

Por lo que una escala de longitud ξ positiva queda fuertemente suprimida. Por comparación, la cota anterior puede ser reescrita en la forma

$$\xi < 1,5 \times 10^{-14} l_p, \quad (3.85)$$

lo que evidencia lo absurdamente pequeña que esta escala tendría que ser, de existir.

En caso contrario, de ser ξ negativo, se puede apreciar en (3.83) que el umbral para la foto-producción puede ser fácilmente desplazado, impidiendo que la reacción ocurra a energías “normales”. La condición para que éste sea el caso es

$$-\xi > \frac{128}{27} \frac{\omega^3}{m_\pi^3 m_p} \left(\frac{m_p + m_\pi}{2m_p + m_\pi} \right)^2 = 7,75 \times 10^{-45} \left[\frac{\omega}{\omega_0} \right]^3 \text{ eV}^{-1}. \quad (3.86)$$

Esta es la razón por la cual muchos autores han reclamado el privilegio de haber solucionado la paradoja GZK de los rayos cósmicos altamente energéticos, mediante (3.82). En particular, Amelino-Camelia *et al.* [13] tiene como parámetro la cantidad $\xi = -l_p$, lo que claramente basta para violar el límite.

Notemos, sin embargo, que la producción de pares $p + \gamma \rightarrow p + e^+ + e^-$ impone fuertes restricciones sobre un parámetro ξ negativo. Veamos este aspecto; siguiendo los métodos empleados hasta este momento, es posible encontrar que la condición de umbral para la producción de pares es

$$\omega E + \xi \frac{m_e m_p}{(m_p + 2m_e)^2} E^3 \geq m_e (m_p + m_e). \quad (3.87)$$

Dado que no hay modificaciones en la descripción de la producción de pares en el espectro de rayos cósmicos, para energías de hasta $E \sim 3 \times 10^{19}$ eV, debemos imponer que a lo menos se cumpla la desigualdad (independiente del signo de ξ):

$$\begin{aligned} |\xi| < \frac{(m_p + m_e)(m_p + 2m_e)^2}{m_p E_{\text{ref}}^3} &= 3,26 \times 10^{-41} \text{ eV}^{-1}, \\ &= 3,98 \times 10^{-13} l_p, \end{aligned} \quad (3.88)$$

donde $E_{\text{ref}} = 3 \times 10^{19}$ eV. Este último resultado muestra lo fuertemente suprimido que debe estar una corrección del tipo ξ , sin existir —bajo nuestro conocimiento— ninguna escala física razonable que figure en el rango acotado. Más aún, (3.88) nos dice que el caso $|\xi| = l_p$ debiera estar por completo descartado.

Añadamos por último que en el caso (2.67) motivado por los trabajos de Ellis *et al.* [47, 48], la desigualdad (3.88) equivale a $M_D > 6,14 \times 10^{40}$ eV.

Capítulo 4

Modificaciones Sobre el Espectro

En este capítulo mostraremos cómo la única corrección de GCL sobreviviente de nuestros análisis realizados en el capítulo anterior, $A = 1 + \alpha$, puede afectar al espectro teórico de rayos cósmicos. Nuestro enfoque estará centrado en la suposición de que las correcciones de GCL a las cantidades de mayor relevancia para nuestro cálculo —como lo son las secciones eficaces e inelasticidades de los procesos— son en primera instancia correcciones de tipo cinemáticas. En otras palabras, si bien es posible que las correcciones de GCL introduzcan nuevos vértices y nuevas reglas de selección debido a las nuevas simetrías de la teoría, nos restringiremos a analizar las modificaciones al nivel dinámico sólo a través de las modificaciones cinemáticas bien comprendidas. Esto nos permitirá introducir las correcciones adecuadas conociendo únicamente las modificaciones a las relaciones de dispersión.

Como preámbulo de los próximos desarrollos, notemos que las secciones eficaces empleadas en el cálculo de la pérdida de energía de los distintos procesos relevantes en la propagación de los rayos cósmicos (y en general cualquier sección eficaz), son sólo válidas para la descripción de interacciones entre partículas con 4-momentos tipo tiempo. Una afirmación como ésta, tan evidente a la luz de una teoría de campo convencional, será importante para la extensión que intentaremos formular más adelante, en el contexto de las modificaciones de GCL. Por ahora agregaremos que dada esta característica recién mencionada, en lo sucesivo, nos limitaremos a considerar sólo aquellos estados de partículas con 4-momentos tipo tiempo. En términos de las correcciones y de las interpretaciones realizadas durante el Capítulo 3, “Modificaciones Cinemáticas”, lo anterior significa que nos restringiremos a partículas con $s_a > 0$, lo que a su vez nos obliga a descartar las correcciones $f_a(p)$, tales que $f_a(p) < 0$. Este último criterio nos dejará únicamente con la

posibilidad $A = 1 + \alpha$ con $\alpha > 0$. Los motivos de esta restricción quedarán más claros cuando establezcamos la forma precisa en que plantearemos las modificaciones sobre el sector dinámico de la teoría (Sección 4.1.3).

Dicho lo anterior, notemos que una sección eficaz es en general un escalar bajo transformaciones de Lorentz, que puede ser expresada como una función de la variable $s = E_{\text{tot}}^{*2}$ (que es también un escalar), así como de las masas de las distintas partículas involucradas. Es decir, es posible escribir

$$\sigma = \sigma(s, m_{\text{particulas}}). \quad (4.1)$$

La principal idea de la próxima sección será que es posible alterar σ , a través de las modificaciones producidas sobre el invariante s y las masas de las partículas. Con este antecedente, nuestro trabajo se reducirá a entender como reexpresar s y a establecer la cinemática involucrada en σ como función de la energía. Es necesario enfatizar que todo los argumentos que presentaremos serán sólo de carácter plausible; un tratamiento concluyente requeriría del estudio detallado de cada reacción involucrada en la pérdida de energía de los protones altamente energéticos, junto con sus secciones eficaces e inelasticidades. Dicho tratamiento está fuera del alcance de este trabajo y, a nuestro juicio, también se presentaría con problemas ya que gran parte de los datos utilizados en el Capítulo 1 son de tipo fenomenológico.

También es necesario decir algo en torno a los parámetros astrofísicos del modelo para el espectro de rayos cósmicos, i.e. γ_g , m , \mathcal{L}_0 y E_c . Puesto que nos interesa dar una descripción unificada del fenómeno de los RCAE, supondremos que el espectro de producción tiene el mismo comportamiento para toda energía $E > 4 \times 10^{18}$ eV. En otras palabras, tomaremos $\gamma_g = 2,7$, $m = 0$ y $\mathcal{L}_0 = 4,7 \times 10^{51}$, para todo el sector altamente energético del espectro. Ciertamente, cualquier elección distinta habría sido poco natural. En cuanto a la energía de corte E_c , analizaremos distintas posibilidades según sea conveniente.

4.1. Algo Más de Cinemática

Ya hemos delineado la estructura general de la cinemática modificada en el Capítulo 3. Veamos ahora algunos resultados adicionales que serán de gran utilidad para las modificaciones en el sector dinámico de la teoría. En particular, estableceremos el principio con el

cual realizaremos las modificaciones sobre las secciones eficaces utilizadas en el Capítulo 1 para el cálculo del espectro.

4.1.1. Sistemas de Varias Partículas

Los resultados desarrollados para la cinemática de una partícula pueden ser fácilmente generalizados al caso de varias partículas. Por ejemplo, el 4-momento total de un sistema de varias partículas $p_{\text{tot}}^\mu = \sum_i p_i^\mu$ transformará mediante la regla (3.1), y el producto escalar $(p^\mu p_\mu)_{\text{tot}}$ será un invariante bajo transformaciones de Lorentz (así como cualquier otro producto). Al igual que en el caso de partículas individuales, definiremos \sqrt{s} como la energía total en reposo medida en el sistema de centro de masas. Es decir:

$$s = E_{\text{tot}}^2 - p_{\text{tot}}^2. \quad (4.2)$$

En el caso en que contemos con un sistema compuesto por un protón (que corresponde al rayo cósmico) con energía y momento E y p , y un fotón (del FRC) con los respectivos ω y k (todas estas cantidades medidas en el sistema isotrópico de laboratorio \mathcal{K}), la cantidad s adquirirá la forma

$$\begin{aligned} s &= (E + \omega)^2 - (\vec{p} + \vec{k})^2 \\ &= (E' + \omega')^2 - (\vec{p}' + \vec{k}')^2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde las cantidades con primas corresponden a cualquier otro sistema de referencia. En particular estamos interesados en el sistema en que el momento del protón \vec{p}' es nulo; esto es, el sistema en donde $E' = \sqrt{s_p}$. Sea ϵ la energía del fotón en dicho sistema, tendremos entonces

$$\begin{aligned} s &= (\sqrt{s_p} + \epsilon)^2 - \epsilon^2 \\ &= 2\sqrt{s_p} \epsilon + s_p, \end{aligned} \quad (4.4)$$

en donde hemos usado la relación de dispersión $\omega = k$ (o $\epsilon = k'$) para los fotones del FRC.

Estos resultados nos permitirán expresar las principales cantidades cinemáticas en términos de ϵ y $s_p = f_p(E) + m_p^2$. Por ejemplo, el factor de Lorentz que conecta al sistema \mathcal{K} con el sistema \mathcal{K}' en donde $p' = 0$, será

$$\gamma = \frac{E}{\sqrt{s_p}}. \quad (4.5)$$

Mientras que el factor de Lorentz conectando a \mathcal{K} con el sistema de centro de masas (aquel donde $\vec{p}' + \vec{k} = 0$), será

$$\begin{aligned}\gamma_c &= \frac{E + \omega}{s_p + 2\sqrt{s_p} \epsilon} \\ &\simeq \frac{E}{s_p + 2\sqrt{s_p} \epsilon}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

4.1.2. Inelasticidad Modificada: $p + \gamma \rightarrow p + x$

Siguiendo el mismo esquema del Capítulo 1, veamos cómo obtener la inelasticidad K en su versión modificada para procesos del tipo $p + \gamma \rightarrow p + x$, donde x puede ser un mesón π , ρ u ω (el caso de la inelasticidad K_e para la producción de pares será visto más tarde). Partamos notando que la relación de dispersión para el protón emergente puede ser escrita de la forma:

$$E_p^2 - p_p^2 = f_p(E_p) + m_p^2, \quad (4.7)$$

donde E_p es la energía final del protón. Dado que el lado izquierdo de (4.7) es un invariante bajo transformaciones de Lorentz, podemos escribir

$$(E_p^*)^2 - (p_p^*)^2 = f_p(E_p) + m_p^2, \quad (4.8)$$

en donde los asteriscos denotan las cantidades en el sistema de centro de masas. Por otro lado, en dicho sistema se tendrán las siguientes relaciones de conservación de energía y momento:

$$E_p^* + E_x^* = \sqrt{s} \quad (4.9)$$

y

$$(p_p^*)^2 = (p_x^*)^2. \quad (4.10)$$

Substituyendo ambas cantidades en la relación (4.7), podemos obtener

$$2\sqrt{s}E_p^* = s + f_p(E_p) - f_x(E_x) + m_p^2 - m_x^2. \quad (4.11)$$

Así mismo, también contamos con la relación de conservación de energía en el sistema de laboratorio:

$$E_p + E_x = E_{\text{tot}}. \quad (4.12)$$

Valiéndonos de la definición para la inelasticidad del proceso dada por $K_x = \Delta E/E$, donde $\Delta E = E_i - E_f \simeq E_{\text{tot}} - E_f$, es posible reescribir (4.12) en términos de K_x mediante las expresiones

$$E_x = K_x E, \quad (4.13)$$

$$E_p = (1 - K_x)E, \quad (4.14)$$

donde E es la energía inicial del protón incidente. Con esto, la ecuación (4.11) adquiere la forma:

$$2\sqrt{s}E_p^* = s + f_p[(1 - K_x)E] - f_x[K_x E] + m_p^2 - m_x^2. \quad (4.15)$$

Para simplificar el desarrollo, escribamos la relación anterior como $E_p^* = F(E, K_x)$, donde F es definida a través de

$$F(E, K_x) = \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + f_p[(1 - K_x)E] - f_x[K_x E] + m_p^2 - m_x^2). \quad (4.16)$$

Por otro lado, las reglas de transformación de Lorentz nos dan la relación entre las energías del protón en el sistema de laboratorio y el sistema de c.m. respectivamente. Esta relación es:

$$\begin{aligned} E_p &= \gamma_c(E_p^* + \beta_c p_p^* \cos \theta) \\ &= \gamma_c \left(E_p^* + \beta_c \sqrt{E_p^{*2} - f_p(E_p) - m_p^2} \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Juntando (4.16) y (4.17), es posible encontrar la ecuación general para K_x :

$$\begin{aligned} (1 - K_x)\sqrt{s} &= \left(F(E, K_x) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{F^2(E, K_x) - f_p[(1 - K_x)E] - m_p^2} \cos \theta \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

No olvidemos, sin embargo, que la solución para K_x a partir de (4.18), dependerá del ángulo θ . Por dicho motivo, una vez resuelta esta última ecuación, resulta conveniente definir a la inelasticidad total K como el promedio de K_x sobre el ángulo θ . Es decir

$$K = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi K_x d\theta, \quad (4.19)$$

lo que nos entrega la cantidad buscada.

4.1.3. Prescripción $m_a^2 \rightarrow s_a = f_a(E) + m_a^2$

Recordemos nuestra interpretación hecha en el Capítulo 3, “Modificaciones Cinemáticas”, relativa al hecho de que $s_a^{1/2} = (f_a(E_a) + m_a^2)^{1/2}$ puede ser entendida como la energía en reposo al cuadrado de la partícula a , como función de la energía E_a que ésta posea en el sistema de laboratorio \mathcal{K} . Como ya hemos recalado, una interpretación como ésta será sólo válida para partículas con 4-momentos tipo tiempo.

En las reacciones llevadas a cabo por los protones altamente energéticos con los fotones del FRC (ver Capítulo 1), el escenario consiste en la colisión de dos partículas, p y γ , y la subsecuente producción de cierto número de partículas finales. Supongamos que a es una de estas partículas pertenecientes al estado final. El conocimiento de la inelasticidad K de la reacción nos permitirá, en principio, estimar la energía promedio $\langle E_a \rangle$ con que dicha partícula emerge (pues K determina la fracción promedio de energía con la que dicha partícula es producida). Es decir, en promedio, la energía en reposo de la partícula final a será $s_a^{1/2} = [f_a(\langle E_a \rangle) + m_a^2]^{1/2}$. Más aún, el conocimiento de la inelasticidad K nos permitirá expresar a s_a como una función de la energía E del protón inicial:

$$s_a = s_a(E), \quad (4.20)$$

A la luz de nuestra interpretación previa, podemos pensar al proceso recién descrito como una reacción entre un protón con masa s_p , que pierde energía emitiendo partículas a con masas s_a calculadas en la forma anterior. Este razonamiento idealizado nos brinda una prescripción clara para modificar cinemáticamente aquellas cantidades dinámicas con las cuales debemos trabajar y donde se registre la conservación de energía. Esta prescripción será:

$$m_a^2 \rightarrow s_a(E) = f_a(E) + m_a^2, \quad (4.21)$$

en donde hemos expresado a la corrección f_a como una función de la energía inicial del protón incidente.

La prescripción (4.21) no hace más que establecer la noción de una masa efectiva dependiente del contenido energético inicial de una reacción. En consecuencia, dado el conocimiento explícito de la dependencia en las masas de las partículas, que una sección eficaz del tipo (4.1) ha de tener para obtener una versión modificada de ésta bastará con emplear la prescripción discutida.

Notemos, sin embargo, que un problema importante del presente método residirá en la capacidad de discernir si m_p —en cualquier cantidad a examinar— proviene del estado inicial del protón (con una energía inicial E) o del estado final (con una energía final $E_p = (1 - K)E$), ya que dicha distinción dará origen a distintos valores para s_p . Para resolver este punto, y así eliminar cualquier ambigüedad de la prescripción, fijemos en nuestro favor $\alpha_p = 0$ para la corrección A_p de los protones.

Este último asunto no debería presentar mayores problemas pues, como hemos visto en el Capítulo 3, una corrección del tipo $A = 1 + \alpha$ se manifiesta primeramente a través de las diferencias entre α 's de distintas partículas. En otras palabras, nuestro estudio registrará los efectos de la desviación de α de las partículas involucradas en los procesos astrofísicos que nos conciernen, con respecto al valor para los protones.

4.2. Secciones Eficaces Modificadas

Analícemos ahora cómo se aplica la prescripción recién señalada en las distintas reacciones encontradas en la pérdida de energía de los protones altamente energéticos. Comencemos con el estudio de la foto-producción, para luego continuar con el caso de la creación de pares.

4.2.1. Foto-Producción de Piones $p + \gamma \rightarrow p + \pi$

Recordemos que para la foto-producción de piones tenemos básicamente dos tipos de canales; el canal resonante, en donde la reacción es del tipo $p + \gamma \rightarrow R$, con R una resonancia Δ o N (y que luego tendrá un decaimiento $R \rightarrow p + \pi$); y el canal directo $p + \gamma \rightarrow p + x$ en donde x puede ser un bosón π , ρ u ω . En ambos casos la inelasticidad modificada corresponderá a la ya encontrada (4.19), en donde x será π , ρ u ω , según sea el caso.

Resonancias

La sección eficaz de Breit-Wigner para resonancias viene dada por

$$\sigma_{\text{bw}}(s) = \frac{s^2}{(s - m_N^2)} \frac{\sigma_0 \Gamma_R^2}{(s - m_R^2)^2 + s \Gamma_R^2}. \quad (4.22)$$

Utilizando la prescripción desarrollada anteriormente, la versión modificada para la sección eficaz de Breit-Wigner será

$$\sigma_{\text{bw}}(s) = \frac{s^2}{(s - m_N^2)} \frac{\sigma_0 \Gamma_R^2}{(s - s_R)^2 + s \Gamma_R^2}, \quad (4.23)$$

donde s_R es la energía en reposo de la resonancia R , calculada a partir de la forma explícita de las correcciones y de la ley de conservación de energía-momento. Por ejemplo, si la energía inicial de un protón altamente energético en el sistema de laboratorio es E , entonces s_R vendrá dado por

$$s_R = f_R(E_R) + m_R^2, \quad (4.24)$$

con $E_R = E_{\text{tot}} \approx E$. De este modo, cuando $s - s_R = 0$ (es decir cuando E_R cae dentro de la capa de masa de R), se estará satisfaciendo la condición

$$E_R^2 = p_R^2 + f_R(E_R) + m_R^2, \quad (4.25)$$

que no es más que la relación de dispersión para la resonancia R), y la producción de la resonancia estará en su máxima amplitud. Con estas modificaciones, se tendrá como resultado una sección eficaz σ_{bw} como función de s y E .

Producción Directa

Siguiendo el mismo espíritu de las modificaciones realizadas en el sector resonante, es posible modificar la sección eficaz para la producción directa. Recordemos que para este caso se usó la siguiente expresión

$$\sigma_{\text{dir}} \propto (s - s_{\text{th}})^{A-n} (s - m_p^2)^{-A}, \quad (4.26)$$

donde $s_{\text{th}} = (m_p + m_\pi)^2$ para el canal $N\pi$ (o $s_{\text{th}} = (m_\Delta + m_\pi)^2$ para el canal $\Delta\pi$). Luego, para modificar la expresión bastará hacer el reemplazo $m_\pi^2 \rightarrow f_\pi(E_\pi) + m_\pi^2$ en s_{th} , en donde $E_\pi = KE$ es la energía final del pión emergente, como función de E .

Multi-producción de Piones

Recordemos que para la multi-producción de piones se usaron las secciones eficaces para los procesos $p + \gamma \rightarrow p + \rho$ y $p + \gamma \rightarrow p + \omega$ mediante una combinación de intercambio de pomerones y regeones. Dado que no estamos considerando correcciones para la masa de

los protones, las cantidades (1.51) y (1.52) para σ_{reg} y σ_{pom} no se verán modificadas. Sin embargo, la expresión total para σ_ρ (o equivalentemente σ_ω) será

$$\sigma_\rho = \left[1 - \exp\left(-\frac{s - s_{\text{th}}}{0,69}\right) \right] (\sigma_{\text{reg}} + \sigma_{\text{pom}}) \quad (4.27)$$

donde aquí, al igual que en el sector directo previamente tratado, $s_{\text{th}} = (m_p + \sqrt{s_\rho})^2$ con s_ρ función de la energía E del protón inicial. El caso con ω puede ser tratado análogamente.

4.2.2. Producción de Pares $p + \gamma \rightarrow p + e^+ + e^-$

Ya hemos dicho que nuestro método consiste en definir una masa efectiva mediante el conocimiento previo de la energía promedio que una partícula final adquirirá. En el caso de la producción de pares, la dificultad del tratamiento se incrementa debido al número de partículas producidas simultáneamente en el estado final. La energía final promedio de un electrón (o positrón) del par será

$$E_e = \frac{1}{2} K_{e\text{mod}} E, \quad (4.28)$$

donde $K_{e\text{mod}}$ es la inelasticidad de la reacción en su versión modificada (que aún no conocemos), y E la energía inicial del protón. De esta forma, la masa efectiva al cuadrado del electrón (o positrón) emergente será

$$s_e(E) = f_e(K_{e\text{mod}} E/2) + m_e^2. \quad (4.29)$$

Esta será la cantidad a utilizar en nuestra prescripción.

En las expresiones usadas durante la Sección 1.6 del Capítulo 1 para el análisis de la creación de pares, se utilizó como variable la cantidad $k = \epsilon/m_e$. En conjunto con nuestra prescripción, la nueva variable a usar será

$$k = \frac{\epsilon}{\sqrt{s_e}}. \quad (4.30)$$

Inelasticidad Modificada

Estamos interesados en desarrollar una ecuación para la inelasticidad modificada $K_{e\text{mod}}$ para la creación de pares. Para ello ya contamos con una versión no modificada K_e y que viene dada por las ecuaciones (1.58) y (1.59) de la Sección 1.6 del Capítulo 1. Notemos

que K_e puede ser expresada como una función de la variable $k = \epsilon/m_e$ y la masa m_e del electrón:

$$K_e = K_e(k, m_e). \quad (4.31)$$

Luego, utilizando la prescripción $m_e^2 \rightarrow s_e$ en conjunto con la ecuación (4.30), podemos establecer la ecuación autoconsistente

$$K_{e\text{mod}}(\epsilon, E) = K_e\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{s_e}}, \sqrt{s_e}\right), \quad (4.32)$$

donde $\sqrt{s_e}$ viene dado por (4.29). Al resolver esta ecuación es posible obtener a $K_{e, \text{mod}}$ como función de ϵ , E y las masas de las partículas. Tal solución será la inelasticidad modificada buscada.

Sección Eficaz Modificada

El cálculo de la sección eficaz σ_e para la creación de pares no difiere del método que ya hemos empleado para el resto de las secciones eficaces. Es decir, dada la función $\sigma_e(k, m_e)$ a través de las expresiones (1.56) y (1.57), la versión modificada será simplemente

$$\sigma_{e\text{mod}}(\epsilon, E) = \sigma_e\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{s_e(E)}}, \sqrt{s_e(E)}\right), \quad (4.33)$$

donde $s_e(E)$ es introducido con la ayuda de $K_{e, \text{mod}}$ previamente encontrado.

4.3. Corrimiento al Rojo

Un último factor a considerar antes de introducir las modificaciones anteriores al cálculo del espectro, es la posibilidad de que la relación usual de corrimiento al rojo $p \sim R(t)^{-1}$, sufra alguna modificación relevante. Esto es importante pues, dado los grandes tiempos de viaje que pueden tener los rayos cósmicos en el universo, las nuevas correcciones podrían en principio presentarse con efectos acumulativos notorios. Para responder esta pregunta sobre una base general, nos concentraremos en el principio de mínima acción. Encontraremos que demandando un Lagrangiano “generalizado”, isotrópico y homogéneo en el sistema de referencia co-móvil, necesariamente emerge la relación usual de corrimiento al rojo.

4.3.1. Principio de Mínima Acción

La expresión más general para la acción de una partícula puntual arbitraria en un espacio-tiempo dado, que viaja desde el punto a hasta el punto b es

$$S = \int_a^b \Lambda d\tau, \quad (4.34)$$

con $d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$. En la expresión (4.34), Λ es el Lagrangiano generalizado y τ el tiempo propio de la partícula y que será utilizado para parametrizar su trayectoria. Como es usual, asumiremos que el Lagrangiano es una función de las coordenadas espacio-temporales x^μ y de las velocidades u^μ , que han de ser tomados como independientes entre sí. Una cuidadosa variación de estas cantidades debe considerar las restricciones correctas entre ellas. Por ejemplo, variando a las coordenadas espacio-temporales x^μ en la forma $x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu$, la variación de las velocidades tendrá que cumplir $(\delta u^\mu)d\tau = d(\delta x^\mu) - u^\mu d(\delta\tau)$, en donde $\delta\tau$ también ha de ser expresado en términos de δx^μ . Con estas consideraciones en mente, la expresión completa para la variación de la acción será

$$\begin{aligned} \delta S = & \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial u^\mu} + \Delta u_\mu \right] \delta x^\mu \Big|_a^b \\ & + \int_a^b \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu} + \Delta \Gamma_{\mu\nu}^\eta u_\eta u^\nu - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial u^\mu} + \Delta u_\mu \right) \right] d\tau \delta x^\mu \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde $\Delta \equiv (\partial \Lambda / \partial u^\sigma) u^\sigma - \Lambda$, y $\Gamma_{\mu\nu}^\eta$ son las usuales conexiones libres de torsión dadas por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\eta = \frac{1}{2} g^{\eta\sigma} \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \right]. \quad (4.36)$$

De la expresión (4.35) es fácil obtener las ecuaciones de movimiento para un Lagrangiano arbitrario dado Λ . Estas son

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial u^\mu} = u^\nu \nabla_\nu (u_\mu \Delta), \quad (4.37)$$

donde ∇_μ es la derivada covariante. Para nuestros propósitos, es mejor trabajar con la expresión explícita para el momento p^μ . Con esto en mente, definimos a p^μ a través de la siguiente relación

$$p_\mu \equiv \frac{\delta S}{\delta x^\mu} \Big|_b = \frac{\partial \Lambda}{\partial u^\mu} + \Delta u_\mu. \quad (4.38)$$

Esta definición está por supuesto de acuerdo con el enfoque canónico usual. Ahora estamos en condiciones de escribir las ecuaciones de movimiento en una forma más conveniente

$$dp_\mu = \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu} + \Delta \Gamma_{\mu\nu}^\eta u_\eta u^\nu \right] d\tau \quad (4.39)$$

4.3.2. Espacios de FRW

Estamos interesados en obtener una expresión para la relación de corrimiento al rojo teniendo como punto de partida la acción Λ . Para esto consideraremos la métrica de FRW (ver Apéndice A):

$$g_{\mu\nu} = \text{Diag} \left(-1, \frac{R^2(t)}{1 - kr^2}, R^2(t)r^2, R^2(t)r^2 \sin^2 \theta \right),$$

donde $R(t)$ es el factor de escala, y k es la curvatura de la sección espacial tridimensional. Para este tipo de espacio las conexiones no nulas son

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}) \quad (4.40)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{\dot{R}}{R} g_{ij} \quad (4.41)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{R}}{R} \delta_j^i. \quad (4.42)$$

Comencemos calculando la variación temporal de $p^2 = g^{ij} p_i p_j$. Esta puede ser escrita en la forma:

$$\frac{d}{dt} p^2 = \left(\frac{d}{dt} g^{ij} \right) p_i p_j + 2g^{ij} p_i \frac{dp_j}{dt}. \quad (4.43)$$

En la última expresión, dp_j está dada por las ecuaciones dinámicas (4.39) encontradas anteriormente. La variación de la métrica es

$$\frac{d}{dt} g^{ij} = -g^{il} g^{jm} \left[\frac{\partial g_{lm}}{\partial t} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt} \right]. \quad (4.44)$$

Notemos que la dependencia explícita de g_{ij} del tiempo es a través de $R(t)$, por lo tanto

$$\frac{\partial g_{lm}}{\partial t} = 2 \frac{\dot{R}}{R} g_{lm}. \quad (4.45)$$

De esta forma, podemos reescribir la expresión (4.43) para p^2 como

$$\frac{d}{dt} p^2 + 2 \frac{\dot{R}}{R} g^{ij} p_i p_j = -g^{il} g^{im} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} p_i p_j \frac{dx^k}{dt} + 2g^{ij} p_i \frac{dp_j}{dt}, \quad (4.46)$$

o mejor aún,

$$\left(\frac{d\tau}{dt} \right)^{-1} \frac{1}{R^2} \frac{d}{dt} (p^2 R^2) = -g^{il} g^{im} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} p_i p_j \frac{dx^k}{d\tau} + 2g^{ij} p_i \frac{dp_j}{d\tau}. \quad (4.47)$$

Así, para obtener la ecuación de corrimiento al rojo debemos calcular el lado derecho de la última ecuación. Trabajando esta expresión con la ayuda de (4.38) y (4.39), es posible encontrar la sencilla ecuación

$$\frac{d}{dt}(p^2 R^2) = 2R^2 \frac{d\tau}{dt} g^{ij} p_i \Omega_j, \quad (4.48)$$

donde hemos definido Ω_m como

$$\Omega_m = \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x^m} - u^k \Gamma_{km}^i \frac{\partial \Lambda}{\partial u^i} \right). \quad (4.49)$$

Como último paso de la discusión, resulta sencillo demostrar que para un Lagrangiano isotrópico (esto es Λ tal que $\Lambda = \Lambda(u^2, t)$) en el igualmente isotrópico sistema de referencia co-móvil, se debe tener

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^m} = u^k \Gamma_{km}^i \frac{\partial \Lambda}{\partial u^i}. \quad (4.50)$$

Es decir $\Omega_i = 0$. Por lo tanto, la relación de corrimiento al rojo usual es obtenida. Como consecuencia, sin importar la relación de dispersión con la cual se cuente, la pérdida de energía debida a la atenuación producida por el corrimiento debe ser de la forma $p \sim R(t)^{-1}$.

4.3.3. Formalismo Hamiltoniano

Por completitud, mostraremos cómo puede ser obtenida la relación de corrimiento al rojo usual mediante el formalismo hamiltoniano. Esto nos permitirá obtener una visión clara en torno a la relación misma, ya que ésta surgirá a partir de la forma explícita otorgada por las relaciones de dispersiones modificadas.

Comencemos verificando la siguiente expresión

$$u^\mu dp_\mu \stackrel{\circ}{=} \frac{dp_\mu}{d\tau} dx^\mu,$$

a través de las ecuaciones de movimiento. Contrayendo la ecuación (4.38) por u^μ obtenemos

$$u^\mu p_\mu = \Lambda, \quad (4.51)$$

donde se usó $u^\mu u_\mu = -1$, y el hecho de que $\Delta = (\partial \Lambda / \partial u^\mu) u^\mu - \Lambda$. Si diferenciamos la cantidad anterior, obtenemos

$$u^\mu dp_\mu = -p_\mu du^\mu + d\Lambda. \quad (4.52)$$

Es necesario mantener en mente que tanto dp_μ como du_μ no son independientes. Sustituyendo la expresión para p_μ en (4.52), se tiene

$$u^\mu dp_\mu = -\frac{\partial\Lambda}{\partial u^\mu} du^\mu - \Delta g_{\mu\nu} u^\mu du^\nu + d\Lambda. \quad (4.53)$$

Sin embargo, notemos que

$$d\Lambda = \frac{\partial\Lambda}{\partial x^\mu} dx^\mu + \frac{\partial\Lambda}{\partial u^\mu} du^\mu.$$

Esto cancela al primer término de (4.53), dando

$$u^\mu dp_\mu = \frac{\partial\Lambda}{\partial x^\mu} dx^\mu - \Delta g_{\mu\nu} u^\mu du^\nu. \quad (4.54)$$

Ahora podemos usar la ecuación dinámica (4.39) para reemplazar $\partial\Lambda/\partial x^\mu$,

$$\begin{aligned} u^\mu dp_\mu &= \frac{dp_\mu}{d\tau} dx^\mu - \frac{1}{2} \Delta \frac{\partial g_{\eta\nu}}{\partial x^\mu} u^\eta u^\nu dx^\mu - \Delta g_{\mu\nu} u^\mu du^\nu \\ &= \frac{dp_\mu}{d\tau} dx^\mu - \frac{1}{2} \Delta d[g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu] \\ &= \frac{dp_\mu}{d\tau} dx^\mu. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Este resultado nos permitirá desarrollar el formalismo Hamiltoniano. Si escribimos (4.55) de la forma

$$-u^0 dp_0 = \frac{dx^i}{d\tau} dp_i - \frac{dp^i}{d\tau} dx^i - \frac{dp_0}{d\tau} dx^0 \quad (4.56)$$

y definimos $H \equiv -p_0$, entonces obtenemos

$$u^0 dH = \frac{dx^i}{d\tau} dp_i - \frac{dp^i}{d\tau} dx^i + \frac{dH}{d\tau} dx^0. \quad (4.57)$$

Obteniendo de esta forma la versión generalizada de las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{dx^i}{d\tau} = u^0 \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (4.58)$$

$$\frac{dp_i}{d\tau} = -u^0 \frac{\partial H}{\partial x^i}. \quad (4.59)$$

Enfaticemos que este tratamiento es absolutamente independiente de la elección de la coordenada x^0 . En este sentido, H es el generador de movimiento en la dirección x^0 o, más general, p_μ es el generador de movimiento en la dirección x^μ . En particular, si x^0 puede ser reconocida como la coordenada de tiempo t , obtenemos

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (4.60)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad (4.61)$$

que son la versión más común de las ecuaciones de Hamilton.

Veamos ahora el cálculo del corrimiento al rojo. Al igual que en el caso anterior, estamos interesados en la variación temporal de $p^2 = g^{ij}p_i p_j$ en un espacio-tiempo de F-R-W. Esto puede ser desarrollado de forma muy simple:

$$\frac{dp^2}{dt} = \frac{d}{dt}g^{ij}p_i p_j = \frac{\partial p^2}{\partial t} + \frac{\partial p^2}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial p^2}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt}. \quad (4.62)$$

Recordando que la dependencia explícita del tiempo de p^2 es a través de $R(t)$ en g^{ij} , encontramos que

$$\frac{\partial p^2}{\partial t} = -2\frac{\dot{R}}{R}p^2. \quad (4.63)$$

Luego, podemos escribir

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dt}(p^2 R^2) = \{H, p^2\} \quad (4.64)$$

donde $\{ , \}$ es el corchete de Poisson con la definición usual:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \quad (4.65)$$

Como consecuencia directa de la expresión anterior, si $H = H(p)$ con $p = \sqrt{g^{ij}p_i p_j}$, entonces podemos reobtener la relación de dispersión usual ($pR = \text{const}$).

4.4. Resultados

Ya estamos en condiciones de mostrar los efectos de las modificaciones sobre el espectro de rayos cósmicos. Debido a la gran cantidad de parámetros correctivos posibles en el tipo de teoría que estamos analizando (en principio un valor distinto de α por cada partícula), establezcamos alguna convención al respecto. Dado que los efectos primarios de las modificaciones que consideramos se manifiestan a través de las diferencias de las correcciones α 's, utilicemos un sólo valor α_R para todas las resonancias, otro valor α_b para todos los bosones, y otro α_e para el par electrón-positrón involucrados en las reacciones (no olvidemos que estamos utilizando $\alpha_p = 0$). Tal asunto tiene la ventaja de darnos un valor universal α dependiendo del tipo de partículas (lo que es razonable), y no debiera ser muy relevante con respecto a escenarios más elaborados puesto que las reacciones presentes son insensibles a las diferencias de α entre pares de partículas que no contemplan al protón.

A continuación presentaremos, de manera sucesiva, los espectros de rayos cósmicos obtenidos para las distintas correcciones α_R , α_b y α_e respectivamente. Constatamos así la forma en que se manifiestan los parámetros de GCL, ya no tan sólo en términos de la energía umbral de producción (como lo hecho durante en el capítulo anterior). Digamos antes que, una característica alentadora de los próximos resultados (y que en parte justifica el empleo de los métodos utilizados en las secciones anteriores) es que, en general, los efectos primarios de las deformaciones sobre las pérdidas de energía —y consecuentemente sobre el espectro— se debieron principalmente a la inelasticidad modificada K de las reacciones, y en menor grado a las modificaciones sobre las secciones eficaces. Esto es ciertamente consistente con el hecho de que para implementar las modificaciones sobre el espectro, hemos supuesto la inexistencia de nuevos vértices, o modificaciones relevantes que no sean de carácter puramente cinemáticas, sobre el sector dinámico de la teoría al orden de las correcciones presentes.

4.4.1. Modificación Vía Resonancias

Sin duda, la mayor causante de la existencia del límite GZK lo constituye la foto-producción vía resonancias. Las estimaciones del Capítulo 3 nos mostraron la posibilidad de suprimir esta reacción mediante alguna elección especial de los parámetros, modificando por lo tanto, la importancia del límite. Esto plantea un pregunta relevante en el marco del programa que hemos delineado: ¿Puede explicarse la carencia del límite GZK sólo a través de la modificación del canal resonante?. Para contestar esta pregunta, recordemos que en el Capítulo 3 se mostró que se requería por lo menos contar con una diferencia $\delta\alpha = \alpha_\Delta - \alpha_p \gtrsim 2 \times 10^{-25}$. La Figura 4.1 muestra la pérdida de energía (Figura 4.1a) así como la derivada de $b(E) = dE/dt$ (Figura 4.1b) para el valor $\alpha_R = 1 \times 10^{-24}$. Puede ser apreciado que los efectos del parámetro $\alpha_R = 1 \times 10^{-24}$ se hacen notorios para energías $E > 10^{21}$ eV, suprimiendo casi por completo al canal resonante en dicho rango energético.

Adicionalmente, la Figura 4.2 muestra la pérdida de energía (Figura 4.2a) y derivada $b(E) = dE/dt$ (Figura 4.2b) cuando hay ausencia total del canal resonante. Para obtener este último caso basta con tener un valor $\alpha_R = 3 \times 10^{-23}$. Claramente, incluso cuando el canal resonante está completamente suprimido, la foto-producción sigue siendo relevante para procesos muy energéticos. La remoción del canal resonante no hace más que mover el límite GZK hacia energías mayores que la previamente establecida por el corte con resonancias. Utilizando el mismo criterio empleado en el Capítulo 1 para la definición

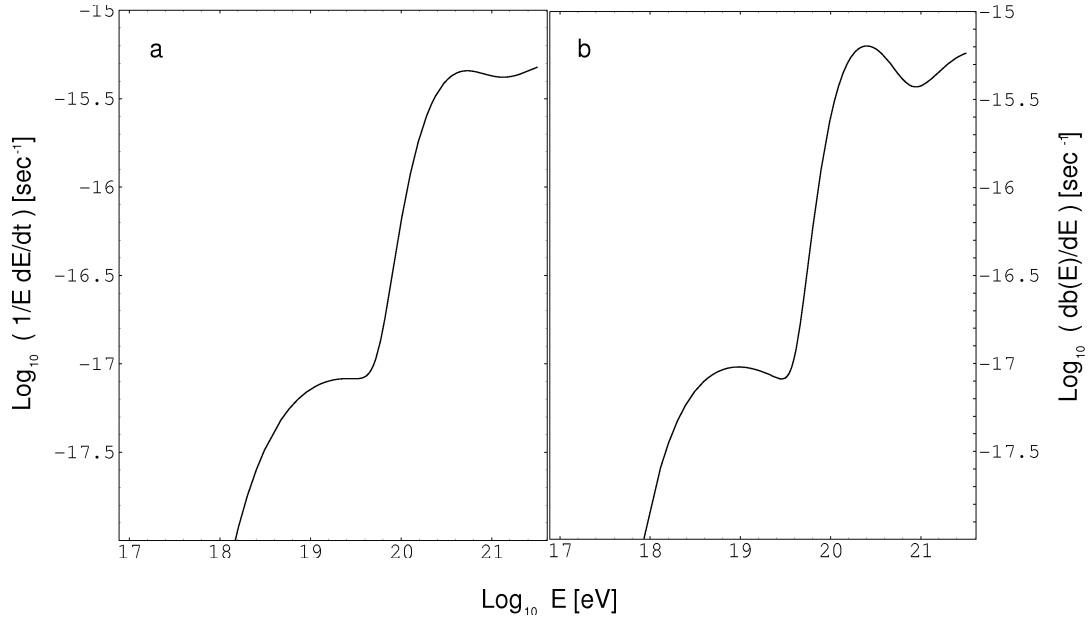


Figura 4.1: Pérdida de Energía y $db(E)/dE$ con $\alpha_R = 1 \times 10^{-24}$. Se puede apreciar cómo el efecto del parámetro $\alpha_R \neq 0$ comienza a eliminar la pérdida de energía vía resonancia para energías $> 5 \times 10^{20}$ eV (comparar con la Figura 1.6).

de la energía de corte E_{GZK} , es posible encontrar un valor $E_{GZK} = 6,3 \times 10^{19}$ eV. Para entender la magnitud de la desviación lograda mediante el parámetro α_R , la Figura 4.3 muestra al espectro de rayos cósmicos para distintos valores de éste. La curva 1 muestra el caso sin modificaciones $\alpha_R = 0$, mientras que la curva 4 muestra el caso extremo en donde no hay resonancias $\alpha_R > 3 \times 10^{-23}$. Las curvas 2 y 3 muestran los casos $\alpha_R = 1 \times 10^{-24}$ y $\alpha_R = 1 \times 10^{-23}$ respectivamente. Para analizar la discrepancia estadística, planteemos como hipótesis la validez de la presente teoría para valores $\alpha_R \neq 0$ y hagamos nuevamente uso de la relación (1.62) para χ^2 de Poisson. Con estas consideraciones se encuentra un valor $\chi^2 = 29$ para la curva 1, $\chi^2 = 23,7$ para la curva 2, $\chi^2 = 28,5$ para la curva 3 y $\chi^2 = 17,3$ para la curva 4. En cuanto a la probabilidad de encontrar un exceso en el número de eventos registrados experimentalmente en relación a los predichos, se encuentra una probabilidad de $1,1 \times 10^{-8}$ para la curva 1, $1,4 \times 10^{-8}$ para la curva 2, $1,6 \times 10^{-7}$ para la curva 3, y $7,2 \times 10^{-6}$ para la curva 4. En consecuencia, la mejor posibilidad para una descripción cuantitativa del límite viene dada por la curva 4, donde hay ausencia total de pérdida de energía a través del decaimiento resonante. Aún así, debemos concluir que no es posible describir satisfactoriamente las observaciones de la violación del límite,

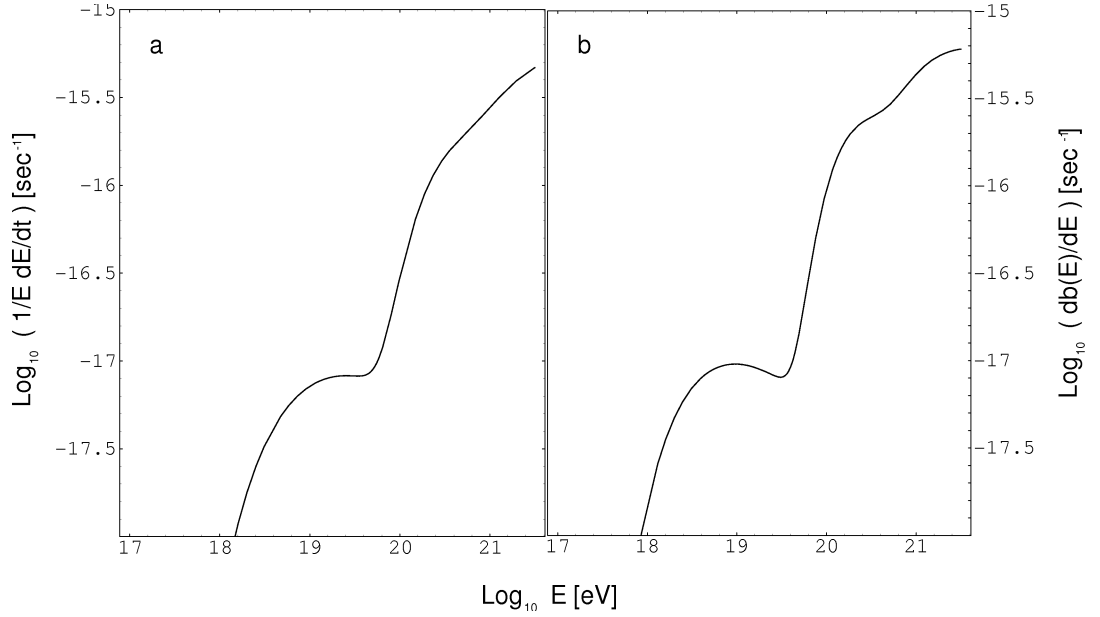


Figura 4.2: Pérdida de Energía y $db(E)/dE$ con ausencia total del canal resonante. Para esta configuración basta tener $\alpha = 3 \times 10^{-23}$.

únicamente mediante la presencia de la desviación α_R , como es sugerido en [12], [15] y otras publicaciones.

4.4.2. Modificación Vía Foto-Producción

para remover el límite GZK, la siguiente posibilidad a considerar reside en afectar la foto-producción a través de α_π , α_ρ y α_ω . Como ya se ha dicho, usaremos un valor único α_b para las tres correcciones. La Figura 4.4 muestra las pérdidas de energías para los valores $\alpha_b = 9 \times 10^{-23}$ para la curva 1, $\alpha_b = 5 \times 10^{-23}$ para la curva 2, y $\alpha_b = 0$ para la curva 3 (caso no deformado). En comparación con las pérdidas de energías logradas para el caso de la modificación vía resonancias (Figura 4.3), existe una evidente mejora en cuanto a la posibilidad de generar violaciones del límite GZK a través de $\delta A = A_b - A_p \neq 0$. En forma notoria, la pérdida de energía no modificada de la producción de pares, vuelve a dominar el comportamiento de la pérdida de energía total, para energías $E > 2,2 \times 10^{20}$ eV. Puede ser comprobado que la máxima pérdida de energía para el caso $\alpha_b = 9 \times 10^{-23}$ (curva 1), se da en $E = 1 \times 10^{20}$ eV, y corresponde a $2,5 \times 10^{-17}$ sec $^{-1}$, lo que arroja una distancia característica $R = 387$ Mpc. Mientras tanto, para el caso $\alpha_b = 5 \times 10^{-23}$ (curva 2), la máxima pérdida de energía se da en $E = 1,2 \times 10^{20}$ eV, y tiene el valor $5,5 \times 10^{-17}$ sec $^{-1}$,

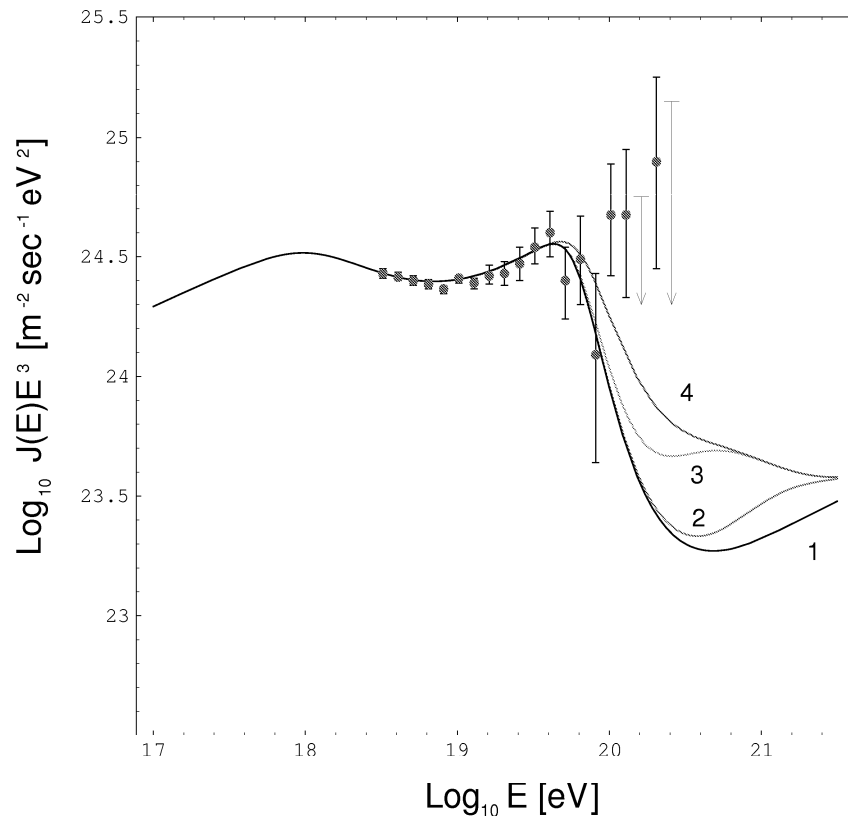


Figura 4.3: Espectro de rayos c3smicos con modificaci3n v3a resonancias. La curva 4 muestra al espectro con ausencia total de p3rdida de energ3a debido a resonancias. El resto de las curvas muestran distintos valores de A_R ; curva 1: $\alpha_R = 0$; curva 2: $\alpha_R = 10^{-24}$; curva 3: $\alpha_R = 10^{-23}$.

lo que arroja una distancia caracter3stica $R = 177$ Mpc. En ambos casos la distancia caracter3stica asciende a valores $R > 1650$ Mpc para energ3as superiores a 4×10^{20} eV.

La Figura 4.5a muestra el espectro de rayos c3smicos con una energ3a de corte de producci3n $E_c = 1 \times 10^{21}$ eV, para distintos valores de α_b . La curva 1 muestra el espectro con ausencia total de foto-producci3n, para lo que basta tener $\alpha_b > 3 \times 10^{-22}$. El resto de las curvas corresponden a $\alpha_b = 1,5 \times 10^{-22}$ para la curva 2, $\alpha_b = 1 \times 10^{-22}$ para la curva 3, y $\alpha_b = 9 \times 10^{-23}$ para la curva 4. La curva 5 muestra al espectro sin modificaci3n alguna. La Figura 4.5b muestra a las curvas 1, 4 y 5 del espectro, comparadas con los datos experimentales de AGASA. Los respectivos valores de χ^2 de Poisson para las curvas son, $\chi^2 = 16,9$ para la curva 1, $\chi^2 = 10,9$ para la curva 2, $\chi^2 = 9,7$ para la curva 3, y $\chi^2 = 10,6$ para la curva 4. Mientras tanto, las probabilidades de Poisson de encontrar un exceso son $2,1 \times 10^{-4}$ para la curva 1, $2,5 \times 10^{-4}$ para la curva 2, $1,8 \times 10^{-4}$ para la curva 3, y $1,1 \times 10^{-4}$

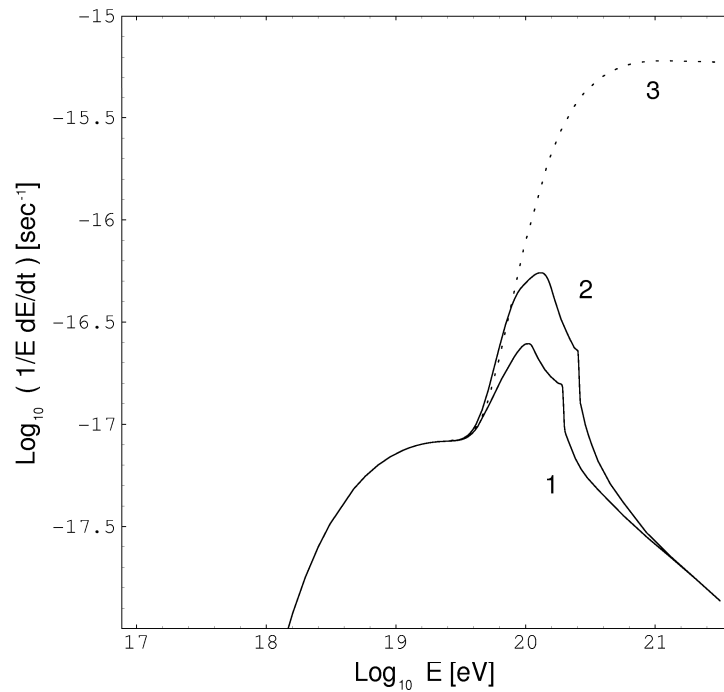


Figura 4.4: Pérdida de energía con foto-producción modificada. Curva sólida: pérdida de energía sin modificaciones ($\alpha_b = 0$). Curva punteada: $\alpha_b = 9 \times 10^{-23}$.

para la curva 4. Estos datos pueden ser comparados con $\chi^2 = 29.9$ y una probabilidad $1,7 \times 10^{-9}$ para la curva 5. Estos resultados reflejan una clara mejora en la descripción de la violación del límite GZK, mediante la supresión de la foto-producción múltiple y directa. Para las curvas de la Figura 4.5, las probabilidades de un exceso son al menos 4 órdenes de magnitud mayores que las correspondientes probabilidades pertenecientes a las curvas logradas en el Capítulo 1 (Figura 1.7), mediante los métodos convencionales. Además, los valores de χ^2 de Poisson para las curvas representando al espectro modificado, arrojan valores bastante aceptables dado el pequeño número de muestreo con el que se cuenta: $\chi^2 \approx \text{número de muestras} = 8$.

4.4.3. Modificación Vía Producción de Pares

Para que una modificación a la pérdida de energía debida a la producción de pares en la región $E > 8 \times 10^{19}$ sea apreciable en la configuración del espectro, es importante que la foto-producción de piones también se vea deformada (lo que es evidente dado que la foto-producción es la principal causante del límite). Sin embargo, a diferencia del caso de

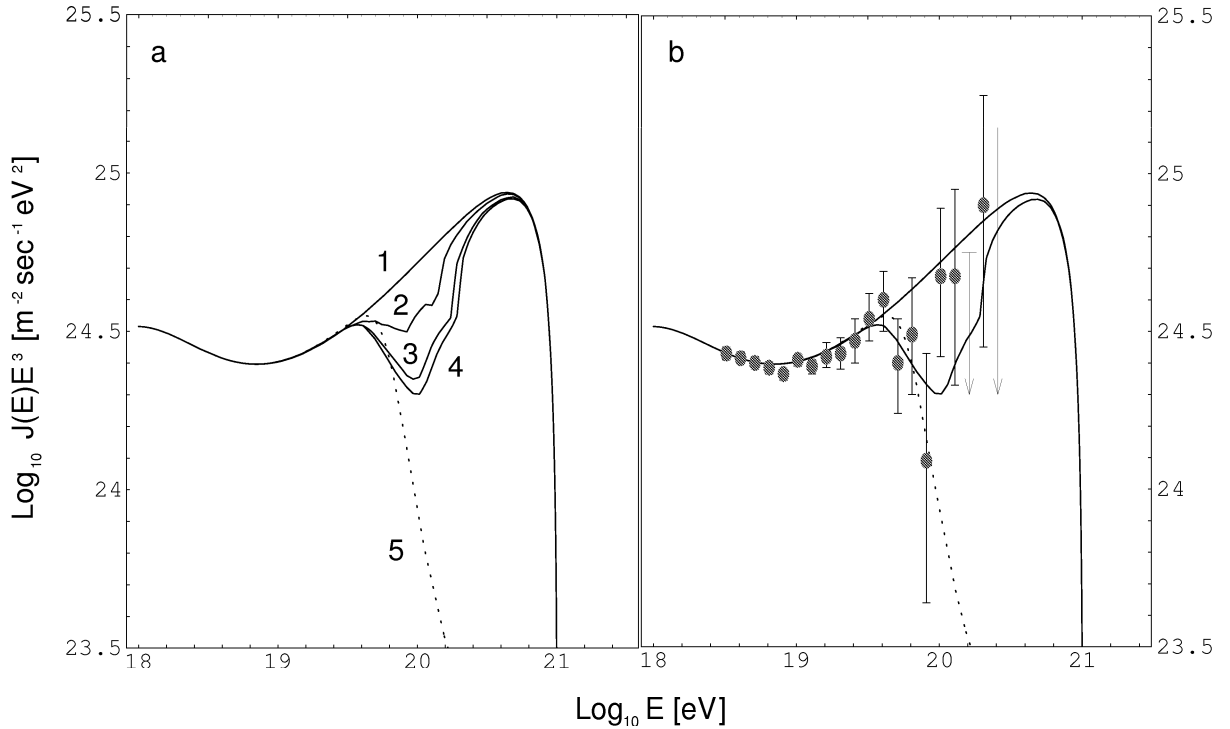


Figura 4.5: a) Espectro de rayos cósmicos modificado a través de $\alpha_b \neq 0$, con una energía de corte $E = 3 \times 10^{20}$. Curva 1: sin foto-producción (basta tener $\alpha_b > 3 \times 10^{-22}$); curva 2: $\alpha_b = 1,5 \times 10^{-22}$; curva 3: $\alpha_b = 1 \times 10^{-22}$; y curva 4: $\alpha_b = 9 \times 10^{-23}$. b) Curvas 1 y 4 del espectro y datos experimentales de AGASA.

la foto-producción de piones, la presencia de la corrección $A_e = 1 + \alpha_e$ para electrones y positrones puede alterar la región del espectro que ya está bien descrita por el modelo (lo que evidentemente no deseamos). Recordemos que en la Sección 3.4.4 del Capítulo 3 se encontró la cota $|\delta A| = |\alpha_e - \alpha_p| < 8,8 \times 10^{-21}$, que fue inferida a través del requerimiento de que en el espectro, o pérdida de energía, no se viera afectada la producción de pares para energías $E < 4 \times 10^{19}$ eV. Esta restricción deberá verse reflejada en la pérdida de energía modificada para la producción de pares, de modo que sí $\alpha_e \gtrsim 1 \times 10^{-22}$, los nuevos efectos serán notorios en el espectro de rayos cósmicos.

La Figura 4.6 muestra la pérdida de energía debido a la producción de pares para distintos valores de α_e . Las respectivas curvas mostradas en la figura corresponden a $\alpha_e = 5 \times 10^{-21}$ para la curva 1, $\alpha_e = 1 \times 10^{-21}$ para la curva 2, $\alpha_e = 5 \times 10^{-22}$ para la curva 3, y $\alpha_e = 1 \times 10^{-22}$ para la curva 4. Adicionalmente, la curva 5 muestra el caso no modificado $\alpha_e = 0$. En efecto, puede ser comprobado que cuando se cumple $\alpha_e \gtrsim 1 \times 10^{-22}$,

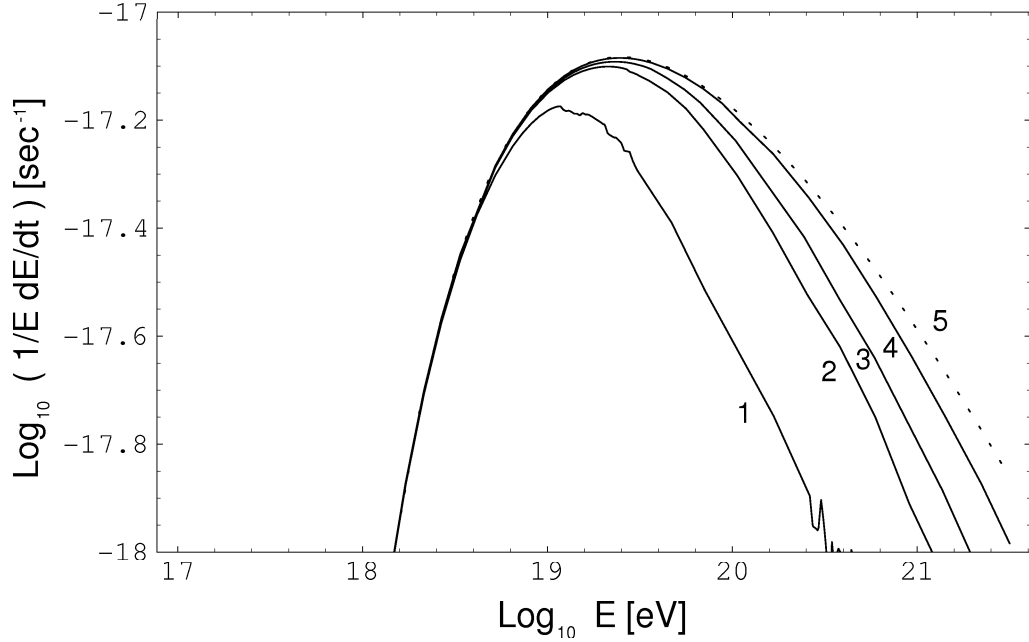


Figura 4.6: Pérdida de energía modificada para la producción de pares. Curva 1: $\alpha_e = 5 \times 10^{-21}$; curva 2: $\alpha_e = 1 \times 10^{-21}$; curva 3: $\alpha_e = 5 \times 10^{-22}$; y curva 4: $\alpha_e = 1 \times 10^{-22}$. Adicionalmente, la curva punteada muestra el caso no modificado $\alpha_e = 0$.

como en el caso de la curva 1, la pérdida de energía se ve gruesamente modificada. Por ejemplo, para la energía $E = 4 \times 10^{19}$ eV, la curva 1 tiene una diferencia fraccional de 0.47 con respecto al caso no modificado, lo que es inaceptable para tal rango de energías. Este resultado es corroborado por la Figura 4.7a, que muestra al espectro de rayos cósmicos con una energía de corte de producción $E_c = 1 \times 10^{21}$ eV para el caso $\alpha_e = 5 \times 10^{-21}$ (curva 1), y para el caso sin modificaciones (curva 2). La Figura 4.7b, por su lado, muestra a las curvas 1 y 2 junto con las mediciones de AGASA. Para no tener conflictos con el sector $E < 4 \times 10^{19}$ eV del espectro, basta tomar $\alpha_e \leq 1 \times 10^{-21}$ (por ejemplo: curvas 2, 3 y 4, de la Figura 4.6).

4.4.4. Modificaciones Combinadas

Hemos visto las tres formas básicas de modificar al espectro de rayos cósmicos, realizadas a través de los tres tipos de correcciones α_R , α_b y α_e .

Para analizar los efectos de las tres correcciones actuando simultáneamente, se revisaron distintas combinaciones de los parámetros α . Los mejores ajustes logrados se dieron con $\alpha_R = 0$, $\alpha_e = 0$ y α_b en la región $1,5 \times 10^{-22} \geq \alpha_b \geq 1 \times 10^{-22}$. Sin embargo, otras

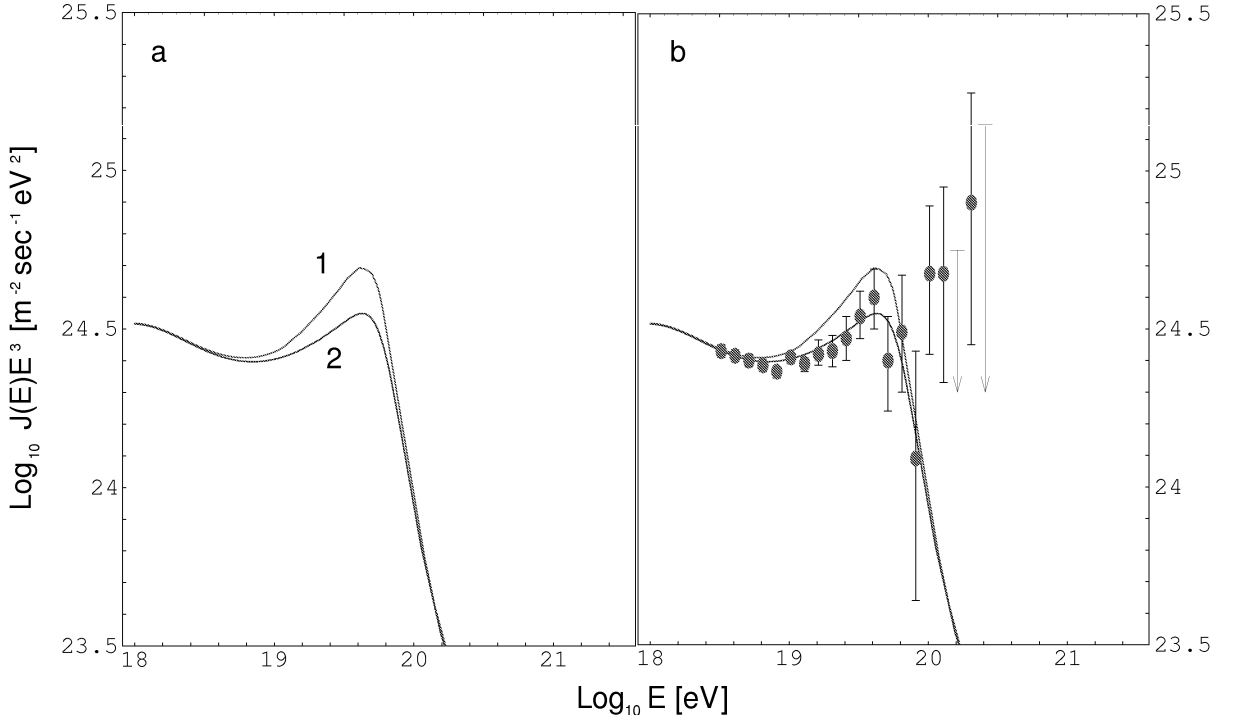


Figura 4.7: Espectro de rayos c3smicos para $\alpha_e \neq 0$, con una energa de corte $E_c = 1 \times 10^{21}$. a) Las curvas 1 y 2 muestran los casos $\alpha_e = 5 \times 10^{-21}$ y $\alpha_e = 0$ (sin correcci3n), respectivamente. b) Curvas 1 y 2, junto con las mediciones de AGASA.

combinaciones de par3metros pueden ser logradas dando resultados igualmente satisfactorios. Si bien es cierto que esta configuraci3n de los par3metros no es del todo confiable debido a la poca cantidad de muestras, en el contexto de una violaci3n del l3mite a trav3s de ILR, los resultados muestran una clara necesidad de una modificaci3n del canal directo y m3ltiple de la foto-producci3n. La Figura 4.8 muestra el espectro de rayos c3smicos con una energa de corte $E_c = 1 \times 10^{21}$ eV para las correcciones: $\alpha_b = 1,5 \times 10^{-22}$ representada por la curva 1, y $\alpha_b = 1 \times 10^{-22}$ por la curva 2.

El valor de la escala del weave \mathcal{L} , para el caso $\alpha_b \sim 1 \times 10^{-22}$ (que es el favorecido por nuestro modelo) es

$$\mathcal{L} \sim 8,2 \times 10^{-18} \text{ eV}^{-1}. \quad (4.66)$$

Aunque esta cantidad proviene estrictamente de la diferencia $\delta\alpha = \alpha_b - \alpha_p$, dado que los par3metros adimensionales κ son de orden 1, provee de un orden de magnitud para la escala del weave. No olvidemos, por ejemplo, que la cota $\delta\alpha = \alpha_p - \alpha_\gamma < 1 \times 10^{-23}$ tambi3n existe y es m3s fuerte. No obstante, la escala que se obtiene con esta 3ltima

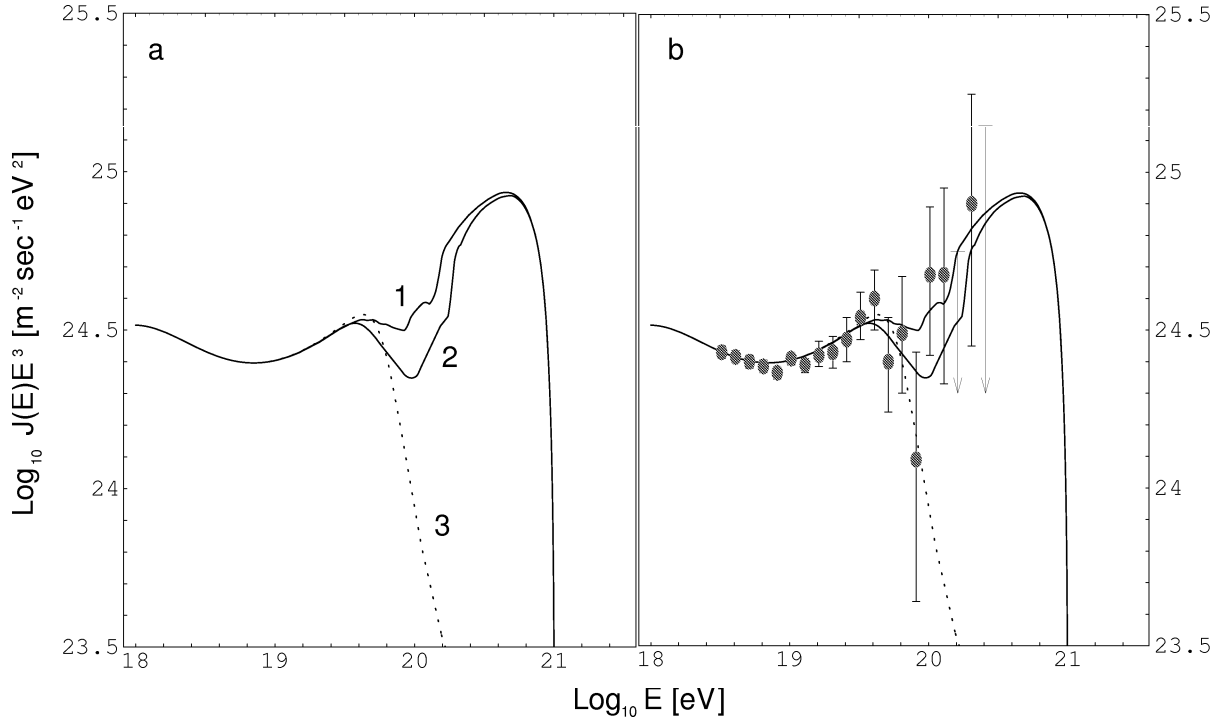


Figura 4.8: a) Espectro de rayos c3smicos para $\alpha_b = 1,5 \times 10^{-22}$ (curva 1) y $\alpha_b = 1 \times 10^{-22}$ (curva 2), con una energa de corte $E_c = 1 \times 10^{21}$. Adicionalmente se muestra el espectro para el caso no modificado (curva 3). b) Curvas 1, 2 y 3 junto con los datos de AGASA.

cota, se mantiene en el mismo orden de magnitud, por lo que los efectos estudiados para modificar el l3mite GZK no pueden ser descartados.

Tambi3n es posible contar con distintas energ3as de corte. La Figura 4.9 muestra al espectro de rayos c3smicos con $\alpha_b = 1,5 \times 10^{-22}$, para las energ3as de corte $E_c = 5 \times 10^{20}$ eV (curva 1), $E_c = 1 \times 10^{21}$ eV (curva 2), y $E_c = 3 \times 10^{21}$ eV (curva 3). Los valores de χ^2 de Poisson para estas curvas fueron: $\chi^2 = 10$ para la curva 1, $\chi^2 = 10,9$ para la curva 2, y $\chi^2 = 11,2$ para la curva 3. Mientras que las probabilidades de un exceso fueron: $3,6 \times 10^{-4}$ para la curva 1, $2,6 \times 10^{-4}$ para la curva 2, y $2,3 \times 10^{-4}$ para la curva 3. Las curvas de la Figura 4.9 brindan tres posibles comportamientos del espectro para energ3as mayores que $E \approx 3 \times 10^{20}$ eV, que es la energa del evento m3s energ3tico.

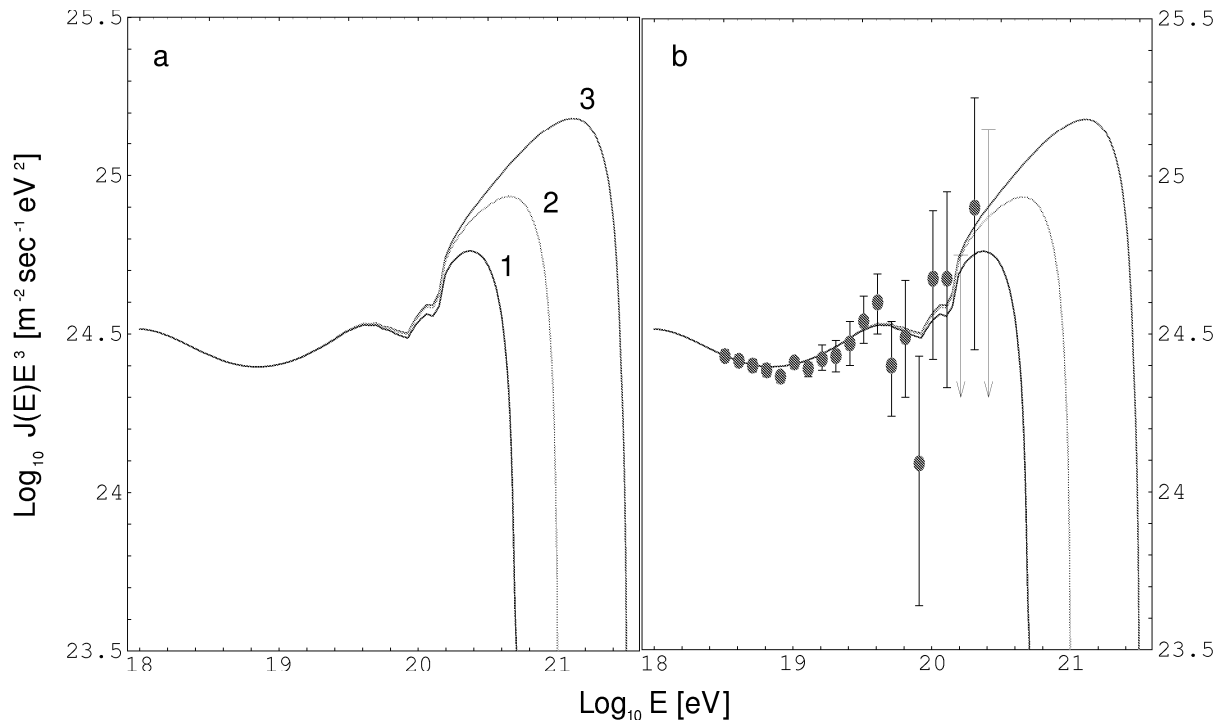


Figura 4.9: a) Espectro de rayos c3smicos con $\alpha_b = 1 \times 10^{-22}$ para distintos valores de la energa de corte E_c . Los respectivos valores son $E_c = 5 \times 10^{20}$ (curva 1), $E_c = 1 \times 10^{21}$ (curva 2) y $E_c = 3 \times 10^{21}$ (curva 3). b) Curvas 1, 2 y 3 junto con los datos de AGASA.

Capítulo 5

Conclusiones

Hemos visto cómo las correcciones de gravedad cuántica de lazos a las ecuaciones de movimiento, y en particular a las relaciones de dispersión, pueden afectar a la descripción teórica de fenómenos de muy altas energías, tales como los RCAE. En forma recíproca, el entendimiento de estos fenómenos a través de las detalladas observaciones llevadas a cabo por los actuales grupos experimentales, nos ha permitido restringir fuertemente dichas correcciones.

La gran sensibilidad mostrada por las condiciones de umbral analizadas, hacia las correcciones introducidas por GCL, nos permitió un estudio serio y confiable de los efectos fenomenológicos que una teoría con ruptura de la invarianza de Lorentz ha de tener sobre procesos a altas energías. El alcance de estos efectos es tal, que por ejemplo se comprobó que es posible suprimir por completo una reacción, sin importar cuán grande es el contenido energético inicial de una partícula que participa en dicha reacción. En forma análoga, también vimos que procesos antes prohibidos por la teoría convencional tanto a bajas como altas energías, debido a las leyes de conservación de energía y momento, tienen el potencial de verse permitidos para cierto rango de energías dependiente de las correcciones de la nueva teoría. Al contrastar fenómenos cinemáticos como éstos, fuimos capaces de concluir que, de todas las correcciones a las relaciones de dispersión consideradas en esta tesis, sólo $A = 1 + \alpha$ puede constituir un candidato razonable para revelar sus efectos en el rango de las máximas energías observadas hasta ahora (esto es $E \gtrsim 1 \times 10^{20}$ eV). Correcciones como λ y η para partículas masivas, han quedado en principio descartadas, o a lo menos, notoriamente suprimidas.

En cuanto a la corrección θ_γ del sector electromagnético, no hemos podido establecer una restricción lo suficientemente fuerte —en base a las observaciones accesibles— como

para descartarla. Una consecuencia de esto, es que ha quedado abierta la posibilidad de la futura observación astrofísica de fotones con helicidad privilegiada, para aquellos fotones que superen en forma considerable el rango del TeV. Si este no fuese el caso, u otra anomalía predicha por las relaciones de dispersión modificadas para el sector electromagnético no se diera, entonces podríamos restringir aún más los parámetros de la teoría.

También examinamos la posibilidad de reproducir en forma concreta un espectro para los rayos cósmicos sin la presencia del límite GZK. En términos de la escala del weave \mathcal{L} , el rango favorecido para que tal característica se presente, es

$$\mathcal{L} \sim 8 \times 10^{-18} \text{ eV}^{-1}. \quad (5.1)$$

Este resultado indica, con algo de entusiasmo, que podríamos estar a las puertas de una nueva era de fenómenos físicos cuyas descripciones se basen en la tan anhelada teoría de la gravedad cuántica.

Los resultados desarrollados en esta tesis, principalmente en los capítulos 3 y 4, son importantes y necesarios. Consideremos por un lado que ya están en desarrollo técnicas teóricas que prometen calcular el valor de los parámetros correctivos (por ejemplo, los κ 's) en forma completa [55, 56]. Por ello, si tales cálculos concuerdan con la estructura de los modelos efectivos empleados en esta tesis, entonces los resultados que aquí se presentan podrían ser usados como un criterio para juzgar la validez de la teoría GCL.

Por otro lado, dado el nivel alcanzado por las actuales empresas experimentales y, dado el nivel que será alcanzado por las futuras empresas experimentales ya en desarrollo, es muy posible que tengamos en un corto plazo, un entendimiento más sofisticado en torno a los RCAE, capaz de revelar la naturaleza detrás de la aparente violación del límite GZK. En este sentido, diversas posibilidades deben ser consideradas. Por ejemplo, es factible que la violación tenga una explicación razonable en el marco de la física convencional. Otra posibilidad es que descubramos que tal violación no es más que el resultado de desafortunadas mediciones [57], lo que no sería nuevo en la historia de la Física. Aun así, la posibilidad de una violación del límite causada por correcciones grávitico-cuánticas no debe ser desechada. Los resultados del Capítulo 4 muestran distintas alternativas y predicen un espectro al cual las venideras observaciones podrían converger. Experimentos futuros tales como el arreglo Auger, el Extreme Universe Space Observatory (EUSO), y el satélite Orbiting Wide-angle Light (OWL), serán decisivos en cuanto a éstos y muchos

otros aspectos.

El estudio presentado en esta tesis se ha limitado a la propagación de partículas en el medio intergaláctico. Un estudio más acabado requiere también del análisis de los efectos gravitacionales-cuánticos en la aceleración de partículas tan energéticas. No olvidemos que los actuales modelos de generación de rayos cósmicos no son satisfactorios y, por lo tanto, si los efectos de gravedad cuántica son relevantes a estas energías, es muy posible que el mecanismo de aceleración de partículas requiera de una reelaboración. También se debe enfatizar que es imprescindible contar con una descripción efectiva del sector dinámico de la teoría [58]. Esto proveería de una descripción completa para la interacción de partículas y, mientras ello no suceda, los resultados del Capítulo 4 representan una visión circunscrita a los supuestos que la sostienen. Por dicha razón, sólo los resultados del Capítulo 3, válidos para partículas asintóticamente libres, pueden ser aceptados sin mayor objeción.

Otros caminos para contrastar teoría y observación son también posibles, por ejemplo, todo fenómeno físico en el cual los efectos acumulativos son importantes; éste podría ser el caso de estrellas compactas o núcleos galácticos activos, donde los efectos de las pequeñas correcciones a las relaciones de dispersión podrían verse acrecentadas por el gran número de partículas, así como la gran energía presente en dichos objetos [59]. En forma similar, los efectos acumulativos producidos en los recorridos de grandes distancias¹ por las partículas, puede producir pequeñas —pero distinguibles— diferencias en el tiempo de arribo de partículas simultáneamente emitidas por una fuente muy energética (ver Apéndice D).

En conclusión, estamos presenciando un emocionante periodo en la evolución de la gravedad cuántica y, el vertiginoso camino que siguen, tanto la tradición teórica como la tradición observacional, esperamos, nos seguirá dando sorpresas.

¹Ver comentario inicial de la sección 4.3.

Apéndice A

Ecuaciones de Friedmann y Modelos Cosmológicos

La cosmología contemporánea y sus modelos reposan sobre la idea de que el Universo se presenta en forma similar en todas sus regiones. Dicho principio es, por supuesto, necesariamente válido sólo a escalas suficientemente grandes, de modo que nuestra galaxia y toda su vecindad puedan ser considerados como parte de un fluido isotrópico y homogéneo a lo largo de la totalidad del Universo. Estas dos características, isotropía y homogeneidad, son la clave para establecer matemáticamente las ecuaciones que gobiernen la dinámica del Cosmos. A continuación se presentan en forma resumida los principales resultados y desarrollos provenientes de la Teoría de la Gravedad (en su versión clásica) que dan cuenta de los modelos cosmológicos usuales.

Como se mencionó, en el contexto de la Teoría de la Gravedad es posible establecer de forma única y precisa la exigencia de un universo isotrópico y homogéneo. Esto se logra mediante la métrica de Robertson-Walker,

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (\text{A.1})$$

donde la coordenada t corresponde al tiempo propio de un observador en reposo con respecto al sistema co-móvil (aquel en donde las galaxias están en reposo), r es la coordenada radial a partir de un punto arbitrario del sistema co-móvil (por ejemplo la Tierra), $R(t)$ es el factor de escala (que establece la dependencia temporal de la distancia propia entre los objetos en el sistema co-móvil), y k es una constante que puede ser identificada con la curvatura de las secciones 3-espaciales parametrizadas en t . A partir de (A.1) es posible calcular las conexiones libres de torsión, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci.

Las componentes no nulas de las conexiones son

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}), \quad (\text{A.2})$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{\dot{R}}{R}g_{ij}, \quad (\text{A.3})$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{R}}{R}\delta_j^i. \quad (\text{A.4})$$

Las componentes no nulas del tensor de Ricci son

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{R}}{R} \quad (\text{A.5})$$

$$R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2}\right]g_{ij}. \quad (\text{A.6})$$

Por último, el escalar de Ricci es

$$\mathcal{R} = -6\left[\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2}\right] \quad (\text{A.7})$$

Para entender la dinámica que gobierna a un espacio-tiempo del tipo Robertson-Walker, y en consecuencia al Universo, debemos acudir a las ecuaciones de Einstein. Estas son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.8})$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento, y Λ es la constante cosmológica. Notemos que sin pérdida de generalidad es posible —y conveniente— absorber al término con la constante cosmológica $\Lambda g_{\mu\nu}$ en el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. El lado izquierdo de la ecuación (A.8) corresponde al tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. Debe ser notado que las ecuaciones (A.8) son compatibles con la relación de conservación de energía-momento:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Para continuar con la discusión, debemos decir algo acerca de $T_{\mu\nu}$. Para ser consistentes con la simetría de la métrica, el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ debe ser diagonal y, por isotropía, las componentes espaciales deben ser iguales. La versión más simple de tal tensor corresponde al tensor de energía-momento de un fluido perfecto, caracterizado por una densidad de energía $\rho(t)$ y una presión $p(t)$:

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p). \quad (\text{A.10})$$

Con esta forma del tensor energía-momento, se encuentra que la componente $\mu = 0$ de la ecuación de conservación (A.9), no es más que la Primera Ley de la Termodinámica:

$$d(\rho R^3) = -p d(R^3), \quad (\text{A.11})$$

o de forma equivalente

$$d [R^3(\rho + p)] = R^3 dp. \quad (\text{A.12})$$

Evidentemente, para que el sistema esté descrito en forma completa, requerimos de una ecuación de estado $\rho = \rho(p)$. Para el estudio de la evolución del Universo a través de modelos simples, las ecuaciones de estados más usadas son

$$\begin{aligned} \text{Radiación} & \quad p = \rho/3, \\ \text{Materia} & \quad p = 0, \\ \text{Vacío} & \quad p = -\rho. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

La elección de la correcta ecuación de estado dependerá de la época del Universo que nos interese describir.

Combinando las ecuaciones (A.5), (A.7), (A.8) y (A.10), es posible encontrar las ecuaciones de Friedmann para la evolución del Universo. Estas son dos:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (\text{A.14})$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = -8\pi Gp. \quad (\text{A.15})$$

Por las simetrías involucradas en el sistema, es posible mostrar que estas dos ecuaciones, más (A.12), están relacionadas, siendo sólo dos de estas tres ecuaciones, independientes¹. Usualmente se trabaja con (A.12) y (A.14). También es posible hallar una expresión para la aceleración del factor de escala; restando (A.15) con (A.14):

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (\text{A.16})$$

Como puede apreciarse, el signo de la aceleración depende del signo de $\rho + 3p$. Hoy en día se cumple $\dot{R} \geq 0$. Si en el pasado $\rho + 3p$ fue siempre positivo (favorecido por los modelos estándares), entonces R debió ser igual a cero en algún momento del pasado. A dicho

¹Esto se puede probar a través de las identidades de Bianchi.

evento se le conoce como el Big Bang, y convencionalmente se identifica con $t = 0$. Las observaciones más recientes en torno a la aceleración del universo del presente revelan una aceleración positiva (en contra de todo pronóstico), favoreciendo, para la ecuación de estado, modelos del tipo $p = -\rho$. Tal situación ha impulsado enormemente el desarrollo de nuevas fronteras en la física, ya que en la actualidad no es posible una descripción satisfactoria de este fenómeno.

La ecuación de Friedmann (A.14) puede ser reescrita como

$$\frac{k}{H^2 R^2} = \frac{\rho}{3H^2/8\pi G} - 1 \equiv \Omega - 1, \quad (\text{A.17})$$

donde Ω es el radio entre la densidad ρ y la densidad crítica ρ_c :

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (\text{A.18})$$

Como $H^2 R^2 > 0$, hay una correspondencia entre el signo de k y el signo de $\Omega - 1$. Las observaciones más recientes favorecen un radio de densidad $\Omega \simeq 1$, favoreciendo así mismo una curvatura espacial $k = 0$. Esto corresponde a un universo plano.

Resulta útil definir el parámetro redshift z como:

$$1 + z \equiv \frac{R_0}{R(t)}, \quad (\text{A.19})$$

donde R_0 es el factor de escala del presente $t = t_0$, y $R(t)$ es el factor de escala para $t < t_0$. La utilidad de z reside principalmente en el hecho de que las observaciones astronómicas entregan sus resultados directamente en función del redshift z . Por lo mismo, para estudiar la evolución del Universo es mejor trabajar con z en vez de la coordenada temporal t . Para establecer la relación entre t y z basta escribir:

$$dt = \frac{dR}{\dot{R}} = -\frac{1}{H(z)}(1+z)^{-1}dz. \quad (\text{A.20})$$

Luego, para encontrar z en función de t basta determinar la evolución de H . Tal evolución vendrá dada por el modelo en particular. En la presente tesis suponemos que el Universo es plano (lo que corresponde a $\Omega = 1$) y que en el presente su evolución está dominada por la materia. Esto último nos obliga a considerar una ecuación de estado $p = 0$, por lo que hemos de tomar $\rho \propto R^{-3}$. Bajo estos supuestos, es fácil deducir que se cumple

$$H(z) = H_0(1+z)^{3/2}, \quad (\text{A.21})$$

por lo que finalmente se encuentra

$$dt = -\frac{dz}{H_0(1+z)^{5/2}}. \quad (\text{A.22})$$

Esta relación es de gran importancia a la hora de estudiar el espectro de rayos cósmicos altamente energéticos.

Apéndice B

Cinemática en espacios de FRW

Parte esencial del entendimiento que tenemos sobre nuestro Universo, reside en la comprensión de cómo su evolución afecta a la propagación de las partículas. En este apéndice mostraremos en forma sencilla cómo determinar el efecto de tal evolución sobre el momento p de partículas libres (a diferencia del tratamiento más elaborado realizado en la Sección 4.3 del Capítulo 4). Veremos, además, cómo se aplica este resultado para la obtención del espectro diferencial de rayos cósmicos en función del redshift z .

El movimiento de una partícula sobre un espacio-tiempo arbitrario viene descrito por la ecuación de la geodésica:

$$\frac{du^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} u^\nu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = 0, \quad (\text{B.1})$$

donde $u^\alpha = dx^\alpha/d\tau$ es la 4-velocidad, y λ un parámetro afín de la curva descrita. La 4-velocidad puede ser expresada en términos de la 3-velocidad mediante la relación

$$u^\mu = (u^0, u^i) = (\gamma, \gamma v^i), \quad (\text{B.2})$$

donde $\gamma = (1 - |\vec{v}|^2)^{-1/2}$ y $|\vec{v}|^2 = g_{ij}v^i v^j$. Eligiendo como parámetro afín el tiempo propio de la partícula, $d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, la componente $\mu = 0$ de la ecuación para la geodésica (B.1) viene a ser

$$\frac{du^0}{d\tau} + \Gamma^0_{\nu\alpha} u^\nu u^\alpha = 0. \quad (\text{B.3})$$

Usando las componentes no nulas de las conexiones $\Gamma^0_{ij} = (\dot{R}/R)g_{ij}$, encontradas en el capítulo anterior y, usando $|\vec{u}|^2 = g_{ij}u^i u^j$, la ecuación anterior queda

$$\frac{du^0}{d\tau} + \frac{\dot{R}}{R} |\vec{u}|^2 = 0. \quad (\text{B.4})$$

Como $(u^0)^2 - |\vec{u}|^2 = 1$, sigue que $u^0 du^0 = |\vec{u}| d|\vec{u}|$, y la ecuación de la geodésica puede ser escrita como

$$\frac{1}{u^0} \frac{d|\vec{u}|}{d\tau} + \frac{\dot{R}}{R} |\vec{u}|^2 = 0. \quad (\text{B.5})$$

Como último paso notemos que $u^0 = dt/d\tau$, por lo que (B.5) se reduce a $|\dot{\vec{u}}|/|\vec{u}| = -\dot{R}/R$, implicando que $|\vec{u}| \propto R^{-1}$. Recordando que el 4-momento viene dado por $p^\mu = mu^\mu$ (y por lo tanto $|\vec{p}| = m|\vec{u}|$), vemos que el 3-momento de una partícula propagándose libremente en un espacio de FRW sufre un corrimiento hacia el rojo de la forma:

$$p \propto R^{-1}. \quad (\text{B.6})$$

Una versión más clara y de mayor utilidad para la discusión final de este capítulo (medición de flujos de partículas), reside en corrimiento al rojo sufrido por los fotones. Comencemos recordando que la métrica del espacio-tiempo viene dada por

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (\text{B.7})$$

Para considerar la propagación de un fotón en un espacio descrito por la métrica anterior, situemos al observador (nosotros en la Tierra) en la coordenada $r = 0$. Los fotones detectados en $r = 0$ serán aquellas que han seguido trayectorias tal que $d\theta = d\phi = 0$, por lo que podemos considerar

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2}. \quad (\text{B.8})$$

Recordando que los fotones siguen trayectorias cuyo intervalo espacio-temporal es nulo, tendremos

$$\frac{dt}{R(t)} = \frac{dr^2}{1 - kr^2}. \quad (\text{B.9})$$

Notemos que el lado derecho de la expresión (B.9) depende únicamente de la coordenada espacial r . De este modo, dado un fotón emitido desde una fuente ubicada en $r = r_1$, en un tiempo arbitrario $t = t_i$, y detectado en la Tierra ($r = 0$) en $t = t_0$, se encontrará que

$$\int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_{r_1}^0 \frac{dr^2}{1 - kr^2} \equiv f(r_1). \quad (\text{B.10})$$

Es decir, la integral de camino sobre $dt/R(t)$ es una cantidad que depende únicamente de la coordenada espacial de la fuente emisora. Consideremos ahora la emisión de dos fotones

desde una fuente ubicada en r_1 en los tiempos t_1 y $t_1 + \delta t_1$ respectivamente. Dichos fotones llegarán a la Tierra en los tiempos t_0 y $t_0 + \delta t_0$ respectivamente. Dado que ambos fotones fueron emitidos desde r_1 , se tendrá que

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{R(t)}. \quad (\text{B.11})$$

Desarrollando los límites en (B.11) y asumiendo que los respectivos δt 's son pequeños en comparación al tiempo de viaje entre la fuente y nosotros, encontramos que

$$\frac{\delta t_0}{R_0} = \frac{\delta t_1}{R(t_1)}. \quad (\text{B.12})$$

Si pensamos de la diferencia de tiempo δt_1 entre la emisión de las dos señales como la diferencia de tiempo entre dos máximos de una onda electromagnética, podremos escribir $\delta t_1 \propto \nu_1$, donde ν_1 es la frecuencia inicial de la señal. Consecuentemente $\delta t_0 \propto \nu_0$, donde ν_0 es la frecuencia con que se mide la señal en tierra. Luego,

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{R(t_1)}{R_0} = (1 + z_1)^{-1}. \quad (\text{B.13})$$

Este resultado es, por supuesto, equivalente a que el momento del fotón sufra un corrimiento al rojo $k \propto R^{-1}$.

Veamos ahora una aplicación de lo anterior, relevante para la medición de flujos de partículas en nuestro Universo. Partamos considerando la medición de un flujo de fotones. El flujo total de energía f por unidad de tiempo y de área de una fuente de luminosidad l , medido a una distancia d de la fuente es

$$f = l/A(d), \quad (\text{B.14})$$

donde $A(d) = 4\pi d^2$ es el área propia de la esfera que rodea a la fuente en el momento de medir el flujo; en un espacio de FRW plano se tendrá $d = R_0 r$, donde r es la distancia de coordenadas de la fuente con respecto a quien mide. Sin embargo, en la ecuación (B.14), l es una luminosidad aparente; esto se debe a que, desde su emisión, la frecuencia de los fotones ha de sufrir un corrimiento al rojo dado por la ecuación (B.12). De igual forma, la diferencia de tiempo inicial δt entre dos fotones emitidos desde la fuente, sufrirá un retardo dado por la ecuación (B.13). Tomando en cuenta estos dos efectos podemos encontrar la relación entre la luminosidad aparente l y la luminosidad real de la fuente L . Esta viene dada por

$$L = l(1 + z)^2, \quad (\text{B.15})$$

y el flujo f podrá ser expresado como

$$f = \frac{L}{(1+z)^2 4\pi R_0^2 r^2}. \quad (\text{B.16})$$

Esta ecuación es de vital importancia para determinar la “distancia” z de cuerpos celestes en el Universo; midiendo el flujo f y conociendo la luminosidad L de tales cuerpos, es posible encontrar la distancia z en que se encuentran. Adicionalmente, éste es uno de los principales métodos utilizado para determinar el modelo que mejor describe a nuestro Universo (abierto, cerrado, plano, acelerado, etc.).

Nuestro interés, sin embargo, está en calcular el flujo de partículas cuyas pérdidas de energía no sólo se debe al corrimiento al rojo, sino que también a las interacciones que sufren con el medio. Por ello es que no podemos utilizar la ecuación (B.13) para describir la relación entre l y L . Para proceder con esta dificultad es mejor considerar el flujo total $f'(E)dE$ de energía de partículas con energías en el rango $(E, E + dE)$. En forma similar consideraremos las luminosidades $l'(E)dE$ y $L'(E_1)dE_1$, donde E_1 es la energía con la que las partículas son emitidas desde la fuente. Repitiendo ahora los argumentos en relación al retardo del tiempo entre dos señales y la disminución de energía de las partículas, la relación entre $l'(E)dE$ y $L'(E_1)dE_1$ será

$$L'(E_1)dE_1 = l'(E)dE \frac{E_1}{E} (1+z), \quad (\text{B.17})$$

donde el factor $(1+z)$ viene del retardo temporal y E_1/E de la pérdida de energía. El flujo total $f'(E)dE$ será entonces

$$f'(E)dE = \frac{L'(E_1)dE_1}{(1+z)4\pi R_0^2 r^2} \frac{E}{E_1}. \quad (\text{B.18})$$

Por otro lado, en esta tesis nos será más útil trabajar con el flujo de partículas por unidad de energía $j(E)$. Este viene dado por $E \cdot f'(E)dE = j(E)dE$. Así, finalmente tendremos

$$j(E)dE = \frac{F(E_1)dE_1}{(1+z)4\pi R_0^2 r^2}, \quad (\text{B.19})$$

donde $F(E_1) = L'(E_1)/E_1$ es el flujo total de partículas emitidas desde la fuente por unidad de tiempo y de energía. La ecuación (B.19) es la expresión principal para calcular el espectro $j(E)$ de rayos cósmicos. En el caso más general tendremos una distribución de fuentes $n(z)$ no necesariamente homogénea ni isotrópica. En tal caso, el espectro será:

$$dj(E) = \frac{F(E_1) n(z) dV}{(1+z)4\pi R_0^2 r^2} \frac{dE_1}{dE}, \quad (\text{B.20})$$

donde $dV = R^3(z)r^2 dr d\Omega$ es el elemento de volumen en r para fuentes que emiten en una época z .

Apéndice C

Fondo de Radiación Cós mica

Uno de los mayores descubrimientos de la física moderna fue hecha en 1965. Se trató de la observación, hecha por A. Penzias y R. Wilson, de una radiación de micro-ondas proveniente desde el espacio exterior, desde todas las direcciones, y con la misma intensidad. Pronto se entendió que tal radiación era una consecuencia de la existencia del fondo de radiación cós mica (FRC), un gas de fotones que cubre la totalidad del Universo, y cuyo origen se remonta a los procesos primordiales del universo temprano. Este descubrimiento ha sido de fundamental importancia para el desarrollo de la teoría cosmológica.

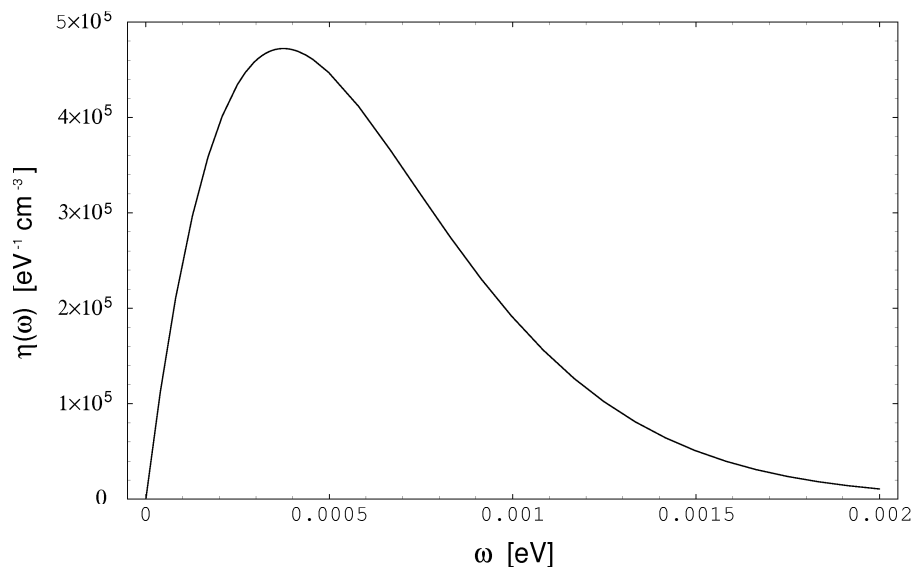


Figura C.1: Distribución espectral del fondo de radiación cós mica. $\eta(\omega) d\omega$ corresponde al número total de fotones, por unidad de volumen, con energías en el rango $[\omega, \omega + d\omega]$.

La Figura C.1 muestra la distribución espectral $\eta(\omega)$ del FRC, en función de la energía

ω de los fotones del fondo ($\eta(\omega) d\omega$ es el número total de fotones, por unidad de volumen, con energías en el rango $[\omega, \omega + d\omega]$). Como puede ser apreciado, el espectro tiene la forma exacta de una distribución de Planck para un cuerpo negro de 2,73 K. Una de las principales consecuencias de la existencia de este espectro es la confirmación de que en una época anterior el Universo fue tan caliente, que la evolución de éste estaba dominado por la energía de la radiación electromagnética. En dicha época, tanto la materia como la radiación generada por las interacciones, convivían en equilibrio térmico. A medida que el Universo se expandía, y por lo tanto su contenido se enfriaba, la interacción entre materia y radiación dejó de ser relevante para mantener el equilibrio entre éstas. Por dicho motivo, tanto materia como radiación se desacoplaron térmicamente, evolucionando desde entonces, en forma independiente.

Nos interesa entender cómo ha evolucionado, desde entonces, el FRC. Para ello consideremos la distribución térmica $f(p, t_D)$ de fotones por unidad de volumen y de momento, presente en el universo durante la época $t = t_D$ del desacoplamiento entre materia y radiación. Como en dicha época los fotones aun se encontraban en equilibrio térmico con el resto del universo, la distribución $f(p, t_D)$ ha de tener la forma de una distribución de Bose-Einstein:

$$f(\mathbf{p}, t_D) = \frac{1}{4\pi^3 [\exp(p/kT_D) - 1]}, \quad (\text{C.1})$$

donde T_D es la temperatura en la época del desacoplamiento. La densidad de partículas por unidad de volumen con momento \mathbf{p} en d^3p en una época arbitraria $t > t_D$, viene dado por

$$d^3n = f(\mathbf{p}, t) d^3p. \quad (\text{C.2})$$

Para determinar $f(\mathbf{p}, t)$ a partir de $f(\mathbf{p}, t_D)$ notemos que para $t > t_D$ el número total de fotones en un volumen co-móvil¹ del universo debe mantenerse constante (una vez desacoplados ya no hay creación ni destrucción de fotones). Esto último significa que la densidad de fotones d^3n debe evolucionar de la forma $d^3n \propto R^{-3}(t)$. Recordando que los fotones sufren un corrimiento al rojo dado por $p \propto R^{-1}(t)$ tendremos que la distribución $f(\mathbf{p}, t) = d^3n/d^3p$ debe ser independiente de $R(t)$ y, por lo tanto, independiente del tiempo. De aquí que

$$f(\mathbf{p}, t) = f(\mathbf{p}R(t)/R_D, t_D), \quad (\text{C.3})$$

¹Aquel que evoluciona como $R^3(t)$.

donde $\mathbf{p}R(t)/R_D$ es el momento del fotón en t_D que en tiempo t adquirirá un valor \mathbf{p} . Reescribiendo (C.3) en forma explícita, es posible encontrar la expresión

$$f(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{4\pi^3 [\exp(pR(t)/kT_D R_D) - 1]}. \quad (\text{C.4})$$

De la última expresión vemos la posibilidad de definir convenientemente la temperatura efectiva $T(t) = T_D R_D / R(t)$. En otras palabras, el espectro del fondo de radiación cósmica evoluciona manteniendo la forma de una distribución térmica de Bose-Einstein con una temperatura efectiva $T(t)$. Dado que conocemos la temperatura efectiva del presente ($T_0 = 2,7$ K) resulta conveniente expresar $T(t)$ como función del redshift z ; esto es

$$T(z) = T_0(1 + z). \quad (\text{C.5})$$

De esta forma, al observar un evento localizado en z , la temperatura del fondo para dicho evento es $T(z) = T_0(1 + z)$. De igual forma, un proton altamente energético a una “distancia” z de nosotros, interactuará con un espectro de fotones de temperatura $T_0(1 + z)$. Mencionemos, por último, que la relación entre $\eta(\omega)$ y $f(\mathbf{p})$ puede ser fácilmente obtenida como $\eta(\omega)d\omega = f(p)p^2 dp \int d\Omega$, donde $d\Omega$ es el ángulo sólido. Por lo que finalmente se obtiene

$$\eta(\omega)d\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 (e^{\omega/kT} - 1)}. \quad (\text{C.6})$$

Apéndice D

Otros Resultados

La predicción de la generación de “neutrino-burst” en eventos de GRB [60, 61], abre la interesante posibilidad de observar un retardo en el tiempo entre la llegada de fotones y neutrinos. Por ejemplo, tomando en cuenta el rango predicho en (3.77) —que da una diferencia para A de $\delta A \approx 10^{-22}$ — el retardo de tiempo para una fuente típica localizada a 40 Mpc en un espacio plano de FRW, debería ser $\delta t \sim 10^{-6}s$.

Por completitud, mostremos las contribuciones al tiempo de retardo (en un universo de FRW) provenientes de los términos más significativos de la relación de dispersión para neutrinos. Estos retardos son considerados respecto al arribo de fotones con una velocidad convencionalmente reescalada $A_\gamma \equiv 1$.

- Término A :

$$\delta t_A = \frac{2|\delta A|}{H_0} [1 - (1+z)^{-1/2}]. \quad (\text{D.1})$$

- Término η_ν :

$$\delta t_\eta = \frac{|\eta_\nu| p_0^2}{H_0} [(1+z)^{3/2} - 1]. \quad (\text{D.2})$$

Adicionalmente, habrá un tiempo de retardo entre fotones de distintas helicidades [25] (para continuar con la convención anterior, tomemos $(v_+ + v_-)/2 = A_\gamma \equiv 1$, donde $v_\pm = A_\gamma \pm 2\theta_\gamma \ell_p p$)

- θ_γ term:

$$\delta t_\pm = \frac{8|\theta_\gamma| \ell_p p_0}{H_0} [(1+z)^{1/2} - 1]. \quad (\text{D.3})$$

En (D.1), (D.2) y (D.3), p_0 es el momento (o energía) de las partículas que llegan, H_0 es la constante de Hubble y z es el redshift de la fuente. Los resultados anteriores pueden ser usados para analizar la estructura espectral de los GRB con más detalle, y así dar cotas adicionales a los parámetros correctivos de GCL. En la actualidad, las observaciones presentes no pueden dar tales cotas.

Índice de figuras

1.1. Espectro energético de rayos cósmicos.	2
1.2. Espectro de energía observado con AGASA.	3
1.3. Direcciones de arribo de los rayos cósmicos.	4
1.4. Sección eficaz total para la foto-producción de piones.	15
1.5. Producto $K\sigma$ para la producción de pares.	17
1.6. Pérdidas de energía para los rayos cósmicos y derivada $db(E)/dE$	18
1.7. Espectro teórico para rayos cósmicos altamente energéticos comparados con los datos de AGASA.	19
4.1. Pérdida de Energía y $db(E)/dE$ con $\alpha_R = 1 \times 10^{-24}$	77
4.2. Pérdida de Energía y $db(E)/dE$ con ausencia total del canal resonante.	78
4.3. Espectro de rayos cósmicos para $\alpha_R \neq 0$	79
4.4. Pérdida de energía con foto-producción modificada.	80
4.5. Espectro de rayos cósmicos para $\alpha_b \neq 0$	81
4.6. Pérdida de energía modificada para la producción de pares.	82
4.7. Espectro de rayos cósmicos para $\alpha_e \neq 0$	83
4.8. Espectro de rayos cósmicos para $\alpha_b = 1,5 \times 10^{-22}$ y $\alpha_b = 1 \times 10^{-22}$	84
4.9. Espectro de rayos cósmicos con $\alpha_b = 1 \times 10^{-22}$ y distintos valores de E_c	85
C.1. Espectro del Fondo de Radiación Cósmica.	99

Bibliografía

- [1] AGASA Collaboration, M. Takeda *et al.*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1163 (1998). For an update see M. Takeda *et al.*, Astrophys. J. **522**, 225 (1999).
- [2] Fly's Eye Collaboration, D.J. Bird *et al.*, Phys. Rev. Lett. **71**, 3401 (1993); Astrophys. J. **424**, 491 (1994); Astrophys. J. **441**, 144 (1995).
- [3] K. Greisen, Phys. Rev. Lett. **16**, 748 (1966).
- [4] G.T. Zatsepin and V.A. Kuz'min, Zh. Eksp. Teor. Fiz., Pis'ma Red. **4**, 114 (1966).
- [5] F.W. Stecker, Phys. Rev. Lett. **21**, 1016 (1968).
- [6] V. Berezhinsky and S.I. Grigorieva, Astron. Atroph. **199**, 1 (1988).
- [7] T.W. Kephart and T.J. Weiler, Astropart. Phys. **4**, 271 (1996).
- [8] D. Fargion, B. Mele, A. Salis, Astrophys. J. **517**, 725 (1999).
- [9] T.J. Weiler, Astropart. Phys. **11**, 303 (1999).
- [10] Z. Fodor, S.D. Katz, A. Ringwald, Phys. Rev. Lett. **88**, 171101 (2002).
- [11] V. Berezhinsky, M. Kachelriess and V. Vilenkin, Phys. Rev. Lett. **79**, 4302 (1997).
- [12] S. Coleman and S.L. Glashow, Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999).
- [13] G. Amelino-Camelia, Phys. Lett. **B528**, 181 (2002).
- [14] F.W. Stecker and S.L. Glashow, Astropart.Phys. **16**, 97 (2001).
- [15] J. Alfaro and G. Palma, Phys. Rev. D **65**, 103516 (2002).

- [16] S. Liberati, T.A. Jacobson, D. Mattingly, “High energy constraints on Lorentz symmetry violations”, hep-ph/0110094.
- [17] V.A. Kostelecki and S. Samuel, Phys. Rev. D **39**,683 (1989).
- [18] G. Dvali and M. Shifman, Phys. Rept. **320**, 107 (1999).
- [19] J. Ellis, N.E. Mavromatos and D.V. Nanopoulos, 4th International Symposium On Sources And Detection Of Dark Matter In The Universe (DM 2000), Marina del Rey, California, 20-23 Feb 2000, gr-qc/0005100.
- [20] Para una extensa introducción de la teoría de la gravedad cuántica de lazos, vea por ejemplo: C. Rovelli, Living Reviews Vol. 1 “Loop Quantum Gravity”, en <http://www.livingreviews.org/articles>.
- [21] Una introducción más avanzada de gravedad cuántica de lazos puede ser encontrada en: T. Thiemann, “Introduction to Modern Canonical Quantum General Relativity”, gr-qc/0110034.
- [22] G. Amelino-Camelia, J. Ellis, N.E. Mavromatos, D.V. Nanopoulos, and S. Sarkar, Nature **393**, 763 (1998).
- [23] R. Gambini and J. Pullin, Phys. Rev. D **59**, 124021 (1999).
- [24] J. Alfaro, H.A. Morales-Técolt and L.F. Urrutia, Phys. Rev. Lett. **84**, 2318 (2000).
- [25] J. Alfaro, H.A. Morales-Técolt and L.F. Urrutia, Phys. Rev. D **65**, 103509 (2002).
- [26] J.M. Carmona, J.L. Cortés, J. Gamboa and F. Méndez, “Noncommutativity in Field Space and Lorentz Invariance Violation”, hep-th/0207158.
- [27] F.A. Aharonian *et al.* Astron. and Astrophys. **349**, 11 (1999).
- [28] Para una introducción actualizada del tópico rayos cósmicos, vea por ejemplo: L. Biermann and G. Sigl, “Introduction to Cosmic Rays”, astro-ph/0202425.
- [29] A. Mucke, R. Engel, J.P. Rachen, R.J. Protheroe and T. Stanev, Comput. Phys. Commun. **124**, 290 (2000).

- [30] A. Mücke, R. Engel, J.P. Rachen, R.J. Protheroe and T. Stanev, *Phys. Rev. D* **62**, 093005 (2000).
- [31] H. Bethe and W. Heitler, *Proc. R. Soc. Lond. A* **83** 146 (1934).
- [32] M.J. Chodorowski, A.A. Zdziarski and M. Sikora, *Astrophys. J.* **400**, 181 (1992).
- [33] V. Berezhinsky, A.Z. Gazizov and S.I. Grigorieva, “Ultra high energy cosmic rays from extragalactic astrophysical sources: energy losses and spectra”, hep-ph/0107306; “On astrophysical solution to ultra high energy cosmic rays”, hep-ph/0204357.
- [34] S.T. Scully and F.W. Stecker, *Astropart. Phys.* **16**, 271 (2002).
- [35] Particle Data Group, K. Hagiwara *et al.*, *Phys. Rev. D* **66**, 010001 (2002).
- [36] O.E. Kalashev, V.A. Kuzmin, D.V. Semikoz and I.L. Tkachev, “Photons as Ultra High Energy Cosmic Rays ?”, astro-ph/0107130.
- [37] P.G. Tinyakov and I.I. Tkachev, “BL Lacertae are probable sources of the observed ultra-high energy cosmic rays”, astro-ph/0102476.
- [38] D.S. Gorbunov, P.G. Tinyakov, I.I. Tkachev and S.V. Troitsky, “Evidence for a connection between gamma-ray and highest-energy cosmic ray emissions by BL Lacs”, astro-ph/0204360.
- [39] T. Thiemann, *Class. Quant. Grav.* **15**, 839 (1998); **15**, 875 (1998); **15**, 1281 (1998); **15**, 1487 (1998).
- [40] A. Ashtekar, C. Rovelli and L. Smolin, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 237 (1992).
- [41] J. Zegwaard, *Phys. Lett. B* **200**, 217 (1993).
- [42] R. Borisso, *Phys. Rev. D* **49**, 923 (1994).
- [43] J. Iwasaki and C. Rovelli, *Int. J. Mod. Phys. D* **1**, 53 (1993); *Class. Quant. Grav.* **11**, 1653 (1994).
- [44] N. Grot and C. Rovelli, *Gen. Rel. Grav.* **29**, 1039 (1997).
- [45] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume I: Foundations*, (Cambridge University Press 1995).

- [46] M. Reyes, Comunicación personal.
- [47] J. Ellis, N.E. Mavromatos, D.V. Nanopoulos, *Gen. Rel. Grav.* **32**, 127 (2000).
- [48] J. Ellis, N.E. Mavromatos, D.V. Nanopoulos, “Probing Models of Quantum Space-Time Foam”, gr-qc/9909085.
- [49] S. Coleman and S.L. Glashow, *Phys. Lett. B* **405**, 249 (1997).
- [50] V.A. Kostelecky and R. Lehnert, *Phys. Rev. D* **63**, 065008 (2001).
- [51] F.A.E. Pirani, *Phys. Rev. D* **1**, 3224 (1970).
- [52] F.W. Stecker and O.C. De Jager, *Astrophys. J.* **566**, 738 (2002).
- [53] D. Sudarsky, L. Urrutia and H. Vucetich, “New Observational Bounds to Quantum Gravity Signals”, gr-qc/0204027.
- [54] J.M. Carmona and J.L. Cortés, *Phys. Rev. D* **65**, 025006 (2002).
- [55] H. Sahlmann and T. Thiemann, “Towards the QFT on Curved Spacetime Limit of QGR. I: A General Scheme”, gr-qc/0207030.
- [56] H. Sahlmann and T. Thiemann, “Towards the QFT on Curved Spacetime Limit of QGR. II: A Concrete Implementation”, gr-qc/0207031.
- [57] J.N. Bahcall and E. Waxman, “Has the GZK cutoff been discovered?”, hep-ph/0206217.
- [58] L. Urrutia, “Quantum Gravity Corrections to Particle Interactions”, gr-qc/0205103.
- [59] J. Alfaro and S. Gálvez, en preparación.
- [60] E. Waxman and J. Bahcall, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2292 (1997).
- [61] M. Vietri, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3690 (1998).