Teorías de gauge semiclásicas

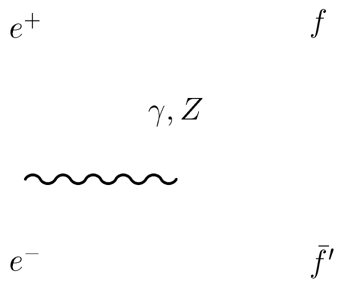
Pedro Alberto Labraña Moraga
Jorge Alfaro[1]
Facultad de Física, P. Universidad Católica de Chile

April 20, 2000

[1]Profesor Guía

Abstract

AGRADESIMIENTOS



Introducción

Las teorías de gauge, desde su nacimiento en 1918 en manos del físico-matemático Hermann Weyl, han evolucionado en el curso de los años hasta convertirse en un ingrediente fundamental, modelo guía, de todo sistema físico-matemático que pretenda explicar el mundo de las fuerzas fundamentales.

Su evolución, unida al progreso y asentamiento de la teoría cuántica de campos, fue un camino largo y no siempre sencillo, llevado a buen término por un cúmulo de grandes físicos, entre los cuales se destacan H. Weyl, London, C. Yang, R. Mills, Faddevv, Popov, Weinberg, Salam, P. Higgs, Kibble, M. Veltman, G. 't Hooft, Feynman y Gell-Mann.

Su historia comienza en 1918 dentro de un modelo propuesto por Weyl [1] para describir gravitación y electrodinámica en una misma perspectiva geométrica, en este trabajo aparecen por primera vez las expresiones $transformacion\ de\ gauge$ (Eich-) e $invarianza\ de\ gauge$.

Este primer intento resultó ser incorrecto, como lo hizo saber A. Einstein a Weyl, dentro de la extensa correspondencia que mantuvieron durante aquellos años, él en Berlin y Weyl en el ETH de Zürich. La objeción de Einstein, comunicada por primera vez en una postal con un contra ejemplo en ella [2], radicaba en que el modelo propuesto por H. weyl predecía que el comportamiento de un reloj dependería de su historia. Una clara contradicción con la evidencia empírica.

Sin embargo la idea sonaba interesante en la comunidad científica, aunque no parecía tener relevancia física.

Fue el mismo Weyl [3] quien en 1928 reinterpreta su teoría otorgándole el sentido, reconocido hoy, como el correcto. En este trabajo se reconoce por primera vez el rol de la invarianza de gauge como un *principio*, a partir del cual se puede generar la electrodinámica. Esta idea es la clave para el desarrollo posterior de las modernas teorías de campos.

En el tiempo en que este trabajo fue publicado no fue apreciado con el suficiente peso que se merecía, esto debido en gran parte a que no aportaba nueva física. Debieron transcurrir dos décadas para que el principio de invarianza de gauge, descubierto por Weyl, alcanzara el reconocimiento que hoy ostenta, al dar sus frutos en el entendimiento de las fuerzas fundamentales.

El camino hacia la consolidación de las teorías de gauge comenzó a aclararse en 1954 con el trabajo de Yang y Mills [4], quienes generalizan el principio de invarianza de gauge propuesto por Weyl para la electrodinámica (grupo abeliano) y lo utilizan en el caso de interacciones de Isospín (grupo SU(2) no-abeliano). En su trabajo ellos transforman la invarianza global del isospin en una local, introduciendo un nuevo campo vectorial, que con el tiempo llevaría sus nombres. Este trabajo, orientado a explicar las interacciones entre nucleones, muestra como el principio de invarianza local de gauge puede ser utilizado para construir teorías de campo, en una directa generalización de las ideas de Weyl para QED.

Las teorías de Yang-Mills, aunque claves, tienen el serio defecto de no poseer términos de masa en los campos vectoriales, lo que predice que las partículas portadoras de las fuerzas nucleares no tendrían masa, contradicción explicita a la evidencia experimental del corto alcance de estas fuerzas.

Esta objeción, proclamada duramente por Pauli en un seminario de Yang en Princeton (1954), es un serio problema al momento de hacer una teoría física, pero no fue obstáculo para que muchos trabajaran en este tipo de modelos aplicándolos a diferentes tópicos, por ejemplo Feynman en su primer intento de cuantizar la gravedad y Glashow en 1961, quien utiliza el Lagrangiano de Yang-Mills como punto de partida de su teoría electro-débil [5].

En 1967 Faddeev, Popov y Witt generan una cuantización autoconsistente para los campos de Yang-Mills sin masa. Ese mismo año S. Weinberg y A. Salam, independientemente, proponen un modelo unificado de las interacciones electromagnética y débil, en la cual los bosones vectoriales intermedios, están combinados en un multiplete de campos de Yang-Mills. Este modelo está basado en el mecanismo de generación de masa de los campos de gauge debido al rompimiento espontáneo de la simetría. Método propuesto tempranamente por P. Higgs [6] y Kibble, y conocido hoy como el mecanismo de Higgs.

Sin embargo aún persistía el problema de la renormalización de las teorías de campos, lo que generaba una sombra de dudas sobre ellas. En los 60's sólo dos teorías de campos eran renormalizables; QED y $\lambda\phi^4$. La primera con una clara realidad física y la segunda sólo un modelo matemático.

Los trabajos de G. 't Hooft en 1971 demostraron que las teorías de gauge son renormalizables y que el método de cuantización para los campos de Yang-Mills sin masa es aplicable en el caso de rompimiento espontáneo de la simetría, dando validez física a las teorías de gauge y al trabajo de tantas personas, entre ellos a Weinberg y Salam.

Por otro lado la teoría de las interacciones fuertes (aceptada hoy como válida) QCD también debe su fuerza al concepto de invarianza de gauge. La Cromodinámica cuántica (QCD) nace del modelo de Quarks (Gell-Mann y Ne'eman [7], [8] y [9]) al elevar la simetría del color al nivel de una invarianza de gauge SU(3) [10] y [11]. Este modelo junto con la teoría de Weinberg-Salam forman un matrimonio denominado $Modelo\, Estándar$ de las interacciones fundamentales, y aparentemente describe todas las fuerzas fundamentales conocidas (excluyendo a la gravitación).

Esta teoría, ciertamente, no es el modelo final de las interacciones entre partículas, ya que no explica el origen de las masas de los quarks o de varias constantes de acoplamiento. Tampoco es una teoría elegante, sin embargo reproduce muy bien un gran número de datos experimentales y además es una teoría renormalizable.

Como se ve, el ingrediente central del Modelo Estándar son las teorías de gauge. Ellas proporcionan el marco de trabajo adecuado y aseguran la renormalización del modelo. Además gracias a ellas fue posible explicar la libertad asintótica, punto históricamente importante en la aceptación del Modelo Estandar y en partícular de QCD como el modelo de las interacciones fuertes. Este fenómeno es una propiedad de las teorías de gauge no-abelianas que se traspasa directamente a QCD al ser ésta una de ellas.

En esta tesis se estudiaron las propiedades de una teoría de gauge no-abeliana sometida a una restricción, de manera que la integral funcional sea:

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \, e^{iS_0} \, \delta(D_\mu F_{\mu\nu}) \, . \tag{1}$$

Es decir los valores de A_μ están restringidos a los que cumplen con las ecuaciones de movimiento clásicas.

Lo interesante del trabajo es que esta ligazón se genera a partir de un tipo de transformación local de gauge.

Entonces, la idea del trabajo será generar la ligazón, no imponerla. Para esto se introducirá un nuevo campo B_μ y una nueva transformación δ_{ε_1}. Con estos dos nuevos elementos se construirá un Lagrangiano dependiente del campo de gauge usual A_μ y del campo auxiliar B_μ de modo que sea invariante bajo la transformación de gauge usual δ_{ε_0} y la nueva transformación δ_{ε_1}.

La expresión (1) aparecerá en el momento de calcular la integral funcional de este sistema.

Es interesante estudiar este modelo ya que:

- Hay indicios de que es una teoría que vive a un loop.
- Debido al punto anterior, cálculos como el de la funcion β serían exactos.
- Modelos similares, pero más simples, son solubles.
- Sería interesante saber si la restricción impuesta destruye la teoría cuántica de campos.
- Si ésta sobrevive:

  i) ¿Preserva propiedades de una teoría de campos usual? ¿Hay que renormalizarla?

  ii) La constante de acoplamiento, ¿depende de la energía? ¿Cual es su dependencia?

  iii) La teoría cuántica de campos del modelo, ¿retiene las propiedades características de una teoría de gauge usual? En particular, ¿presenta libertad asintótica?

Esta tesis está dividida en seis capítulos. Los primeros dos están orientados a generar el Lagrangiano invariante de la teoría. Para esto en el primer capítulo se definen las transformaciones y los campos involucrados en el formalismo y se generan los elementos necesarios para construir la densidad Lagrangiana, cuestión realizada en el capítulo 2. En este segundo capítulo se encuentran, además, las ecuaciones de movimiento y se deriva la expresión (1), al escribir la integral funcional del sistema.

En los capítulos siguientes se cuantiza la teoría, usando como marco de trabajo el método del Background Field y utilizando BRST para encontrar la contribución de los campos fantasmas.

Tanto el formalismo BRST como el método del Background Field están explicados, al menos en su parte medular, en los apéndices (A) y (B). Estos métodos debieron ser adaptados a nuestro caso, lo que fue realizado en los capítulos 3 y 4.

Con todas las cantidades que conforman la función generatriz ya encontradas se procedió a estudiar las propiedades cuánticas del modelo. En particular, concentramos el estudio en encontrar el comportamiento asintótico de la teoría. Para este efecto se calculó la función β, del grupo de renormalización, a un loop. Como sabemos el signo de β determina el comportamiento asintótico de la teoría al predecir el comportamiento de la constante de acoplamiento a diferentes escalas de energía. La importancia de la funcion β en la determinación del comportamiento asintótico de la teoría será discutida en el apéndice (C).

En el capítulo 5 se derivaron las reglas de Feynnman del modelo, encontrándose los propagadores y los vértices relevantes para el cálculo de la función β a un loop. El capítulo 6 esta dedicado al cálculo explícito de dicha función, utilizando el método del Background Field, regularización dimensional y sustracción minimal como marco de trabajo, además de las expresiones deducidas en el capítulo 5.

Esta tesis termina con el capítulo 7 donde se escriben las conclusiones del trabajo realizado y se esboza el trabajo futuro.

Chapter 1

Transformaciones

En este capítulo presentaremos un conjunto de transformaciones homogéneas e inhomogéneas, entre las cuales se pueden reconocer las transformaciones de gauge usuales. Demostraremos que éstas forman un álgebra cerrada y deduciremos a partir de ellas las derivadas covariantes. Con las derivadas covariantes encontraremos el tensor de curvatura del espacio de carga ($F_{\mu\nu}$ y $\tilde{F}_{\mu\nu}$).

Para cada una de estas cantidades generadas deduciremos su regla de transformación, produciendo un conjunto de objetos que transforman de una manera definida (homogénea o inhomogéneamente) y que serán candidatos para construir una densidad lagrangiana.

Finalmente se encontrarán los invariantes cuadráticos escalares que permitirán formar el lagrangiano invariante de la teoría.

1.1 Notación

Trabajaremos con un grupo de Lie arbitrario, de generadores T_i y constantes de estructura C_{ij}^k.

$$[T_i, T_j] = C_{ij}^k \, T_k. \tag{1.1}$$

Los campos A_μ^k y B_μ^k tienen un índice k que pertenece al grupo y que corre desde $1 \longrightarrow N$. Donde N es la dimensión del grupo. El índice μ es del espacio de Minkowski y va desde $0 \longrightarrow 3$. La métrica que usaremos será

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Los parámetros de las transformaciones ε_0^i y ε_1^i también tienen un índice en el grupo. Por comodidad definiremos los campos y parámetros de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A_\mu &= A_\mu^k T_k \\ B_\mu &= B_\mu^k T_k \\ \varepsilon_0 &= \varepsilon_0^i T_i \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_1^i T_i \end{aligned} \tag{1.3}$$

1.2 Transformaciones

Las transformaciones están divididas en dos clases, homogéneas e inhomogéneas y actúan sobre pares de campos, que llamaremos escalares y vectoriales, respectivamente.

Transformaciones homogéneas:(Escalares)

$$\delta_\varepsilon A = [\varepsilon_0, A] \tag{1.4}$$

$$\delta_\varepsilon B = [\varepsilon_0, B] + [\epsilon_1, A]. \tag{1.5}$$

Actúan sobre pares de campos (A, B) que llamaremos campos escalares, por su forma de transformar. Estos pares los reuniremos en un solo campo escalar Φ definido por:

$$\Phi = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},$$

donde siempre la 1^{ra} componente de Φ transforma según (1.4) y la 2^{da} lo hará siguiendo a (1.5).

Transformaciones inhomogéneas:(Vectoriales)

$$\delta_\varepsilon A_\mu = \partial_\mu \varepsilon_0 + [\varepsilon_0, A_\mu] \tag{1.6}$$

$$\delta_\varepsilon B_\mu = [\varepsilon_0, B_\mu] + \partial_\mu \varepsilon_1 + [\varepsilon_1, A_\mu]. \tag{1.7}$$

Estas actúan sobre pares de campos (A_μ, B_μ) que llamaremos vectoriales y reuniremos en un solo campo vectorial Ψ_μ:

$$\Psi_\mu = \left(\begin{array}{c} A_\mu \\ B_\mu \end{array} \right).$$

Notar que los parámetros de las transformaciones son dos ε_0 y ε_1. Luego cuando escribimos ε, queremos decir:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} . \tag{1.8}$$

Como justificación de los apellidos dados a los campos Φ y Ψ (escalar y vectorial) debemos decir que bajo el parámetro ε_0 los campos A y B transforman como campos escalares en la representación adjunta del grupo, lo que justifica el apellido de Φ. Además el campo A_μ transforma como un campo de gauge usual bajo el parámetro ε_0, lo que concuerda con el apellido puesto a Ψ.

Finalmente debemos recalcar que una pareja de campos $(S,\, T)$ será del tipo Φ o Ψ, dependiendo sólo de la regla de transformación de sus componentes.

1.3 Derivadas covariantes

Siempre actuarán sobre pares de campos escalares (i.e. sobre Φ), y están definidas, por componentes, así:

$$D_\mu A = \partial_\mu A - [A_\mu, A] \tag{1.9}$$

$$D_\mu B = \partial_\mu B - [A_\mu, B] - [B_\mu, A] \,, \tag{1.10}$$

de manera que sean consistentes con las transformaciones (1.8 y 1.7) es decir que se cumpla:

$$\delta_\varepsilon \Psi_\mu = D_\mu \varepsilon \;,$$

o por componentes que se cumpla:

$$\delta_\varepsilon A_\mu = D_\mu \varepsilon_0$$

$$\delta_\varepsilon B_\mu = D_\mu \varepsilon_1 \,.$$

Pensando en los cálculos venideros es importante demostrar que las derivadas covariantes, definidas en (1.9) y (1.10), forman un campo escalar, es decir, transforman como Φ. Demostraremos entonces que:

$$\begin{pmatrix} D_\mu A \\ D_\mu B \end{pmatrix} = \Phi_\mu .$$

Para demostrar ésto debemos calcular las variaciones $\delta_\varepsilon(D_\mu A)$ y $\delta_\varepsilon(D_\mu B)$:

i)

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon\left(D_\mu A\right) &= \delta_{\varepsilon_0} D_\mu A \\ &= \delta_{\varepsilon_0}\left(\partial_\mu A - [A_\mu, A]\right). \end{aligned}$$

Con un poco de álgebra, y despreciando términos de 2^{do} orden en ε_0 obtenemos, luego de usar la identidad de Jacobi:

$$\delta_{\varepsilon_0}\left(D_\mu A\right) = [\varepsilon_0, \partial_\mu A] + [\varepsilon_0, [A, A_\mu]] = [\varepsilon_0, \partial_\mu A - [A, A_\mu]],$$

por lo tanto:

$$\delta_{\varepsilon_0}\left(D_\mu A\right) = [\varepsilon_0, D_\mu A],$$

además $\delta_{\varepsilon_1}\left(D_\mu A\right) = 0$.

ii)

$$\delta_\varepsilon\left(D_\mu B\right) = \delta_{\varepsilon_0}\left(D_\mu B\right) + \delta_{\varepsilon_1}\left(D_\mu B\right),$$

primero calculamos:

$$\begin{aligned} \delta_{\varepsilon_0}\left(D_\mu B\right) &= \delta_{\varepsilon_0}\left(\partial_\mu B - [A_\mu, B] - [B_\mu, A]\right) \\ &= \partial_\mu\left(\delta_{\varepsilon_0} B\right) - [\delta_{\varepsilon_0} A, B] - [A_\mu, \delta_{\varepsilon_0} B] - [\delta_{\varepsilon_0} B, A] - [B_\mu, \delta_{\varepsilon_0} A], \end{aligned}$$

donde también, despreciamos términos de 2^{do} orden en los parámetros. Reemplazando el valor de las variaciones y usando la identidad de Jacobi para cada par de términos semejantes resulta:

$$\begin{aligned} \delta_{\varepsilon_0}\left(D_\mu B\right) &= [\varepsilon_0, \partial_\mu B] + [\varepsilon_0, [B, A_\mu]] + [\varepsilon_0, [A, B_\mu]] \\ &= [\varepsilon_0, D_\mu B] \end{aligned}$$

y por último

$$\delta_{\varepsilon_1}\left(D_\mu B\right) = \delta_{\varepsilon_1}\left(\partial_\mu B - [A_\mu, B] - [B_\mu, A]\right)$$

$$= \partial_\mu (\delta_{\varepsilon_1} B) - [A_\mu, \delta_{\varepsilon_1} B] - [\delta_{\varepsilon_1} B_\mu, A] \,,$$

ya que $\delta_{\varepsilon_1} A = \delta_{\varepsilon_1} A_\mu = 0$. Reemplazando (1.5) y (1.7) en la relación anterior obtenemos:

$$\delta_{\varepsilon_1} (D_\mu B) = [\varepsilon_1, \partial_\mu A] - [A_\mu, [\varepsilon_1, A]] + [A, [\varepsilon_1, A_\mu]] \,.$$

Usando Jacobi

$$\begin{aligned} \delta_{\varepsilon_1} (D_\mu B) &= [\varepsilon_1, \partial_\mu A + [A, A_\mu]] \\ &= [\varepsilon_1, D_\mu A] \,. \end{aligned}$$

En resumen:

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon (D_\mu A) &= [\varepsilon_0, D_\mu A] \\ \delta_\varepsilon (D_\mu B) &= [\varepsilon_0, D_\mu B] + [\varepsilon_1, D_\mu A] \,. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Por lo tanto las derivadas covariantes transforman homogéneamente, luego es correcto considerarlas como componentes de un campo escalar.

$$\Phi_\mu = \begin{pmatrix} D_\mu A \\ D_\mu B \end{pmatrix}$$

1.4 Curvatura

El tensor de curvatura lo encontramos calculando el conmutador de las derivadas covariantes.

$$[D_\mu, D_\nu] \Phi = D_\mu (D_\nu \Phi) - D_\nu (D_\mu \Phi) \,.$$

No debemos olvidar que $D_\mu \Phi$ es un escalar y por lo tanto, cada componente de él transforma homogéneamente siguiendo (1.4) y (1.5), como se demostró en la sección anterior. Por tanto la segunda derivada covariante, respecto a él, tiene como argumentos componentes (A, B) de un campo escalar que para este caso serán $(D_\mu A, D_\mu B)$ respectivamente.

$$[D_\mu, D_\nu] \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = D_\mu \begin{pmatrix} D_\nu A \\ D_\nu B \end{pmatrix} - D_\nu \begin{pmatrix} D_\mu A \\ D_\mu B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_\mu (D_\nu A) - [A_\mu, D_\nu A] \\ \\ \partial_\mu (D_\nu B) - [A_\mu, D_\nu B] - [B_\mu, D_\nu A] \end{pmatrix} - (\mu \longleftrightarrow \nu).$$

Por comodidad desarrollamos cada componente en forma separada:

Primera componente:

$$1^{era}\, componente \ = \partial_\mu (D_\nu A) - [A_\mu, D_\nu A] - \partial_\nu (D_\mu A) - [A_\nu, D_\mu A]$$

$$= [A, [A_\nu, A_\mu]] - [\partial_\mu A_\nu, A] + [\partial_\nu A_\mu, A] \,,$$

ordenando queda:

$$1^{era}\, componente \ = [A, \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\nu, A_\mu]] \,. \tag{1.12}$$

Segunda componente:
Para la segunda componente tenemos:

$$2^{da}\, componente \ = \partial_\mu (D_\nu B) - [A_\mu, D_\nu B] - [B_\mu, D_\nu A] - (\mu \longleftrightarrow \nu).$$

Agrupamos los términos que contienen derivadas en la siguiente expresión:

$$i) = -\partial_\mu [A_\nu, B] + \partial_\nu [A_\mu, B] - \partial_\mu [B_\nu, A] + \partial_\nu [B_\mu, A]$$

$$- [A_\mu, \partial_\nu B] + [A_\nu, \partial_\mu B] - [B_\mu, \partial_\nu A] + [B_\nu, \partial_\mu A] \,,$$

con un poco de álgebra obtenemos:

$$i) = [B, \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu] + [A, \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu] \,.$$

Los términos restantes son:

$$ii) = [A_\mu, [A_\nu, B]] - [A_\nu, [A_\mu, B]] + [A_\mu, [B_\nu, A]] - [A_\mu, [B_\nu, A]] + [B_\mu, [A_\nu, A]] - [B_\nu, [A_\mu, A]]\,,$$

que se agrupan, usando la identidad de Jacobi, para formar:

$$ii) = [B, [A_\nu, A_\mu]] + [A, [B_\nu, A_\mu]] + [A, [A_\nu, B_\mu]]\,.$$

sumando $i) + ii)$ obtenemos:

$$2^{da}\, componente\, = [B, \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\nu, A_\mu]] + [A, \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + [B_\nu, A_\mu] + [A_\nu, B_\mu]]\,.$$

Reagrupando las dos componentes llegamos al siguiente resultado:

$$[D_\mu, D_\nu] \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A, F_{\mu\nu}] \\ [B, F_{\mu\nu}] + \left[A, \tilde{F}_{\mu\nu}\right] \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

donde definimos:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\nu, A_\mu] \\ \tilde{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + [B_\nu, A_\mu] + [A_\nu, B_\mu]. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Debido a que las derivadas covariantes de un campo escalar, son también un campo escalar, tenemos que $F_{\mu\nu}$ y $\tilde{F}_{\mu\nu}$ son las componentes de un campo que transforma homogéneamente, es decir de un campo escalar:

$$\Phi_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_{\mu\nu} \\ \tilde{F}_{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

1.5 Invariantes escalares

Buscamos invariantes cuadráticos formados con escalares. La idea es usarlos para cons-truir el Lagrangiano invariante de la teoría. Estos deben ser de la forma:

$$Tr\left(A^2\right);\; Tr\left(B^2\right);\; Tr\,(A\,B)\,.$$

Ahora, hay que ver cual de estas cantidades son invariantes bajo las transformaciones

$$\delta_\varepsilon A = [\varepsilon_0, A]$$

$$\delta_\varepsilon B = [\varepsilon_0, B] + [\varepsilon_1, A]$$

Comenzamos con:

1) $Tr\,(A^2)$:

$$\delta_\varepsilon Tr\left(A^2\right) = \delta_{\varepsilon_0} Tr\left(A^2\right) = 2Tr\,(A\,\delta_{\varepsilon_0} A) = 2Tr\,(A\;[\varepsilon_0, A])$$

$$= 2Tr\,(A\,\varepsilon_0\,A - A\,A\,\varepsilon_0) = 2Tr\,(A\,\varepsilon_0\,A - A\,\varepsilon_0\,A) = 0$$

donde en la última expresión cambiamos cíclicamente el 2^{do} término.

Por lo anterior $Tr\,(A^2)$ es un buen candidato para estar en $\mathcal{L}$. Seguimos con:

2) $Tr\,(B^2)$:

$$\delta_\varepsilon Tr\left(B^2\right) = \delta_{\varepsilon_0} Tr\left(B^2\right) + \delta_{\varepsilon_1} Tr\left(B^2\right).$$

La primera expresión da:

$$\delta_{\varepsilon_0} Tr\left(B^2\right) = 2Tr\,(B\,\delta_{\varepsilon_0} B) = 2Tr\,(B\;[\varepsilon_0, B]) = 0$$

repitiendo el procedimiento de 1). Hasta aquí todo bien, pero falta el 2^{do} término.

$$\delta_{\varepsilon_1} Tr\left(B^2\right) = 2Tr\,(B\,\delta_{\varepsilon_1} B)$$

$$= 2Tr\,(B\;[\varepsilon_1, A]) = 2Tr\,(B\,\varepsilon_1\,A - B\,A\,\varepsilon_1) \neq 0\,,$$

ya que no hay forma de transformar ciclicamente $(B\,\varepsilon_1\,A)$ en $(B\,A\,\varepsilon_1)$. Luego $Tr\,(B^2)$ no es invariante.

3) $Tr\,(A\,B)$:

$$\delta Tr\,(A\,B) = \delta_{\varepsilon_0} Tr\,(A\,B) + \delta_{\varepsilon_1} Tr\,(A\,B)\,.$$

Calculamos estos dos términos en forma separada:

$$\delta_{\varepsilon_0} Tr\,(A\,B) = Tr\,(\delta_{\varepsilon_0} A\,B + A\,\delta_{\varepsilon_0} B) = Tr\,([\varepsilon_0, A]\,B + A\,[\varepsilon_0, B])$$

$$= Tr\,(\varepsilon_0\,A\,B - A\,\varepsilon_0\,B + A\,\varepsilon_0\,B - A\,B\,\varepsilon_0) = 0\,,$$

ya que el 2^{do} término se cancela con el 3^{ro} y los restantes se cancelan entre sí al usar la propiedad cíclica de la traza. El término faltante da:

$$\delta_{\varepsilon_1} Tr\,(A\,B) = Tr\,(A\,\delta_{\varepsilon_1} B) = Tr\,(A\,[\varepsilon_1, A]) = 0$$

si repetimos el cálculo hecho en 1).

Por lo tanto los invariantes escalares serán dos:

$$Tr\left(A^2\right)\; y\, Tr\,(A\,B)\,.$$

Construiremos el Lagrangiano invariante de la teoría usando estas expresiones, que nos garantizarán invarianza de Lorentz e invarianza de gauge.

Chapter 2

El Lagrangiano

En este capítulo crearemos el Lagrangiano invariante de la teoría, el cual será construído con los resultados y expresiones del capítulo anterior.

También deduciremos las ecuaciones de movimiento clásicas, mostrando que el campo A_μ^k se rige por las ecuaciones de movimiento de un campo de gauge usual.

Mostraremos como esta densidad Lagrangiana induce la aparición de la delta de Dirac en la integral funcional, al integrar el campo auxiliar B_μ^k. Haciendo explícita, de este modo, la equivalencia entre nuestro modelo y una teoría de gauge sometida a una restricción.

2.1 El Lagrangiano invariante

Si queremos un Lagrangiano invariante de Lorentz y que ademas lo sea bajo las transformaciones del capítulo uno, éste debe estar construido con los invariantes cuadráticos de la sección (1.5). Es decir debe ser de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_0 = C_1\, Tr\left(A^2\right) + C_2\, Tr\left(A\, B\right) \tag{2.1}$$

donde C_1 y C_2 son constantes. Como en la sección (1.4) se obtuvo que:

$$\Phi_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_{\mu\nu} \\ \tilde{F}_{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

podemos hacer la siguiente identificación:

$$A \longrightarrow F_{\mu\nu}$$
$$B \longrightarrow \tilde{F}_{\mu\nu}$$

luego el Lagrangiano será:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{8g^2} Tr \left(F_{\mu\nu} \, F_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2g'} Tr \left(F_{\mu\nu} \, \tilde{F}_{\mu\nu} \right) \tag{2.2}$$

donde las constantes C_1 y C_2 se han escogido de modo de estar en concordancia con la notación estándar.

La siguiente condición de renormalización para los generadores siempre se puede satisfacer si trabajamos con grupos de Lie compactos y semisimples [12]

$$Tr \left(T_i \, T_j \right) = -2\delta_{ij} \, .$$

Esta condición tambien implica la antisimetría de las constantes de estructura. Usamos esta condición para reescribir (2.2)

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4g^2} F^k_{\mu\nu} F^k_{\mu\nu} + \frac{1}{g'} F^k_{\mu\nu} \tilde{F}^k_{\mu\nu} \, , \tag{2.3}$$

donde

$$F^k_{\mu\nu} = \partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu A^k_\mu + C^k_{ij} \, A^i_\nu \, A^j_\mu$$

$$\tilde{F}^k_{\mu\nu} = \partial_\mu B^k_\nu - \partial_\nu B^k_\mu + C^k_{ij} \, B^i_\nu \, A^j_\mu + C^k_{ij} \, A^i_\nu \, B^j_\mu$$

si usamos la notación definida en la sección (1.1).

El 1^{er} término en (2.3) corresponde a la densidad Lagrangiana de una teoría de gauge no abeliana usual y el 2^{do} término es una expresión nueva, lineal en el campo $B_\mu(x)$ y sugerida por las transformaciones del capítulo uno.

Las constantes g y g' pueden ser absorbidas por los tensores $F^k_{\mu\nu}$ y $\tilde{F}^k_{\mu\nu}$ al realizar un cambio de escala en los campos A_μ y B_μ.

$$A_\mu \longrightarrow gA_\mu$$
$$B_\mu \longrightarrow \tilde{g}B_\mu$$

luego

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F^k_{\mu\nu} F^k_{\mu\nu} + F^k_{\mu\nu} \tilde{F}^k_{\mu\nu} \, , \tag{2.4}$$

donde definimos $g' = g\tilde{g}$ y los tensores de curvatura ahora son:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu + g\left[A_\nu, A_\mu\right]$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu + \partial_\nu B_\mu + g\left[B_\nu, A_\mu\right] + g\left[A_\nu, B_\mu\right] .$$

Podemos notar que la teoría posee sólo una constante de acoplamiento y esta es g.

Por comodidad preferiremos trabajar con el Lagrangiano escrito en (2.3), teniendo siempre en mente que la constante de acoplamiento es g y que $\mathcal{L}_0$ se puede escribir de la forma (2.4).

2.2 Ecuaciones clásicas de movimiento

Las ecuaciones clásicas de movimiento del sistema:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4g^2} F^k_{\mu\nu} F^k_{\mu\nu} + \frac{1}{g'} F^k_{\mu\nu} \tilde{F}^k_{\mu\nu} \, ,$$

se encuentran usando la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \phi^k_\alpha} - \partial_\beta \left[\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \left(\partial_\beta \phi^k_\alpha\right)} \right] = 0.$$

- 1^{er} Conjunto de ecuaciones de movimiento:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial B^i_\mu} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \Big(\partial_\nu B^i_\mu\Big)} \right] = 0,$$

que implica:

$$\frac{2}{g'} C^k_{ij} \, A^j_\nu \, F^k_{\nu\mu} - \frac{2}{g'} \, \partial_\nu F^i_{\nu\mu} = 0. \tag{2.5}$$

Como las constantes de estructura son completamente antisimétricas ($C^k_{ij} = f_{ijk}$), podemos escribir (2.5) de esta manera:

$$\partial_\nu F^i_{\nu\mu} - f_{jki}\, A^j_\nu\, F^k_{\nu\mu} = 0,$$

que es justamente

$$(D_\nu F_{\nu\mu})^i = 0,$$

si recordamos la definición de derivada covariante formulada en el capítulo uno.

- 2^{do} Conjunto de ecuaciones de movimiento:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A^i_\mu} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \Big(\partial_\nu A^i_\mu \Big)} \right] = 0.$$

Reemplazando las expresiones y ordenando obtenemos

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{g^2} \left(\partial_\nu F^i_{\nu\mu} - C^k_{ij}\, A^j_\rho\, F^k_{\rho\mu} \right) \\ -&\tfrac{2}{g'} \left(\partial_\nu \tilde{F}^i_{\nu\mu} - C^k_{ij}\, B^j_\rho\, F^k_{\rho\mu} - C^k_{ij}\, A^j_\rho\, \tilde{F}^k_{\rho\mu} \right) = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Si volvemos a usar la antisimetría de las constantes de estructura obtenemos que (2.6) se puede escribir como:

$$\frac{1}{g^2} \left(D_\mu F_{\mu\nu} \right)^k - \frac{2}{g'} \left(D_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} \right)^k = 0. \tag{2.7}$$

Por lo tanto las ecuaciones de movimiento serán

$$\left(D_\mu F_{\mu\nu} \right)^k = 0$$

$$\left(D_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} \right)^k = 0,$$

que se pueden escribir en nuestra notación como

$$D_\mu \begin{pmatrix} F_{\mu\nu} \\ \tilde{F}_{\mu\nu} \end{pmatrix} = 0. \tag{2.8}$$

Es interesante notar que el campo A_μ se rige por las ecuaciones de movimiento de un campo de gauge no abeliano. Además su regla de transformación corresponde a la de dicho campo, por lo que concluimos que el campo A_μ corresponde a un genuino campo de gauge no abeliano.

El campo auxiliar B_μ, en el marco de la integral funcional, generará una restricción sobre el campo A_μ, obligándolo a cumplir siempre las ecuaciones clásicas de movimiento, como se demostrará en la siguiente sección.

2.3 La Delta de Dirac

Mostraremos como es posible generar la ligazón, al explotar el hecho de que al campo B_μ aparece sólo linealmente en el Lagrangiano.

Tenemos que la función generatriz Z es:

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \, \mathcal{D}B_\mu \, e^{iS} \,,$$

con

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4g^2} F^k_{\mu\nu} F^k_{\mu\nu} + \frac{1}{g'} F^k_{\mu\nu} \tilde{F}^k_{\mu\nu} \right\} .$$

Nos concentramos en el 2^{do} término de S

$$S' = \frac{1}{g'} \int d^4x \; F^k_{\mu\nu} \tilde{F}^k_{\mu\nu}$$

$$= \frac{1}{g'} \int d^4x \; F^k_{\mu\nu} \left(\partial_\mu B^k_\nu - \partial_\nu B^k_\mu + C^k_{ij} \, B^i_\nu \, A^j_\mu + C^k_{ij} \, A^i_\nu \, B^j_\mu \right) .$$

Integramos por partes las primeras dos cantidades obteniendo:

$$S' = \frac{1}{g'} \int d^4x \; \left\{ -2 \, B^k_\nu \, \partial_\mu F^k_{\mu\nu} + F^k_{\mu\nu} \left(C^k_{ij} \, B^i_\nu \, A^j_\mu + C^k_{ij} \, A^i_\nu \, B^j_\mu \right) \right\} .$$

Ahora usamos las propiedades de las constantes de estructura para modificar los dos últimos términos.

$$i) = F^k_{\mu\nu} \, C^k_{ij} \, B^i_\nu \, A^j_\mu = F^k_{\mu\nu} \, f_{ijk} \, B^i_\nu \, A^j_\mu$$

$$= B^i_\nu \, f_{jki} \, A^j_\mu \, F^k_{\mu\nu} = B^i_\nu \, [A_\mu, F_{\mu\nu}]^i \, .$$

De igual modo

$$ii) = F^k_{\mu\nu} \, C^k_{ij} \, A^i_\nu \, B^j_\mu = B^j_\mu \, [A_\nu, F_{\nu\mu}]^j \, .$$

Reescribimos S' utilizando estos resultados:

$$S' = -\frac{2}{g'} \int d^4x \left\{ B^k_\nu \left(\partial_\mu F^k_{\mu\nu} - [A_\mu, F_{\mu\nu}]^k \right) \right\}$$

$$= -\frac{2}{g'} \int d^4x \;\; B^k_\nu \, (D_\mu F_{\mu\nu})^k \, ,$$

donde se usó la definición de derivada covariante.

A la luz de estos cálculos la función generatriz toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Z &= \textstyle\int \mathcal{D}A_\mu \, \mathcal{D}B_\mu \, e^{iS_0} \, e^{-i\frac{2}{g'} \int d^4x \, (D_\mu F_{\mu\nu})^k B^k_\nu} \\ &= \textstyle\int \mathcal{D}A_\mu \, e^{iS_0} \, \delta(D_\mu F_{\mu\nu})^k \end{aligned} \tag{2.9}$$

con

$$S_0 = -\frac{1}{4g^2} \int d^4x \;\; F^k_{\mu\nu} F^k_{\mu\nu} \, ,$$

donde se utilizó la representación integral, de la delta de Dirac.

$$\delta(\phi) = \int \mathcal{D}B \; e^{-i \int d^4x \, B(x) \phi(x)}.$$

De este modo tenemos que el modelo generado a partir de las transformaciones del capítulo 1, es equivalente a una teoría de gauge no-abeliana sometida a una restricción (2.9). Este tipo de teoría es la que deseamos estudiar y la hemos generado a partir de un modelo con Lagrangiano (2.3).

Aprovechando esta situación es que se estudiará la teoría de gauge con restricción, estudiando al nuevo modelo. Es decir se estudiará el modelo generado en los capítulos anteriores:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4g^2} F^k_{\mu\nu} F^k_{\mu\nu} + \frac{1}{g'} F^k_{\mu\nu} \tilde{F}^k_{\mu\nu} \, ,$$

como si desconociéramos su equivalencia con una teoría tipo:

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \, e^{iS_0} \, \delta(D_\mu F_{\mu\nu}) \, ,$$

colocando en igual importancia al campo de gauge A_μ y al auxiliar B_μ.

De este modo se encontrarán los propagadores del modelo, tanto los relacionados con el campo A_μ como los del campo B_μ y se encontrarán los vértices, que el Lagrangiano (2.3) nos proporciona, para el cálculo de la función β del grupo de renormalización.

El tipo de diagramas que se pueden construir con estos propagadores y vértices, dejarán ver que el campo B_μ es un campo auxiliar y que este modelo corresponde a una teoría tipo (1). De esta manera y en virtud de la relación (2.9) los resultados de este modelo serán equivalentes a los de una teoría de gauge con restricción.

En los siguientes capítulos se cuantizará este modelo, siguiendo el esquema del Background Field y usando el formalismo BRST para encontrar el término compensatorio de Faddeev-Popov.

Chapter 3

Transformaciones BRST

Como se explica en el apéndice B la invarianza BRST es un método simple y económico para encontrar la contribución de los campos fantasmas a la teoría, debido a esta razón será el utilizado por nosotros, en el capítulo 4, para encontrar el término compensatorio de Faddeev-Popov de nuestro modelo.

En este capítulo se generalizará el formalismo BRST para adaptarlo a nuestras transformaciones y campos.

3.1 Transformaciones BRST para nuestro modelo

Comenzaremos con las transformaciones BRST de los campos de gauge A_μ y B_μ, si-guiendo el esquema del apéndice B. Para ésto, recordemos primero las transformaciones de gauge definidas en el capítulo uno.

- Transformaciones homogéneas:

$$\delta_\epsilon A = [\epsilon_0, A] \tag{3.1}$$

$$\delta_\epsilon B = [\epsilon_0, B] + [\epsilon_1, A]. \tag{3.2}$$

- Transformaciones inhomogéneas:

$$\delta_\epsilon A_\mu = [\epsilon_0, A_\mu] + \partial_\mu \epsilon_0 \tag{3.3}$$

$$\delta_\epsilon B_\mu = [\epsilon_0, B_\mu] + [\epsilon_1, A_\mu] + \partial_\mu \epsilon_1 \,. \tag{3.4}$$

Donde ε significa:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

Transformaciones BRST:

Se definen a partir de las transformaciones de gauge, al cambiar el parámetro de la transformación por $(-\eta\lambda)$. Donde $\eta(x)$ es un campo (no un parámetro infinitesimal) y los dos (η y λ) son números de Grassmann impares. En nuestro caso.

$$\varepsilon \longrightarrow -\begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \lambda.$$

En concreto la transformación BRST ($\delta'\Phi_\mu$), queda definida por:

$$\delta\Phi_\mu = \delta'\Phi_\mu\lambda.$$

Escrita por componentes es:

$$\delta' A_\mu^k = -\left(\partial_\mu \eta_0^k + C_{ij}^k\, \eta_0^i A_\mu^j\right) \tag{3.5}$$

$$\delta' B_\mu^k = -\left(\partial_\mu \eta_1^k + C_{ij}^k \eta_1^i A_\mu^j + C_{ij}^k \eta_0^i B_\mu^j\right). \tag{3.6}$$

Las transformaciones de los escalares son:

$$\delta' A^k = -\left(C_{ij}^k\, \eta_0^i A^j\right) \tag{3.7}$$

$$\delta' B^k = -\left(C_{ij}^k \eta_1^i A^j + C_{ij}^k \eta_0^i B^j\right). \tag{3.8}$$

3.2 Nilpotencia de las transformaciones BRST

Como sabemos, las transformaciones BRST son nilpotentes y es esta condición la que determina la regla de transformación de los η's. Es decir imponemos:

$$\delta'(\delta'\Psi_\mu) = 0, \tag{3.9}$$

y encontramos $\delta'\eta$ que sea compatible con esta condición.

- La condición (3.9) implica dos ecuaciones que se deben satisfacer (una por cada componente), la primera es:

$$\delta'\left(\delta' A_\mu\right) = 0.$$

Calculamos:

$$\delta\left(\delta' A_\mu\right) = \delta\left[-(\partial_\mu \eta_0^k + C_{ij}^k\,\eta_0^i A_\mu^j)\right] = -\left[\partial_\mu(\delta\eta_0^k) + C_{ij}^k(\delta\eta_0^i)A_\mu^j + C_{ij}^k\,\eta_0^i(\delta A_\mu^j)\right]$$
$$= -\left[\partial_\mu(\delta'\eta_0^k) + C_{ij}^k(\delta'\eta_0^i)A_\mu^j + C_{ij}^k\,\eta_0^i(\delta' A_\mu^j)\right]\lambda = \delta'\left(\delta' A_\mu\right)\lambda.$$

Luego la condición será:

$$\partial_\mu\left(\delta'\eta_0^k\right) + C_{ij}^k\,\left(\delta'\eta_0^i\right)A_\mu^j + C_{ij}^k\,\eta_0^i\left(\delta' A_\mu^j\right) = 0. \tag{3.10}$$

Supongamos que el campo η_0 transforma de la siguiente forma:

$$\delta'\eta_0^k = \frac{1}{2}C_{ij}^k\eta_0^i\eta_0^j\,, \tag{3.11}$$

dejando el lado izquierdo de la ec. (3.10) igual a:

$$\frac{1}{2}C_{ij}^k\,\partial_\mu\left(\eta_0^i\eta_0^j\right) + C_{ij}^k\,\left(\frac{1}{2}C_{\alpha\beta}^i\,\eta_0^\alpha\eta_0^\beta\right)A_\mu^j - C_{ij}^k\,\eta_0^i\left(\partial_\mu\eta_0^j + C_{\alpha\beta}^j\,\eta_0^\alpha A_\mu^\beta\right).$$

El primer y tercer término se cancelan mutuamente, recordando que los η's anticonmutan y que $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$, por lo que obtenemos que la ecuación (3.10) se ve como:

$$\frac{1}{2}C_{ij}^k\,C_{\alpha\beta}^i\,\eta_0^\alpha\eta_0^\beta A_\mu^j - C_{ij}^k\,C_{\alpha\beta}^j\,\eta_0^\alpha A_\mu^\beta\,.$$

Usamos la identidad de Jacobi

$$C_{li}^m C_{mj}^k + C_{lj}^m C_{mk}^i + C_{lk}^m C_{mi}^j = 0 \tag{3.12}$$

para reescribir el primer término

$$\frac{1}{2}C_{ij}^k C_{\alpha\beta}^i = -\frac{1}{2}\left[C_{\alpha j}^i C_{ik}^\beta + C_{\alpha k}^i C_{i\beta}^j\right]$$

reemplazando

$$(3.10) = -\frac{1}{2}C_{\alpha j}^i C_{ik}^\beta\,\eta_0^\alpha\eta_0^\beta A_\mu^j - \frac{1}{2}C_{\alpha k}^i C_{i\beta}^j\,\eta_0^\alpha\eta_0^\beta A_\mu^j - C_{ij}^k C_{\alpha\beta}^j\eta_0^i\,\eta_0^\alpha A_\mu^\beta$$

Si suponemos que las constantes de estructura del grupo son completamente antisimétricas ($C_{ij}^k = f_{ijk}$) entonces los dos primeros términos se suman dejando a la ecuación (3.10) igual a:

$$(3.10) = -f_{\alpha ji}f_{ik\beta}\,\eta_0^\alpha\eta_0^\beta A_\mu^j - f_{ijk}f_{\alpha\beta j}\,\eta_0^i\eta_0^\alpha A_\mu^\beta$$
$$= -f_{\alpha\beta j}f_{jki}\,\eta_0^\alpha\eta_0^i A_\mu^\beta - f_{ijk}f_{\alpha\beta j}\,\eta_0^i\eta_0^\alpha A_\mu^\beta = 0,$$

probando que la transformación (3.11) para el campo η_0 es la correcta.

- La segunda componente de la ec.(3.9) implica:

$$\delta'\left(\delta' B_\mu\right)=0.$$

Procediendo de igual modo obtenemos que la ecuación a satisfacer es:

$$\partial_\mu\left(\delta'\eta_1^k\right)+C_{ij}^k\left(\delta'\eta_1^i\right)A_\mu^j+C_{ij}^k\,\delta'\eta_1^i\left(\delta' A_\mu^j\right)+C_{ij}^k\left(\delta'\eta_0^i\right)B_\mu^j+C_{ij}^k\,\eta_0^i\left(\delta' B_\mu^j\right)=0, \tag{3.13}$$

usamos la transformación (3.11) para el campo η_0 y la siguiente transformación para el η_1:

$$\delta'\eta_1^k=C_{ij}^k\eta_0^i\eta_1^j. \tag{3.14}$$

Reemplazando obtenemos que el siguiente término debe anularse

$$C_{ij}^k\,\partial_\mu\left(\eta_0^i\eta_1^j\right)+C_{ij}^kC_{\alpha\beta}^i\,\eta_0^\alpha\eta_1^\beta A_\mu^j-C_{ij}^k\,\eta_1^i\left(\partial_\mu\eta_0^j+C_{\alpha\beta}^j\eta_0^\alpha A_\mu^\beta\right)$$

$$+\frac{1}{2}C_{ij}^kC_{\alpha\beta}^i\,\eta_0^\alpha\eta_0^\beta B_\mu^j-C_{ij}^k\,\eta_0^i\left(\partial_\mu\eta_1^j+C_{\alpha\beta}^j\eta_1^\alpha A_\mu^\beta+C_{\alpha\beta}^j\eta_0^\alpha B_\mu^\beta\right)=0.$$

El primer término se cancela con el tercero y el sexto, los restantes se ordenan en dos grupos que se anulan en forma separada.

a) Términos con el campo B_μ^i: (usando $C_{ij}^k=f_{ijk}$)

$$\left[\frac{1}{2}f_{ijk}f_{\alpha\beta i}\;-f_{\alpha ik}f_{\beta ji}\right]\eta_0^\alpha\eta_0^\beta B_\mu^j=0,$$

esto se demuestra siguiendo exactamente el argumento usado para demostrar la transformación (3.11)

b) Términos con el campo A_μ^i se ordena así:

$$\left[f_{ijk}f_{\alpha\beta i}-f_{i\beta k}f_{\alpha ji}+f_{i\alpha k}f_{\beta ji}\right]\eta_0^\alpha\eta_1^\beta A_\mu^j$$

$$=\left[f_{\alpha\beta i}f_{ijk}+f_{\alpha ji}f_{ik\beta}+f_{\alpha ki}f_{i\beta j}\right]\eta_0^\alpha\eta_1^\beta A_\mu^j=0,$$

formando la identidad de Jacobi que permite completar la demostración.

Por lo tanto las transformaciones (3.11) y (3.14) son las necesarias para que la transformación BRST sobre Ψ_μ sea nilpotente. Sin embargo aún falta por verificar que éstas lo son al aplicarce sobre los campos η's.

- Demostración de $\delta'(\delta'\eta_0^k)=0$

$$\delta(\delta'\eta_0^k) = \frac{1}{2}C_{ij}^k\left[\delta'(\eta_0^i)\,\lambda\,\eta_0^j + \eta_0^i\,\delta'(\eta_0^j)\lambda\right]$$

$$= \frac{1}{2}C_{ij}^k\left[-\delta'(\eta_0^i)\,\eta_0^j + \eta_0^i\,\delta'(\eta_0^j)\right]\lambda,$$

luego

$$\delta'\left(\delta'\eta_0^k\right) = C_{ij}^k\left[-\delta'(\eta_0^i)\,\eta_0^j + \eta_0^i\,\delta'(\eta_0^j)\right].$$

Ordenando queda

$$\delta'\left(\delta'\eta_0^k\right) = C_{ij}^k\left[-\eta_0^i\,\delta'(\eta_0^j) + \eta_0^i\,\delta'(\eta_0^j)\right] = 0.$$

- La siguiente demostración no es tan directa:
  $\delta'(\delta'\eta_1^k)=?$

$$\delta\left(\delta'\eta_1^k\right) = C_{ij}^k\left[-\delta'(\eta_0^i)\,\eta_1^j + \eta_0^i\,\delta'(\eta_1^j)\right]\lambda,$$

luego

$$\delta'\left(\delta'\eta_1^k\right) = C_{ij}^k\left[-\delta'(\eta_0^i)\,\eta_1^j + \eta_0^i\,\delta'(\eta_1^j)\right].$$

Notar que esto no es trivialmente cero. Luego, para poder demostrar su nulidad, es necesario un poco mas de trabajo.

$$\delta'\left(\delta'\eta_1^k\right) = C_{ij}^k\left[-\left(\frac{1}{2}C_{\alpha\beta}^i\,\eta_0^\alpha\eta_0^\beta\right)\eta_1^j + \eta_0^i\left(C_{\alpha\beta}^j\,\eta_0^\alpha\eta_1^\beta\right)\right]$$

$$= \left[-\frac{1}{2}C_{ij}^kC_{\alpha\beta}^i + C_{\alpha i}^kC_{\beta j}^i\right]\eta_0^\alpha\eta_0^\beta\eta_1^j = 0,$$

como se demostró hace un momento. Luego $\delta'\left(\delta'\eta_1^k\right)$ es cero debido a la correcta elección de de las transformaciones $\delta'\eta_0^k$ y $\delta'\eta_1^k$.

3.3 Resumen de las transformaciones BRST

Para los campos de gauge tenemos:

$$\begin{cases} \delta' A_\mu^k = -\left(\partial_\mu \eta_0^k + C_{ij}^k\, \eta_0^i A_\mu^j\right) \\ \\ \delta' B_\mu^k = -\left(\partial_\mu \eta_1^k + C_{ij}^k\, \eta_1^i A_\mu^j + C_{ij}^k\, \eta_0^i B_\mu^j\right) \end{cases} \tag{3.15}$$

Para los fantasmas:

$$\begin{cases} \delta' \eta_0^k = \frac{1}{2} C_{ij}^k\, \eta_0^i \eta_0^j \\ \\ \delta' \eta_1^k = C_{ij}^k\, \eta_0^i \eta_1^j \end{cases} \tag{3.16}$$

Campos antifantasmas y auxiliar:

$$\begin{cases} \delta' \bar{C}_0 = i b_0 \\ \\ \delta' \bar{C}_1 = i b_1 \\ \\ \delta' b_0 = 0 \\ \\ \delta' b_1 = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

Donde hemos incluido los campos antifantasmas y el campo auxiliar b_i. Todas estas transformaciones se muestran nilpotentes por lo que corresponden a una correcta transformación BRST de todos los campos.

Es interesante notar que la transformación BRST de η es justamente $\frac{1}{2}$ la transformación de un campo escalar, de los definidos en el primer capítulo. De hecho se utilizó esta posibilidad para encontrar $\delta'\eta_1$, una vez conocido $\delta'\eta_0$. Por tanto, el par de campos (η_0, η_1) forman un campo η:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \end{pmatrix}$$

que transforma como un campo escalar Φ, pero dividido por dos.

En el capítulo siguiente usaremos estas transformaciones para deducir el término compensatorio de Faddeev-Popov en la misma manera en la cual se usan las transformaciones BRST usuales (apéndice B), para cumplir el mismo objetivo en una teoría de gauge usual.

Chapter 4

El método del Background Field

En toda teoría invariante de gauge es necesario fijar el gauge para lograr una cuantización feliz de ésta (ver apéndice A).

Este acto, en el caso de una teoría no-abeliana, implica la aparición no trivial de campos fantasmas, provenientes de un nuevo término que se agrega al Lagrangiano original. Estas nuevas expresiones permiten realizar los cálculos cuánticos de una manera correcta.

Nosotros utilizamos el método del Background Field como esquema de trabajo para encontrar estas expresiones y las transformaciones BRST del capítulo 4, como herramientas para generarlas.

4.1 Trasformaciones del Background Field

Queremos fijar el gauge sin perder esta invarianza en los campos clásicos. Para lograr esto seguimos el método del Background Field, explicado en el apéndice D.

Primero escribimos el campo Ψ_μ, de la siguiente manera:

$$\Psi_\mu \longrightarrow \Psi_\mu + \tilde{\Psi}_\mu \,,$$

donde Ψ_μ será el campo de fondo y $\tilde{\Psi}_\mu$ será el campo cuántico.

Recordamos que $\mathcal{L}_0[A_\mu, B_\mu]$ es invariante bajo

$$\delta_\varepsilon A_\mu = [\varepsilon_0, A_\mu] + \partial_\mu \varepsilon_0$$

$$\delta_\varepsilon B_\mu = [\varepsilon_0, B_\mu] + [\varepsilon_1, A_\mu] + \partial_\mu \varepsilon_1 \, .$$

Como ahora el lagrangiano depende de $\left(A_\mu + \tilde{A}_\mu, B_\mu + \tilde{B}_\mu\right)$ tenemos que será invariante bajo:

$$\delta_\varepsilon \left(A_\mu + \tilde{A}_\mu\right) = \left[\varepsilon_0, A_\mu + \tilde{A}_\mu\right] + \partial_\mu \varepsilon_0 \tag{4.1}$$

$$\delta_\varepsilon \left(B_\mu + \tilde{B}_\mu\right) = \left[\varepsilon_0, B_\mu + \tilde{B}_\mu\right] + \left[\varepsilon_1, A_\mu + \tilde{A}_\mu\right] + \partial_\mu \varepsilon_1 \,. \tag{4.2}$$

Encontramos la invarianza residual reagrupando los términos así:

$$\delta_\varepsilon \left(A_\mu + \tilde{A}_\mu\right) = \left[\varepsilon_0, A_\mu\right] + \partial_\mu \varepsilon_0 + \left[\varepsilon_0, \tilde{A}_\mu\right]$$

$$\delta_\varepsilon \left(B_\mu + \tilde{B}_\mu\right) = \left[\varepsilon_0, B_\mu\right] + \left[\varepsilon_1, A_\mu\right] + \partial_\mu \varepsilon_1 + \left[\varepsilon_0, \tilde{B}_\mu\right] + \left[\varepsilon_1, \tilde{A}_\mu\right] ,$$

por lo tanto el lagrangiano será invariante bajo:

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon A_\mu &= \left[\varepsilon_0, A_\mu\right] + \partial_\mu \varepsilon_0 = D_\mu \varepsilon_0 \\
\delta_\varepsilon B_\mu &= \left[\varepsilon_0, B_\mu\right] + \left[\varepsilon_1, A_\mu\right] + \partial_\mu \varepsilon_1 = D_\mu \varepsilon_1 \\
\delta_\varepsilon \tilde{A}_\mu &= \left[\varepsilon_0, \tilde{A}_\mu\right] \\
\delta_\varepsilon \tilde{B}_\mu &= \left[\varepsilon_0, \tilde{B}_\mu\right] + \left[\varepsilon_1, \tilde{A}_\mu\right] .
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Estas son las transformaciones del background field para nuestro modelo. No olvidar que no son transformaciones de gauge verdaderas, aunque dejen a $\mathcal{L}_0$ invariante, ya que las verdaderas son [13]:

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon A_\mu &= 0 \\
\delta_\varepsilon B_\mu &= 0 \\
\delta_\varepsilon \tilde{A}_\mu &= \left[\varepsilon_0, A_\mu + \tilde{A}_\mu\right] + \partial_\mu \varepsilon_0 \\
\delta_\varepsilon B_\mu &= \left[\varepsilon_0, B_\mu + \tilde{B}_\mu\right] + \left[\varepsilon_1, A_\mu + \tilde{A}_\mu\right] + \partial_\mu \varepsilon_1 \,.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

4.2 El término de Gauge Fixing y el Lagrangiano de Fadev-Popov

- **Gauge Fixing**

La idea del método del Background Field es romper la invarianza de gauge, al fijar el gauge, pero sin destruir la invarianza bajo las transformaciones del Background Field. Es importante, para este efecto, notar que bajo estas transformaciones los campos cuánticos transforman inhomogéneamente (como campos vectoriales) mientras los clásicos lo hacen homogéneamente (como escalares). Luego términos de la forma:

$$\left(D_\mu \tilde{A}_\mu\right)^k \left(D_\nu \tilde{A}_\nu\right)^k$$

$$\left(D_\mu \tilde{A}_\mu\right)^k \left(D_\nu \tilde{B}_\nu\right)^k ,$$

donde las derivadas estan definidas respecto al campo clásico, serán invariantes bajo (4.3), pero no lo serán bajo las verdaderas transformaciones de gauge, por lo que se pueden usar para fijar el gauge.

En este caso escogemos:

$$\mathcal{L}_{GF} = \frac{2}{g'} \left(D_\mu \tilde{A}_\mu\right)^k \left(D_\nu \tilde{B}_\nu\right)^k . \tag{4.5}$$

- **Lagrangiano de Faddeev-Popov**

Lo construimos usando las transformaciones BRST (ver apéndice B), ya encontradas, más la siguiente relación [14]:

$$\mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_{GF} = (-i)\, \delta'(P), \tag{4.6}$$

por lo que debemos encontrar un P que cumpla con (4.6) dado el gauge fixing (4.5).

El P que cumple con (4.6) es:

$$P = \bar{C}_0 F_0 + \bar{C}_1 F_1 - \bar{C}_0 b_1 .$$

Para verificar ésto calculamos $\delta(P)$

$$\delta(P) = \delta\left(\bar{C}_0\right) F_0 + \bar{C}_0\, \delta(F_0) + \delta\left(\bar{C}_1\right) F_1 + \bar{C}_1\, \delta(F_1) - \delta\left(\bar{C}_0\right) b_1 + \bar{C}_0\, \delta(b_1) .$$

Ahora usamos las transformaciones BRST para obtener, después de ordenar términos, lo siguiente:

$$\delta(P) = i\left(b_0F_0 + b_1F_1 - b_0b_1\right)\lambda + \left[\bar{C}_0\delta'(F_0) + \bar{C}_1\delta'(F_1)\right]\lambda$$

por lo tanto

$$\delta'(P) = i\left(b_0F_0 + b_1F_1 - b_0b_1\right) + \left[\bar{C}_0\delta'(F_0) + \bar{C}_1\delta'(F_1)\right]. \tag{4.7}$$

Eliminamos los campos auxiliares b_i usando las ecuaciones de movimiento, que para este caso son:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b_i} = 0.$$

Estas dos ecuaciones implican:

$$b_0 = F_1$$

$$b_1 = F_0.$$

Reemplazando en (4.7)

$$\begin{aligned}\delta'(P) &= i(F_0F_1 + F_0F_1 - F_0F_1) + \left[\bar{C}_0\delta'(F_0) + \bar{C}_1\delta'(F_1)\right]\\ &= iF_0F_1 + \left[\bar{C}_0\delta'(F_0) + \bar{C}_1\delta'(F_1)\right].\end{aligned} \tag{4.8}$$

Luego, si definimos

$$F_0^k = \frac{2}{g'}\left(D_\mu\tilde{A}_\mu\right)^k$$

$$F_1^k = \left(D_\nu\tilde{B}_\nu\right)^k$$

y reemplazamos en (4.8) obtenemos:

$$\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} = (-i)\,\delta'(P)$$

$$= \frac{2}{g'}\left(D_\mu\tilde{A}_\mu\right)^k\left(D_\nu\tilde{B}_\nu\right)^k + (-i)\left[\bar{C}_0^k\,\delta'(D_\mu\tilde{A}_\mu^k) + \bar{C}_1^k\,\delta'(D_\nu\tilde{B}_\nu^k)\right]. \tag{4.9}$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}_{FP} = (-i)\left[\bar{C}_0^k\,\delta'(D_\mu\tilde{A}_\mu^k) + \bar{C}_1^k\,\delta'(D_\mu\tilde{B}_\mu^k)\right]$$

Para encontrar $\delta'\left(D_\mu \tilde{A}^k_\mu\right)$ y $\delta'\left(D_\mu \tilde{B}^k_\mu\right)$ debemos recordar que estas transformaciones están definidas a partir de las verdaderas transformaciones de gauge al realizar el cambio del parámetro por $(-\eta\lambda)$. Con ésto en mente procedemos así.

$$\delta'\left(D_\mu \tilde{A}_\mu\right)^k = \partial_\mu\left[\delta' \tilde{A}^k_\mu\right] + f_{ijk}\left[\delta' \tilde{A}^i_\mu\right] A^j_\mu \,,$$

ya que $\delta' A_\mu = 0$. Remplazando las variaciones *verdaderas* obtenemos:

$$\delta'\left(D_\mu \tilde{A}_\mu\right)^k = -\partial_\mu\left[\partial_\mu \eta^k_0 + f_{ijk}\,\eta^i_0\left(A^j_\mu + \tilde{A}^j_\mu\right)\right] - f_{ijk}\left[\partial_\mu \eta^i_0 + f_{\alpha\beta i}\,\eta^\alpha_0\left(A^\beta_\mu + \tilde{A}^\beta_\mu\right)\right] A^j_\mu$$

luego

$$\begin{aligned}\delta'\left(D_\mu \tilde{A}_\mu\right)^k = -&\left[\partial_\mu\partial_\mu\delta^{ki} + f_{ijk}\,\vec{\partial}_\mu\left(A^j_\mu + \tilde{A}^j_\mu\right) + f_{ijk}A^j_\mu\vec{\partial}_\mu\right. \\ &\left. + f_{\alpha jk}f_{i\beta\alpha}\left(A^\beta_\mu + \tilde{A}^\beta_\mu\right)A^j_\mu\right]\eta^i_0 \,.\end{aligned} \tag{4.10}$$

De igual forma tenemos que:

$$\begin{aligned}\delta'\left(D_\mu \tilde{B}_\mu)^k\right) &= \partial_\mu\left[\delta' \tilde{B}^k_\mu\right] + f_{ijk}\left[\delta \tilde{B}^i_\mu\right] A^j_\mu + f_{ijk}\left[\delta \tilde{A}^i_\mu\right] B^j_\mu \\ &= -\partial_\mu\left[\partial_\mu \eta^k_1 + f_{ijk}\,\eta^i_1\left(A^j_\mu + \tilde{A}^j_\mu\right) + f_{ijk}\,\eta^i_0\left(B^j_\mu + \tilde{B}^j_\mu\right)\right]\end{aligned}$$

$$-f_{ijk}\left[\partial_\mu \eta^i_1 + f_{\alpha\beta i}\,\eta^\alpha_1\left(A^\beta_\mu + \tilde{A}^\beta_\mu\right) + f_{\alpha\beta i}\,\eta^\alpha_0\left(B^\beta_\mu + \tilde{B}^\beta_\mu\right)\right]A^j_\mu - f_{ijk}\left[\partial_\mu \eta^i_0 + f_{\alpha\beta i}\,\eta^\alpha_0\left(A^\beta_\mu + \tilde{A}^\beta_\mu\right)\right]B^j_\mu \,.$$

Ordenando se encuentra:

$$\begin{aligned}\delta'\left(D_\mu \tilde{B}_\mu\right)^k = -&\left[\partial_\mu\partial_\mu\delta^{ki} + f_{ijk}\,\vec{\partial}_\mu\left(A^j_\mu + \tilde{A}^j_\mu\right) + f_{ijk}\,A^j_\mu\vec{\partial}_\mu\right. \\ &\left. + f_{\alpha jk}f_{i\beta\alpha}\left(A^\beta_\mu + \tilde{A}^\beta_\mu\right)A^j_\mu\right]\eta^i_1 \\ -&\left[f_{ijk}\,\vec{\partial}_\mu\left(B^j_\mu + \tilde{B}^j_\mu\right) + f_{\alpha jk}f_{i\beta\alpha}\left(B^\beta_\mu + \tilde{B}^\beta_\mu\right)A^j_\mu + f_{ijk}\,B^j_\mu\vec{\partial}_\mu\right. \\ &\left. + f_{\alpha jk}f_{i\beta\alpha}\left(A^\beta_\mu + \tilde{A}^\beta_\mu\right)B^j_\mu\right]\eta^i_0 \,.\end{aligned}$$

Juntamos todo para obtener:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{FP} = \tfrac{2i}{g'}\bar{C}_0^k \Big[\partial_\mu\partial_\mu\delta^{ki} + f_{ijk}\,\vec{\partial}_\mu\left(A_\mu^j + \tilde{A}_\mu^j\right) + f_{ijk}A_\mu^j\vec{\partial}_\mu \\
+ f_{\alpha jk}f_{i\beta\alpha}\left(A_\mu^\beta + \tilde{A}_\mu^\beta\right)A_\mu^j\Big]\eta_0^i \\
+ i\bar{C}_1^k \Big[\partial_\mu\partial_\mu\delta^{ki} + f_{ijk}\,\vec{\partial}_\mu\left(A_\mu^j + \tilde{A}_\mu^j\right) + f_{ijk}\,A_\mu^j\vec{\partial}_\mu \\
+ f_{\alpha jk}f_{i\beta\alpha}\left(A_\mu^\beta + \tilde{A}_\mu^\beta\right)A_\mu^j\Big]\eta_1^i \\
+ i\bar{C}_1^k \Big[f_{ijk}\,\vec{\partial}_\mu\left(B_\mu^j + \tilde{B}_\mu^j\right) + f_{\alpha jk}f_{i\beta\alpha}\left(B_\mu^\beta + \tilde{B}_\mu^\beta\right)A_\mu^j + f_{ijk}\,B_\mu^j\vec{\partial}_\mu \\
+ f_{\alpha jk}f_{i\beta\alpha}\left(A_\mu^\beta + \tilde{A}_\mu^\beta\right)B_\mu^j\Big]\eta_0^i\,.
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

4.3 El lagrangiano completo

$$
\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2}F_{\mu\nu}^kF_{\mu\nu}^k + \frac{1}{g'}F_{\mu\nu}^k\tilde{F}_{\mu\nu}^k + \frac{2}{g'}\left(D_\mu\tilde{B}_\mu\right)^k\left(D_\nu\tilde{A}_\nu\right)^k + \mathcal{L}_{FP} \tag{4.12}
$$

Este es el Lagrangiano completo de la teoría, que incluye el *gauge fixing* y su término compensatorio de Faddeev-Popov. Como estos términos fueron calculados usando el método del Background Field, tenemos que el Lagrangiano completo presenta una invarianza de gauge residual vital para los cálculos venideros.

A partir de este Lagrangiano (4.12) se encontrarán los propagadores y vértices de la teoría, en particular nos concentraremos en los relevantes para el cálculo de la función β, del grupo de renormalización.

Chapter 5

Reglas de Feynman

En este capítulo se encontrarán los propagadores de la teoría y los vértices relevantes para el cálculo de la función β a un loop, si usamos las relaciones del Background Field.

Para simplificar los cálculos es conveniente reescribir de las siguientes cantidades como sigue:

$$F^k_{\mu\nu} = \bar{F}^k_{\mu\nu} + \left(D_\mu \tilde{A}_\nu\right)^k - \left(D_\nu \tilde{A}_\mu\right)^k - f^{kln} \tilde{A}^l_\mu \tilde{A}^n_\nu \tag{5.1}$$

$$\tilde{F}^k_{\mu\nu} = \bar{\tilde{F}}^k_{\mu\nu} + \left(D_\mu \tilde{B}_\nu\right)^k - \left(D_\nu \tilde{B}_\mu\right)^k - f^{kln}\left(\tilde{A}^l_\mu \tilde{B}^n_\nu - \tilde{A}^l_\nu \tilde{B}^n_\mu\right), \tag{5.2}$$

donde $\bar{F}_{\mu\nu}$, $\bar{\tilde{F}}_{\mu\nu}$ y las derivadas covariantes sólo contienen campos A_μ y B_μ clásicos respectivamente.

5.1 Propagadores

Los únicos propagadores que aparecen en los diagramas de Feynman, relevantes para nuestro cálculo, son los de los campos de gauge cuánticos ($\tilde{A}^k_\mu$ y $\tilde{B}^k_\mu$) y el de los campos fantasmas (ver apéndice D). Procedemos a calcularlos

Propagadores campos $\tilde{A}^k_\mu$ y $\tilde{B}^k_\mu$

Para encontrarlos sólo necesitamos los siguientes términos del lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F^k_{\mu\nu} F^k_{\mu\nu} + \frac{1}{g'} F^k_{\mu\nu} \tilde{F}^k_{\mu\nu} + \frac{2}{g'}\left(D_\mu \tilde{B}_\mu\right)^a \left(D_\nu \tilde{A}_\nu\right)^a,$$

y de estos sólo importan los cuadráticos en $\tilde{A}_\mu^k$ y $\tilde{B}_\mu^k$.

Si usamos (5.1) y (5.2) para escribir $\mathcal{L}$, los términos cuadráticos en $\tilde{A}_\mu^k$ y $\tilde{B}_\mu^k$ están contenidos en los productos de derivadas covariantes.

Eliminando las cantidades no deseadas encontramos que estos se ordenan para formar $\mathcal{L}_0$:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2g^2}\left[\partial_\mu \tilde{A}^k_\nu\, \partial_\mu \tilde{A}^k_\nu - \partial_\mu \tilde{A}^k_\nu\, \partial_\nu \tilde{A}^k_\mu\right]$$

$$+\frac{2}{g'}\left[\partial_\mu \tilde{A}^k_\nu\, \partial_\mu \tilde{B}^k_\nu - \partial_\mu \tilde{A}^k_\nu\, \partial_\nu \tilde{B}^k_\mu + \partial_\mu \tilde{B}^k_\mu\, \partial_\nu \tilde{A}^k_\nu\right].$$

Integrando por partes obtenemos:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2g^2}\left(\tilde{A}^k_\nu\, \partial_\mu\partial_\mu \tilde{A}^k_\nu - \tilde{A}^k_\nu\, \partial_\mu\partial_\nu \tilde{A}^k_\mu\right) - \frac{2}{g'}\tilde{A}^k_\nu\, \partial_\mu\partial_\mu \tilde{B}^k_\nu\,.$$

Escrito en el espacio de momentum queda:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2g^2}\tilde{A}^k_\nu(P)\left(P^2\delta_{\mu\nu}\delta^{ks} - P_{\mu\nu}\delta^{ks}\right)\tilde{A}^s_\mu(-P) + \frac{2}{g'}\tilde{A}^k_\nu(P)P^2\delta_{\mu\nu}\delta^{ks}\tilde{B}^s_\mu(-P).$$

Siguiendo la notación del Diagrammar [15], que escribe:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\phi_i M_{ij}\phi_j\,,$$

para ϕ_i real. Escribimos:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\left(\tilde{A}\,X\tilde{A} + \tilde{A}\,Y\tilde{B}\right),$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} X & \frac{Y}{2} \\ \frac{Y}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

si definimos

$$\phi = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},$$

con:

$$X = -\frac{1}{g'}\delta^{ks}\left[P^2\delta_{\mu\nu} - P_\mu P\nu\right]$$

$$Y = \frac{4}{g'}\delta^{ks}\delta_{\mu\nu}P^2 \,.$$

Siguiendo la notación del Diagrammar los propagadores son de la forma:

$$\Delta_{ij} = \frac{i}{(2\pi)^4}\left[M^{-1}\right]_{ij}$$

para este caso

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2Y^{-1} \\ & \\ 2Y^{-1} & -4XY^{-2} \end{pmatrix},$$

por lo tanto sólo importa que exista inversa de Y y no de X. Luego la matriz M es invertible debido a la correcta elección del gauge.

Como resultado de invertir M encontramos que no existe propagador entre los campos $\tilde{A}^k_\mu$ y $\tilde{A}^k_\mu$. Los únicos propagadores son:

a)

$$\tilde{A}^k_\mu \longleftrightarrow \tilde{B}^s_\nu$$

$$\Delta^{ks}_{\mu\nu} = \frac{i}{(2\pi)^4}\frac{g'}{2}\delta^{ks}\frac{\delta_{\mu\nu}}{P^2}. \tag{5.3}$$

b)

$$\tilde{B}^k_\mu \longleftrightarrow \tilde{B}^s_\nu$$

$$\Delta^{ks}_{\mu\nu} = \frac{i}{(2\pi)^4}\left(\frac{g'}{g}\right)^2\frac{\delta^{ks}}{4}\frac{1}{P^2}\left[\delta_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P\nu}{P^2}\right]. \tag{5.4}$$

Propagadores campos fantasmas

Los términos relevantes son:

$$\mathcal{L}_0 = i\frac{2}{g'}\bar{C}^k_0\,\delta^{ki}\partial_\mu\partial_\mu\eta^i_0 + i\bar{C}^k_1\,\delta^{ki}\partial_\mu\partial_\mu\eta^i_1 \,.$$

En el espacio de momentum queda

$$\mathcal{L}_0 = -i\frac{2}{g'}\bar{C}_0^k(P)P^2\delta^{ki}\eta_0^i(-P) - i\bar{C}_1^k(P)P^2\delta^{ki}\eta_1^i(-P).$$

La notación del Diagrammar para estos campos es:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{C}_i^k\, V_{ij}^{ks}\eta_j^s\,.$$

En nuestro caso

$$V = -i\delta^{ki}\begin{pmatrix} \frac{2}{g'}P^2 & 0 \\ \\ 0 & P^2 \end{pmatrix},$$

luego

$$V^{-1} = i\delta^{ki}\begin{pmatrix} \frac{g'}{2P^2} & 0 \\ \\ 0 & \frac{1}{P^2} \end{pmatrix}.$$

Los propagadores serán de la forma:

$$\Delta_{ij}(P) = \frac{i}{(2\pi)^4}\left[M^{-1}(P)\right]_{ij}\,,$$

y en este caso son dos:

a)

$$\bar{C}_0^i \longleftrightarrow \eta_0^j$$

$$\Delta^{ij}(P) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{g'}{2}\frac{\delta^{ij}}{P^2}. \tag{5.5}$$

b)

$$\bar{C}_1^i \longleftrightarrow \eta_1^j$$

$$\Delta^{ij}(P) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{\delta^{ij}}{P^2}. \tag{5.6}$$

5.2 Vértices

Vértice $(A\tilde{A}\tilde{B})$

Para formar este vértice necesitamos los siguientes términos del lagrangiano:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{g'} F^k_{\mu\nu} \tilde{F}^k_{\mu\nu} + \frac{2}{g'} \left(D_\mu \tilde{B}_\mu\right)^k \left(D_\nu \tilde{A}_\nu\right)^k .$$

Usamos la notación ya definida en las ecuaciones (5.1) y (5.2):

$$F^k_{\mu\nu} = \bar{F}^k_{\mu\nu} + \left(D_\mu \tilde{A}_\nu\right)^k - \left(D_\nu \tilde{A}_\mu\right)^k - f_{kln} \tilde{A}^l_\mu \tilde{A}^n_\nu$$

$$\tilde{F}^k_{\mu\nu} = \bar{\tilde{F}}^k_{\mu\nu} + \left(D_\mu \tilde{B}_\nu\right)^k - \left(D_\nu \tilde{B}_\mu\right)^k - f_{kln} \left(\tilde{A}^l_\mu \tilde{B}^n_\nu - \tilde{A}^l_\nu \tilde{B}^n_\mu\right),$$

para hacer más simple el reconocimiento de todos los términos que sólo contengan combinaciones de este tipo $(A\tilde{A}\tilde{B})$. Estos están ocultos en las siguientes expresiones:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{g'} \left[-f_{kln} \bar{F}^k_{\mu\nu} \left(\tilde{A}^l_\mu \tilde{B}^n_\nu - \tilde{A}^l_\nu \tilde{B}^n_\mu\right) + \left(D_\mu \tilde{A}^k_\nu - D_\nu \tilde{A}^k_\mu\right)\left(D_\mu \tilde{B}^k_\nu - D_\nu \tilde{B}^k_\mu\right)\right] + \frac{2}{g'} \left(D_\mu \tilde{B}_\mu\right)^k \left(D_\nu \tilde{A}_\nu\right)^k .$$

Luego de un poco de álgebra y después de eliminar los términos no deseados, encontramos que todas las combinaciones que contengan un campo A, un $\tilde{A}$ y un $\tilde{B}$ son:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = \frac{2}{g'} f_{kln} \Big[& \left(\partial_\nu \tilde{B}^n_\mu\, A^k_\mu\, \tilde{A}^l_\nu + \partial_\nu \tilde{A}^l_\nu\, A^k_\mu\, \tilde{B}^n_\mu - \partial_\nu A^k_\mu\, \tilde{A}^l_\nu\, \tilde{B}^n_\nu\right) \\ & + \left(\partial_\mu \tilde{A}^l_\nu\, A^k_\mu\, \tilde{B}^n_\nu - \partial_\mu \tilde{B}^n_\nu\, A^k_\mu\, \tilde{A}^l_\nu\right) \qquad (5.7) \\ & + \left(\partial_\mu A^k_\nu\, \tilde{A}^l_\nu\, \tilde{B}^n_\mu - \partial_\mu \tilde{A}^l_\nu\, A^k_\nu\, \tilde{B}^n_\mu - \partial_\mu \tilde{B}^n_\mu\, A^k_\nu\, \tilde{A}^l_\nu\right)\Big] . \end{aligned}$$

Donde hemos agrupado las cantidades en tres expresiones. En el espacio de momentum $\mathcal{L}'$ toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = \frac{2i}{g'} f_{kln} \int d^4p \int d^4q \int d^4r\ & \{[(r+q-p)_\nu \delta_{\mu\lambda} + (q-r)_\mu \delta_{\nu\lambda} + (p-q-r)_\lambda \delta_{\mu\nu}] , \\ & A^k_\mu(p)\, \tilde{A}^l_\nu(q)\, \tilde{B}^n_\lambda(r)\, (2\pi)^4 \delta(p+q+r)\} \qquad (5.8) \end{aligned}$$

donde, por convención, se ha considerado $p > 0$ al que deja el vértice. En este caso todos los momentum están saliendo. En la notación del Diagrammar

$$\mathcal{L}' = (2\pi)^4 \int d^4k_1 \int d^4k_2 \int d^4k_3 \;\delta(k_1k_2k_3)\,\bar{\alpha}(k_1,k_2,k_3)\,a(k_1)b(k_2)c(k_3),$$

y el vértice se define como:

$$\Gamma(k_1,k_2,k_3) = (2\pi)^4 i\bar{\alpha}(k_1,k_2,k_3)\delta(k_1,k_2,k_3).$$

En nuestro caso:

$$\bar{\alpha}^{kln}_{\mu\nu\lambda}(p,q,r) = \frac{2i}{g'} f_{kln}\left[(r+q-p)_\nu\delta_{\mu\lambda} + (q-r)_\mu\delta_{\nu\lambda} + (p-q-r)_\lambda\delta_{\mu\nu}\right],$$

luego el vértice $(A\tilde{A}\tilde{B})$ será:

$$\Gamma^{kln}_{\mu\nu\lambda}(p,q,r) = (2\pi)^4\left(\frac{2}{g'}f_{kln}\right)\left[\delta_{\mu\nu}(q+r-p)_\lambda + \delta_{\nu\lambda}(r-q)_\mu + \delta_{\mu\lambda}(p-r-q)_\nu\right]. \tag{5.9}$$

Vértice $A\bar{C}_0\eta_0$

Los términos relevantes para este vértice son:

$$\mathcal{L}' = \frac{2i}{g'} f_{ijk}\left[\bar{C}^k_0\,\partial_\mu\left(A^j_\mu\eta^i_0\right) + \bar{C}^k_0\,A^j_\mu\,\partial_\mu\eta^i_0\right].$$

Integrando por partes el primer término resulta:

$$\mathcal{L}' = \frac{2i}{g'} f_{ijk}\left[-\partial_\mu\left(\bar{C}^k_0\right)A^j_\mu\eta^i_0 + \bar{C}^k_0 A^j_\mu\partial_\mu\eta^i_0\right],$$

en el espacio de momentum $\mathcal{L}'$ asume la forma:

$$\mathcal{L}' = \frac{2}{g'} f_{ijk}\int d^4p\int d^4q\int d^4r\;(2\pi)^4\delta(p+q+r)A^j_\mu(p)\,\bar{C}^k_0(q)\,\eta^i_0(r)\,[q-r]_\mu\,,$$

luego

$$\bar{\alpha}(q,r) = \left(\frac{2}{g'}\right) f_{ijk}\,[q-r]_\mu$$

por lo tanto el vértice será:

$$\Gamma^{ijk}_\mu(q,r) = (2\pi)^4\, i\left(\frac{2}{g'}\right) f_{ijk}\,[q-r]_\mu\,, \tag{5.10}$$

si seguimos la convención usada en el primer vértice.

Vértice $A\bar{C}_1\eta_1$

Este vértice es similar al anterior, y se calcula siguiendo el mismo camino.

$$\mathcal{L}' = if_{ijk}\left[\bar{C}_1^k\,\partial_\mu\left(A^j_\mu\eta^i_1\right) + \bar{C}_1^k A^j_\mu\partial_\mu\eta^i_1\right],$$

luego identificamos el vértice como:

$$\Gamma^{ijk}_\mu(q,r) = (2\pi)^4\, if_{ijk}[q-r]_\mu\,, \tag{5.11}$$

donde q y r son los momentum de $\bar{C}_1^k$ y η^i_1 respectivamente.

Estos no son todos los vértices de la teoría, pero serán los relevantes para el cálculo de la función β a un loop, como se mostrará en el capítulo siguiente.

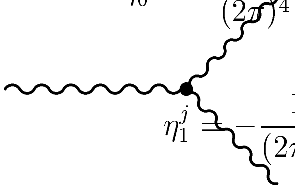
5.3 Resumen de las reglas de Feynman

Propagadores:

$$\tilde{A}^k_\mu \qquad \tilde{B}^s_\nu = \frac{i}{(2\pi)^4}\frac{g'}{2}\delta^{ks}\frac{\delta_{\mu\nu}}{P^2} \tag{5.12}$$

$$\tilde{B}^k_\mu \qquad \tilde{B}^s_\nu = \frac{i}{(2\pi)^4}\left(\frac{g'}{g}\right)^2\frac{\delta^{ks}}{4}\frac{1}{P^2}\left[\delta_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P\nu}{P^2}\right] \tag{5.13}$$

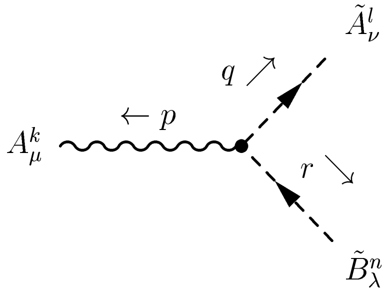
$$\bar{C}^i_0 \qquad \eta^j_0 = -\frac{1}{(2\pi)^4}\left(\frac{g'}{2}\right)\frac{\delta^{ij}}{P^2} \tag{5.14}$$



$$\bar{C}^i_1 \qquad \eta^j_1 = -\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{\delta^{ij}}{P^2} \tag{5.15}$$

Vértices:

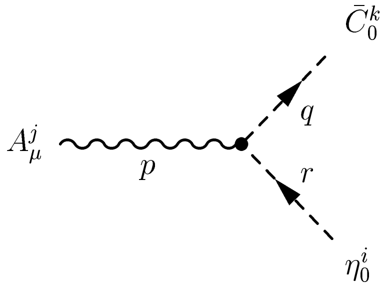
a) Campos de gauge:



$$\Gamma^{kln}_{\mu\nu\lambda}(p,q,r) = -(2\pi)^4 \left(\frac{2}{g'} f_{kln}\right) [\delta_{\mu\lambda}(r+q-p)_\nu + \delta_{\nu\lambda}(q-r)_\mu + \delta_{\mu\nu}(p-q-r)_\lambda] \tag{5.16}$$

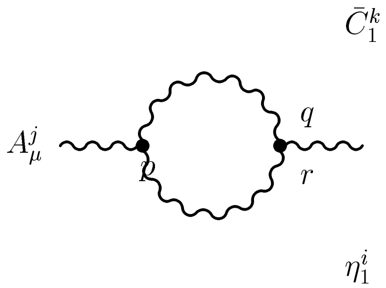
b) Fantasmas:

i)



$$\Gamma^{ijk}_\mu(q,r) = (2\pi)^4 i \left(\frac{2}{g'}\right) f_{ijk}[q+r]_\mu \tag{5.17}$$

ii)



$$\Gamma^{ijk}_\mu(q,r) = (2\pi)^4 i f_{ijk}[q+r]_\mu \tag{5.18}$$

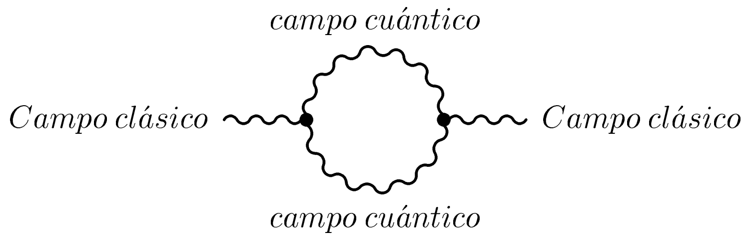
Chapter 6

Cálculo de la función β

Para finalizar este trabajo se calculará, a un loop, la función β de la teoría. Esto para estudiar el comportamiento asintótico del modelo y compararlo con el de una teoría de gauge usual. Este cálculo será hecho siguiendo el esquema del Background Field y aprovechando las expresiones calculadas en los capítulos anteriores.

6.1 Diagramas

Siguiendo la prescripción, dada por el Background Field, tenemos que los diagramas relevantes para el cálculo de la función β, a un loop, son de la forma:



(6.1)

Para formar estos diagramas disponemos de los propagadores:

$$\tilde{A} \longleftrightarrow \tilde{B}$$

$$\tilde{B} \longleftrightarrow \tilde{B}$$

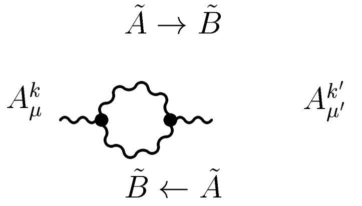
$$\bar{C}_0 \longleftrightarrow \eta_0$$
$$\bar{C}_1 \longleftrightarrow \eta_2$$

y de los vértices con una pata clásica y dos cuánticas, dados por la teoría:

$$Vértices = \Big\{(A\tilde{A}\tilde{B}), (A\bar{C}_0\,\eta_0), (A\bar{C}_1\,\eta_1), (B\tilde{A}\tilde{A}), (B\bar{C}_1\,\eta_0)\Big\}$$

No es difícil ver que sólo los primeros tres vértices pueden ser utilizados para formar diagramas de la forma (6.1), ya que los propagadores, y la no existencia de vértices de la forma $(A\tilde{B}\tilde{B})$, $(B\tilde{B}\tilde{B})$, $(B\bar{C}_0\,\eta_1)$ o $(A\bar{C}_0\,\eta_1)$, impiden que construyamos diagramas del tipo (6.1) usando los dos últimos vértices. Por lo tanto los diagramas a calcular son tres, y todos ellos son de patas externas A clásicas. Esto refleja que el campo B_μ es un campo auxiliar y que de alguna manera no está en el mismo pie, que el campo de gauge usual A_μ.

- 1^{er} Diagrama

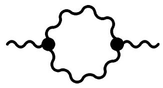


$$= f_{kln} f_{k'ln} \int d^4q \int d^4r \; \frac{i}{q^2}\frac{i}{r^2}\, N_{\mu\nu}\, \delta(q-p-r)\, \delta(p'+r-q), \tag{6.2}$$

con:

$$\begin{aligned} N_{\mu\nu} = &-\left[\delta_{\mu\nu}(q-r+p)_\lambda - \delta_{\nu\lambda}(r+q)_\mu + \delta_{\mu\lambda}(r-p-q)_\nu\right] * \\ &\left[\delta_{\mu'\nu}(q-r+p')_\lambda - \delta_{\nu\lambda}(r+q)_{\mu'} + \delta_{\mu'\lambda}(r-p'-q)_\nu\right]. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Usando las deltas y multiplicando obtenemos:

A^k_μ  $A^{k'}_{\mu'}$

$$= f_{kln} f_{k'ln} \int d^4r \left\{ 8\frac{[p^2\delta_{\mu\mu'} - p_\mu p_{\mu'}]}{(p+r)^2\, r^2} + 4\frac{(2r+p)_\mu (2r+p)_{\mu'}}{(p+r)^2\, r^2} \right\}. \tag{6.4}$$

Usamos regularización dimensional para calcular estas integrales. La primera da como resultado:

$$I_1 = i8 f_{kln} f_{k'ln} \left[p^2 \delta_{\mu\mu'} - p_\mu p_{\mu'} \right] \int_0^1 dx \left\{ \frac{\pi^\omega}{[M^2]^{2-\omega}} \Gamma(2-\omega) \right\}.$$

La parte divergente de la integral es:

$$I_1 = i8 f_{kln} f_{k'ln} \frac{\pi^2}{\epsilon} (p^2 \delta_{\mu\mu'} - p_\mu p_{\mu'}). \tag{6.5}$$

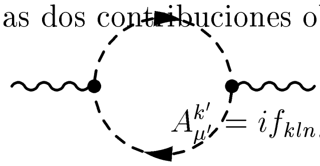
La segunda integral es

$$I_2 = i f_{kln} f_{k'ln} \int_0^1 dx \, \frac{\pi^\omega}{[M^2]^{2-\omega}} \left\{ 2\delta_{\mu\mu'} p^2 x(1-x) \Gamma(1-\omega) + (2x-1)^2 p_\mu p_{\mu'} \Gamma(2-\omega) \right\},$$

y su parte divergente da:

$$I_2 = i f_{kln} f_{k'ln} \frac{\pi^2}{\epsilon} \frac{4}{3} (p_\mu p_{\mu'} - p^2 \delta_{\mu\mu'}) \tag{6.6}$$

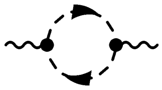
sumando estas dos contribuciones obtenemos

A_μ^k  $A_{\mu'}^{k'}$ $= i f_{kln} f_{k'ln} \dfrac{20}{3} \pi^2 (p^2 \delta_{\mu\mu'} - p_\mu p_{\mu'}) \dfrac{1}{\epsilon}\,, \qquad (6.7)$

como parte divergente del diagrama.

- 2^{do} Diagrama

$\bar{C}_0 \to \eta_0$

A_μ^j  $A_{\mu'}^{j'}$

$\eta_0 \leftarrow \bar{C}_0$

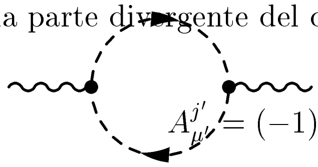
$$= (-1) f_{ijk} f_{kj'i} \int d^4 q \int d^4 r \, \frac{i}{q^2} \frac{i}{r^2} \, (q+r)_\mu (q+r)_{\mu'} \, \delta(q-p-r) \, \delta(p'+r-q)$$

$$= (-1) f_{ijk} f_{ij'k} \int d^4 r \, \frac{(2r+p)_\mu (2r+p)_\nu}{(p+r)^2 \, r^2}\,, \tag{6.8}$$

el factor (-1) es debido a que los campos fantasmas anticonmutan. Utilizamos regularización dimensional para resolver la integral obteniendo:

$$I_3 = if_{ijk}f_{ij'k}\int_0^1 dx \frac{\pi^\omega}{[M^2]^{2-\omega}}\left\{2\delta_{\mu\mu'}p^2x(1-x)\Gamma(1-\omega)+(2x-1)^2p_\mu p_{\mu'}\Gamma(2-\omega)\right\}.$$

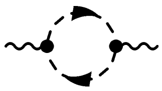
Luego la parte divergente del diagrama será:



$$A^j_\mu \quad A^{j'}_{\mu'} = (-1)if_{ijk}f_{ij'k}\,\pi^2\frac{1}{3}(p_\mu p_{\mu'}+p^2\delta_{\mu\mu'})\frac{1}{\epsilon}. \qquad (6.9)$$

- 3^{er} Diagrama

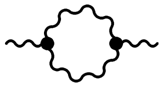
$$\bar{C}_1 \to \eta_1$$

A^j_μ  $A^{j'}_{\mu'}$

$$\eta_1 \leftarrow \bar{C}_1$$

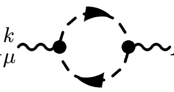
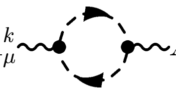
$$= (-1)f_{ijk}f_{kj'i}\int d^4q\int d^4r\,\frac{i}{q^2}\frac{i}{r^2}(q+r)_\mu(q+r)_{\mu'}\delta(q-p-r)\,\delta(p'+r-q).$$

Esta integral ya está calculada, es la anterior, luego su parte divergente es:

A^j_μ 

$$A^{j'}_{\mu'} = (-1)if_{ijk}f_{ij'k}\,\pi^2\frac{1}{3}(p_\mu p_{\mu'}+p^2\delta_{\mu\mu'})\frac{1}{\epsilon}. \qquad (6.10)$$

Finalmente la contribución divergente de los tres diagramas será:

A^k_μ  $A^{k'}_{\mu'} + A^k_\mu$  $A^{k'}_{\mu'} + A^k_\mu \qquad A^{k'}_{\mu'}$

$$= if_{kln}f_{k'ln}\frac{22}{3}\pi^2(p^2\delta_{\mu\mu'}-p_\mu p_{\mu'})\frac{1}{\epsilon}. \qquad (6.11)$$

Si utilizamos la relación (D.7) para Z_A encontrada en el apéndice D:

$$Z_A = 1+\frac{1}{\epsilon}\beta_0\left(\frac{g}{4\pi}\right)^2+\frac{1}{2\epsilon}\beta_1\left(\frac{g}{4\pi}\right)^4+...$$

tenemos que $\beta_0 = \frac{22}{3}C_2$, luego la función β de nuestra teoría, calculada a un loop es:

$$\beta = -\frac{g^3}{16\pi^2} C_2 \frac{22}{3}. \tag{6.12}$$

Donde C_2 es una constante denominada Operador Casimir Cuadrático y definida por [16]: (Para el caso de la representación adjunta)

$$f_{acd} f_{bcd} = C_2(G) \delta_{ab}$$

Hemos encontrado la función β, a un loop, de nuestra teoría. Podemos observar que es de signo negativo y que además su valor es exactamente el doble que en el caso de una teoría de gauge no-abeliana.

El signo de esta función nos dice que el modelo presenta libertad asintótica.

Chapter 7

Conclusiones

Resumen:

En esta tesis se estudió una teoría de gauge no-abeliana sometida a una restricción. En particular se calculó, a un loop, la función β de la teoría.

Con este objetivo se generó un modelo de teoría de campos a partir de un conjunto de transformaciones, demostrándose que este nuevo modelo corresponde a una teoría de gauge sujeta a una restricción, como la que deseamos estudiar.

Se estudió el nuevo modelo, conociendo su conexión con la teoría de gauge de nuestro interés. Para esto se usó como esquema de trabajo el método del Background Field y se aplicó, con exito, el formalismo BRST a las transformaciones y campos del nuevo modelo. Se encontraron los propagadores y los vértices de la teoría. Finalmente se calculó la función β, a un loop, como una manera de explorar las propiedades del modelo.

Resultados:

Del trabajo realizado podemos concluir que el nuevo modelo presenta características semejantes a las de una teoría de gauge no-abeliana. En particular del cálculo de la función β se desprende que el modelo presenta libertad asintótica, esto debido al signo de dicha función.

Es interesante notar que tanto en los propagadores, como en los vértices usados para calcular la función β no se utilizó ningun término proveniente de la expresión $F^k_{\mu\nu}F^k_{\mu\nu}$ del Lagrangiano. De hecho este término (que es el que corresponde a una teoría de gauge usual) podría no haber existido y el resultado del cálculo hubiese sido el mismo. Ya que los propagadores y vértices, que se encuentran a partir de ese término (por que si existen) no se pueden usar debido a que no hay forma de conectarlos, entre ellos o con otros, para formar un diagrama (a un loop) que contribuya con la acción efectiva. Sin embargo el resultado del cálculo requiere que el término esté presente en el Lagrangiano.

Respecto al término que fija el gauge, debemos decir que la simetría permite otro además (o en lugar) del escogido $(D_\mu A_\mu)^k (D_\mu B_\mu)^k$, este término es el $gauge\, fixing$ tradicional del Background Field (ver apéndice D)

$$(D_\mu A_\mu)^k (D_\nu A_\nu)^k \tag{7.1}$$

Pero este término es redundante, ya que basta con el escogido para que los propagadores estén bien definidos. Además si sólo escogemos al término (7.1) como $gauge\, fixing$, entonces los propagadores están mal definidos, ya que no es posible invertir la matriz M de la sección (5.1).

Por último las transformaciones BRST de los campos fantasmas se encontraron sin usar la nilpotencia de éstas, sino utilizando la posibilidad de que fueran transformaciones del tipo definido en el capítulo uno (que actuan en forma conjunta sobre pares de campos).

Si bien en la teoría están presentes dos tipos de campos (A_μ y B_μ) sólo el campo A_μ se renormaliza ya que el campo B_μ vive dentro de loops y nunca aparece en las patas externas. En principio no hay nada que prohiba esta situación, sin embargo es imposible dibujar un diagrama, con los vértices y propagadores del modelo, en el cual el campo B_μ aparezca como pata externa. De este modo la acción efectiva, del modelo, depende del campo A_μ y no del campo B_μ.

En el capítulo dos, cuando reescalamos los campos, se introdujeron dos constantes al modelo (g y $\tilde{g}$), relacionadas con los campos A_μ y B_μ respectivamente. Sin embargo, de estas dos sólo g sobrevive y finalmente se renormaliza.

En virtud de estos puntos tenemos que, si bien los dos campos se introdujeron al modelo con el mismo rango de importancia, la teoría misma descrimina entre uno y otro, otorgándole una mayor preponderancia en los resultados finales al campo A_μ. Que es justamente el campo cuyas ecuaciones de movimiento y transformaciones son las de un campo de gauge no-abeliano usual.

En resumen, debido a que la acción efectiva sólo depende del campo A_μ y que además éste es el único campo que se renormaliza, podemos afirmar que el único campo físico de la teoría es A_μ y que el campo B_μ es sólo un campo auxiliar. Lo que está en acuerdo con los cálculos de la sección (2.5) del capítulo 2, en el cual se demuestra que este modelo corresponde a una teoría de gauge no-abeliana sometida a una restricción.

En virtud de esta situación tenemos que los resultados obtenidos para el modelo con dos campos son aplicables a la teoría de gauge con restricción. De este modo podemos mencionar los siguientes aspectos:

a) La restricción impuesta no destruye la teoría cuántica de campos, ésta aún presenta divergencias y una constante de acoplamiento que depende de la energía (constante de acoplamiento efectiva).

b) Del cálculo de la función β se desprende que la teoría preserva propiedades características de una teoría de gauge no-abeliana. En particular evidencia libertad asintótica. Es decir la constante de acoplamiento decae al aumentar la energía. Luego las partículas del modelo se comportaran como partículas libres a altas energías (pequeñas distancias) al igual que en QCD.

c) Respecto a la función β se debe mencionar que si bien tiene el mismo signo de una teoría de gauge no-abeliana, su valor es el doble que ella.

Nuestro modelo entrega la siguiente función β:

$$\beta = -\frac{g^3}{16\pi^2} C_2 \frac{22}{3}$$

y la función β de una teoría de guage no-abeliana usual es:

$$\beta = -\frac{g^3}{16\pi^2} C_2 \frac{11}{3}.$$

De este modo estas dos funciones no son iguales, pero predicen el mismo comportamiento asintótico para sus respectivas teorías.

En resumen se ha demostrado que la restricción no destruye ni la renormalizibilidad ni el comportamiento asintótico de la teoría de campos *original*.

Trabajo futuro:

Sería interesante poder comprobar que la teoría vive a un loop y escribir el Hamiltoniano del modelo, para determinar la naturaleza del espectro.

Otro punto importante sería calcular la acción efectiva para el campo A_μ. El cálculo a un loop de ésta es simple de realizar a partir de los resultados del capítulo 6, y sería un cálculo exacto si se demuestra que la teoría vive a un loop.

Appendix A

Fijación del gauge

Fijar el gauge es un acto necesario para cuantizar una teoría invariante de gauge. Esto se ve claramente si el procedimiento es llevado a cabo en el marco de la integral funcional.

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \, e^{i\int d^4x \, \mathcal{L}(A)}. \tag{A.1}$$

La dificultad es debida a la invarianza de gauge de $\mathcal{L}$. Esta genera una definición errónea en la integral de camino, que sumará infinitas veces estados físicos equivalentes. Dicho de otra forma, como la integral (A.1) está definida sobre todos los posibles valores de A_μ, incluyendo los que están comunicados sólo por una transformación de gauge y que corresponden a un mismo estado físico (mismo valor de S), se genera una suma infinita sobre estados físicos repetidos, luego:

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \, e^{i\int d^4x \, \mathcal{L}(A)} = \infty.$$

La solución del problema es encontrar la forma de rescatar la parte relevante de la integral funcional, es decir, aquella que cuenta sólo una vez cada estado físico [17] y [18].

Esto se logra imponiendo una condición sobre A_μ, que fija la función de gauge. Por ejemplo imponemos que todo campo A_μ cumpla:

$$F(A^i_\mu) = 0 = \partial_\mu A^i_\mu \,. \tag{A.2}$$

Esta condición no restringe los valores del campo, ya que todo campo A_μ que no cumpla (A.2) puede llevarse, vía una transformación de gauge, a un campo A_μ^Ω que si la cumpla, luego la condición (A.2) sólo fija al parámetro de gauge ε_0.

La condición (A.2) queda incorporada directamente en las ecuaciones de movimiento si al Lagrangiano se le incorpora el siguiente término [19]

$$\lambda\left(\partial_\mu A_\mu^i\right)^2,$$

siguiendo el método de los multiplicadores de Lagrange, donde λ es un multiplicador de Lagrange.

Como las predicciones físicas deben ser independientes de la elección del gauge (i.e. independientes de $F(A_\mu^i)$), entonces no deben depender de λ. Este suele escribirse como

$$\lambda=-\frac{1}{2\alpha},$$

luego los resultados físicos no dependen de α.

Heurísticamente hablando, el nuevo término en el Lagrangiano rompe la invarianza de gauge, eliminando de este modo, las dobles contribuciones al destruir la simetría de la acción.

La manera rigurosa de solucionar el problema del *overcounting* es agregar la condición $F(A_\mu^i)=0$ como una delta de Dirac en la integral funcional. Pero ésto hay que hacerlo con cuidado para no generar una ambigüedad en la medida de integración [20].

La forma correcta de hacerlo es agregar un 1 dentro de la integral funcional, que contenga la medida correcta:

$$1=\Delta_{FP}\int\mathcal{D}\Omega\,\delta\left(F[A_\mu^\Omega]\right),$$

donde Δ_{FP} es el determinante de Faddeev-Popov, que garantiza la correcta medida:

$$\Delta_{FP}=det\left|\frac{\partial F[A_\mu^\Omega]}{\partial\Omega'(x)}\right|, \tag{A.3}$$

insertamos este 1 en la integral funcional.

$$Z=\int\mathcal{D}A_\mu\left(\Delta_{FP}\int\mathcal{D}\Omega\,\delta\left(F[A_\mu^\Omega]\right)\right)e^{i\int d^4x\,\mathcal{L}(A)}.$$

Como la medida de integración $\mathcal{D}A_\mu$, el determinante Δ_{FP} y la acción son invariantes de gauge, realizamos una transformación $A_\mu\longrightarrow A_\mu^{\Omega^{-1}}$, donde el único término que será afectado es $F[A_\mu^\Omega]$

$$F[A_\mu^\Omega] \xrightarrow{\Omega^{-1}} F[A_\mu],$$

luego la integral queda:

$$Z = \left(\int \mathcal{D}\Omega\right) \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}\, \delta(F[A_\mu])\, e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}(A)},$$

donde hemos logrado aislar la cantidad que produce el ∞.

$$\int \mathcal{D}\Omega = \infty.$$

Luego

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}\, \delta\Big(F[A_\mu^\Omega]\Big)\, e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}(A)}$$

dará un valor finito, ya que contará los estados físicos sólo una vez.

El punto esencial es que el factor Δ_{FP} da la medida correcta en la integral funcional [20]. El método de Faddeev-Popov permite encontrar la forma explícita del factor Δ_{FP} a partir de su definición (A.3). Notar que Δ_{FP} es un determinante, generalización natural del término $|f'(x_0)|$ en

$$\delta f(x) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\, \delta(x - x_0) \quad con \;\; f(x_0) = 0.$$

Nosotros encontraremos el factor Δ_{FP} usando BRST, que es una manera más simple y económica que el método de F-P.

Appendix B

Transformaciones BRST

Fue Feynman [21] el primero en notar la necesidad de agregar campos fantasmas a una teoría de gauge, para restablecer la unitaridad de ella. Estos campos fantasmas sólo viven dentro de loops y nunca aparecen en las patas externas (resultados finales).

La contribución de estos campos es trivial en el caso de una teoría de gauge abeliana pero es altamente no trivial en el caso no abeliano.

El método de Faddeev-Popov da una derivación consistente de la inspiración de Feynman basada en la integral de camino, otorgando una visión clara del origen de los campos fantasmas. Estos, que son sólo un artificio matemático ya que no representan partículas reales, tienen su origen en el determinante de Faddeev-Popov.

Un paso importante fue hecho por Becchi, Rouet y Stora [22] en 1975. Ellos demostraron que el Lagrangiano total, que incluye el término que fija el gauge y el término compensatorio de F-P, es invariante bajo una supertransformación nilpotente, denominada transformación BRST, en honor a ellos y a Tyutin [23] descubridor de la misma en forma independiente.

Nosotros utilizaremos esta invarianza como principio guía para fijar el gauge y encontrar el término de F-P de una manera correcta y autoconsistente. Es decir, con BRST es posible encontrar la contribución de los campos fantasmas, sin necesidad de calcular explícitamente el determinante de F-P, utilizando sólo argumentos de simetría. Luego BRST es un método más comodo y económico de completar el Lagrangiano.

Las transformaciones BRST se definen a partir de las transformaciones de gauge, cambiando el parámetro de la transformación ε_0 por $(-\eta_0\lambda)$

$$\varepsilon_0^i \longrightarrow -\left(\eta_0^i\,\lambda\right),$$

donde los η_0^i son los campos fantasmas de Faddeev-Popov y λ es un número de Grassmann impar, al igual que los η_0^i.

En general las transformaciones BRST ($\delta'\Phi$) para campos de materia y de gauge quedan definidas por [14]:

$$\delta\Phi(x) = \delta'\Phi(x)\,\lambda. \tag{B.1}$$

Las transformaciones para los campos fantasmas $\eta_0(x)$, se encuentran usando la propiedad de nilpotencia de las transformaciones BRST [14]. Es decir imponiendo:

$$\delta'\left(\delta'\Phi(x)\right) = 0,$$

encontramos $\delta'\eta_0$.

- Tomemos como ejemplo una teoría de gauge no abeliana.

  El Lagrangiano invariante es:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4g^2}F^k_{\mu\nu}F^k_{\mu\nu}\,,$$

  y la transformación de gauge está definida por:

$$\delta_{\varepsilon_0}A^k_\mu = \partial_\mu\varepsilon_0^k + C^k_{ij}\,\varepsilon^i_0 A^j_\mu\,.$$

  Entonces en virtud de (B.1) la transformación BRST del campo de gauge A^k_μ será:

$$\delta' A^k_\mu = -\left(\partial_\mu\eta^k_0 + C^k_{ij}\,\eta^i_0 A^j_\mu\right),$$

  luego imponiendo:

$$\delta'\left(\delta' A^k_\mu\right) = 0,$$

encontramos la regla de transformación que tendrán los campos fantasmas de la teoría:

$$\delta' \eta_0^k = \frac{1}{2} C_{ij}^k \, \eta_0^i \, \eta_0^j \, .$$

Estos resultados serán utilizados para encontrar $\mathcal{L}_{FP}$ una vez escogido el gauge.

Finalmente, y guiándonos por [14], introducimos los antifantasmas $\bar{C}_0$ y el campo auxiliar b_0. Las transformaciones BRST para estos campos se definen como:

$$\delta' \bar{C}_0^k = i b_0^k$$

$$\delta' b_0^k = 0$$

Implementación del Método para Generar $\mathcal{L}_{FP}$:
Sabemos que el Lagrangiano total:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}$$

es invariante BRST. Por lo que se cumple:

$$\delta'(\mathcal{L}) = \delta'(\mathcal{L}_0) + \delta'(\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}) = 0.$$

Pero $\mathcal{L}_0$ ya es invariante BRST, por construcción. Debido a que (B.1) es sólo una reparametrización de la transformación de gauge.

Entonces para generar los términos restantes de $\mathcal{L}$ explotamos la nilpotencia de las transformaciones BRST, escribiendo [14]

$$\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} = (-i)\,\delta'(P)\,, \tag{B.2}$$

esta elección garantiza la invarianza BRST del Lagrangiano total.

El problema se reduce a encontrar una función P, que dependa de $(\Phi, \eta_0, \bar{C}_0, b_0)$, tal que parte de su transformación BRST genere el término que fija al gauge. Luego las cantidades restantes serán reconocidas como el término compensatorio de Faddeev-Popov ($\mathcal{L}_{FP}$).

De este modo es posible generar la expresión de F-P a partir de un gauge arbitrario, con tal de encontrar el P adecuado.

- En nuestro ejemplo (Teoría de Yang-Mills) un $gauge\,fixing$ adecuado será:

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha}\left(\partial_\mu A^a_\mu\right)^2,$$

luego la función P que satisface (B.2) en virtud del $gauge\,fixing$ escogido es:

$$P = \bar{C}^k_0\left(\partial_\mu A^k_\mu + \frac{1}{2}\,\alpha b^k_0\right),$$

ya que:

$$(-i)\,\delta' P = (-i)\left[(-i)\,b^k_0\left(\partial_\mu A^k_\mu + \frac{1}{2}\,\alpha b^k_0\right) - \bar{C}^k_0\left(\partial_\mu D_\mu \eta^k_0\right)\right]. \tag{B.3}$$

Usamos las ecuaciones de movimiento para eliminar el campo auxiliar b_0^k:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_0^i} = 0 \Longrightarrow \partial_\mu A_\mu^i = b_0^i \,,$$

reemplazando en (B.3) obtenemos:

$$(-i)\,\delta' P = \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} = -\frac{1}{2\alpha}\left(\partial_\mu A_\mu^a\right)^2 - i\,\bar{C}_0^k\left(\partial_\mu D_\mu \eta_0^k\right),$$

donde es fácil reconocer el gauge fixing escogido, luego el término de F-P serán las cantidades restantes:

$$\mathcal{L}_{FP} = -i\,\bar{C}_0^k\left(\partial_\mu D_\mu \eta_0^k\right).$$

Este es el método BRST que genera el Lagrangiano de F-P a partir de una fijación de gauge arbitraria. Como se ve, es más simple que calcular un determinante y será el procedimiento que seguiremos en al capítulo 4 para generar $\mathcal{L}_{FP}$ de nuestra teoría.

Es importante recalcar que este procedimiento se basa en la invarianza de $\mathcal{L}$ bajo las transformaciones BRST, que están definidas a partir de las transformaciones de gauge *verdaderas*, las que dejan invariante a $\mathcal{L}_0$ pero no al *Gauge Fixing* y que además es necesario descubrir las transformaciones BRST de los campos fantasmas que garanticen la nilpotencia de BRST. Sólo después de ésto es posible aplicar el método.

Appendix C

Libertad asintótica y el grupo de renormalización.

Libertad asintótica

Los datos experimentales de scattering altamente inelástico se comportan, a altas energías, como si los constituyentes de los nucleones fueran partículas libres. Este fenómeno denominado *libertad asintótica* es muy bien explicado por QCD, y fue un punto historicamente importante para la consolidación de esta teoría como el modelo de las interacciones fuertes.

El ingrediente fundamental de la explicación es que QCD es una teoría de gauge no-abeliana la cual predice, por sí misma, que la constante de acoplamiento del modelo decae al aumentar la energía. La implicancia física de este comportamiento es que las partículas descritas por la teoría se comportan como partículas libres a altas energías o pequeñas distancias, tal y como lo demuestran los experimentos.

El grupo de Renormalización

Un Lagrangiano típico de una teoría de campos renormalizable tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{ct},$$

donde $\mathcal{L}_{ct}$ son los contratérminos del Lagrangiano original $\mathcal{L}_0$, que garantizan la no divergencia de las predicciones físicas del modelo.

Los contratérminos de una teoría renormalizable deben tener la forma de términos ya existentes en el Lagrangiano original, ademas son cantidades divergentes, pudiendo tener o no, una parte finita. Nosotros trabajaremos con el esquema denominado *sustracción minimal*, en el cual los contratérminos no poseen parte finita.

Es inherente a cualquir sistema para renormalizar una teoría de campos el agregar parámetros de escala al modelo. La dependencia de la teoría en dichos parámetros es lo que estudia El Grupo de Renormalización [24].

La unión del Lagrangiano original con los contratérminos permite redefinir los campos y parámetros de la teoría (masas, constantes de acoplamianto, etc) en los campos y parámetros *desnudos*, cantidades formalmente divergentes, a partir de las cuales se pueden encontrar los propagadores, vértices y la acción efectiva resultando esta última también una cantidad divergente. Pero que al escribirla en términos de los campos y parámetros vestidos (los originales) será finita. Es importante recordar que la acción efectiva se calcula con los diagramas de una partícula irreducible de la teoría [25]

La relación entre los diagramas de una partícula irreducible divergentes y finitos es [26]:

$$\Gamma_0^{(n)}(\lambda_0, \epsilon) = Z_\phi^{-n/2}\,\Gamma^{(n)}(\lambda, \mu, \epsilon), \tag{C.1}$$

donde las expresiones con subíndice 0 son las cantidades desnudas (divergentes cuando $\epsilon \longrightarrow 0$ al igual que Z_ϕ). El parámetro de escala en este caso es μ.

La expresión $\Gamma^{(n)}(\lambda, \mu, \epsilon)$ es la cantidad renormalizada (finita) en la cual se aprecia la dependencia explícita en el nuevo parámetro μ, legado del método de renormalización de la teoría. Como $\Gamma_0^{(n)}$ no depende explícitamente de μ derivamos la ecuación (C.1) respecto a dicho parámetro, para obtener la ecuación del grupo de renormalización [24] (para el caso $m = 0$)

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} - n\gamma(\lambda)\right]\Gamma^{(n)}(\lambda, \mu) = 0, \tag{C.2}$$

donde

$$\beta(\lambda) = \mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\bigg|_{\lambda_o} \tag{C.3}$$

$$\gamma(\lambda) = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\log Z_\phi^{1/2}\right]\bigg|_{\lambda_o}. \tag{C.4}$$

La función $\gamma(\lambda)$ recibe el nombre de dimensión anómala. La función β tiene un significado físico muy claro, como veremos enseguida.

Como la ecuación (C.2) es de primer orden, entonces podemos resolverla usando el método de las curvas características [27], encontrando la siguiente relación:

$$\Gamma^{(n)}(p_i, \lambda, \mu) = e^{-n \int_0^t dt' \, \gamma(\bar{\lambda})} \, \Gamma^{(n)}(p_i, \bar{\lambda}, \bar{\mu}), \tag{C.5}$$

donde $\bar{\lambda}(t)$ es la denominada constante de acoplamiento efectiva [24] y satisface la relación:

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = \beta, \tag{C.6}$$

tambien se cumple que

$$\bar{\mu} = \mu_0 e^t.$$

Por otro lado si evaluamos la función $\Gamma^{(n)}(p_i, \lambda, \mu)$ en los momentum escalados $e^t p_i$ obtenemos, usando argumentos dimensionales, la siguiente relación:

$$\Gamma^{(n)}(e^t p_i, \lambda, \mu) = e^{(4-n)t} \Gamma^{(n)}(p_i, \lambda, \mu e^{-t}). \tag{C.7}$$

Juntando las ecuaciones (C.5) y (C.7) obtenemos la siguiente relación [24]

$$\Gamma^{(n)}(e^t p_i, \lambda, \mu) = e^{(4-n)t - n \int_0^t dt' \, \gamma(\bar{\lambda})} \, \Gamma^{(n)}(p_i, \bar{\lambda}(t), \mu). \tag{C.8}$$

Esta ecuación nos dice como se comportan los diagramas una partícula irreducible a diferentes escalas de momentum. Al respecto podemos comentar que escalar todos los momentum por un factor e^t equivale a multiplicar la función original por un factor dependiente de la dimensión anómala y a remplazar su constante de acoplamiento por una que depende del factor de escala. Luego podemos concluir que el comportamiento de las funciones de Green a diferentes escalas de energía está determinado por el comportamiento de $\bar{\lambda}(t)$. Es de partícular interés el comportamiento para escalas altas de energías ($t \longrightarrow \infty$).

La ecuación (C.6) rige el comportamiento de la función $\bar{\lambda}(t)$

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = \beta,$$

luego para conocer el comportamiento a altas energías de la teoría , comportamiento asintótico, es necesario determinar β. En partícular es vital el signo de esta función que nos dirá si la constante de acoplamiento crece o disminulle al aumentar la energía ($t \longrightarrow \infty$). Para una teoría con libertad asintótica en la cual $\bar{\lambda} \longrightarrow 0$ el signo de β es negativo, como es el caso de una teoía de gauge no-abeliana. Para el caso de QED, teoría de gauge abeliana, el signo de β es positivo.

La función β se determina a partir de la renormalización de la constante de acoplamiento. En particular si usamos el esquema de 't Hooft y Weinberg (sustracción minimal), para renormalizar la teoría tenemos que:

$$\lambda_0 = \mu^{2\epsilon}\left[\lambda + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k(\lambda)}{\epsilon^k}\right].$$

Luego en virtud de la ecuación (C.3) obtenemos que la función β queda determinada por [28]:

$$\beta(\lambda) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu}\bigg|_{\lambda_o} = -2\left(1 - \lambda\frac{d}{d\lambda}\right)a_1(\lambda)\,, \tag{C.9}$$

dependiendo sólo del polo simple en ϵ.

Appendix D

Background Field

El método del Background Field permite hacer los cálculos cuánticos sin perder la invarianza de gauge en el campo de fondo.

La idea básica del método es escribir el campo de gauge, que aparece en la acción clásica, como $A_\mu + \tilde{A}_\mu$ donde A_μ es el campo de fondo y $\tilde{A}_\mu$ es el campo cuántico, el cual es la variable de integración en la integral funcional [29]:

$$\tilde{Z}(A_\mu, J) = \int \mathcal{D}\, \tilde{A}_\mu \Delta_{FP}\, e^{i\int d^4x \left[\mathcal{L}_0(A+\tilde{A}) - \frac{1}{2\alpha}\left(G^k\right)^2 + J^k_\mu \tilde{A}^k_\mu\right]},$$

donde el determinante de Faddevv-Popov Δ_{FP} dependerá del gauge G^k escogido. Notar que sólo el campo cuántico esta acoplado a la fuente [30].

El procedimiento comienza con la elección de un gauge que destruye la invarianza en el campo $\tilde{A}_\mu$ pero retiene una invarianza de gauge residual, respecto al campo A_μ.

El gauge adecuado es el siguiente [29]:

$$G^k = \partial_\mu \tilde{A}^k_\mu + C^k_{ij}\, \tilde{A}^i_\mu\, A^j_\mu = \left(D_\mu \tilde{A}^k_\mu\right)^k, \tag{D.1}$$

donde reconocemos la derivada covariante de $\tilde{A}_\mu$, pero donde la conexión es A_μ. La razón para esta elección es que el término que fija el gauge $\left(G^k\right)^2$ quede invariante bajo las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} \delta A^k_\mu &= \partial_\mu \varepsilon^k_0 + C^k_{ij}\, \varepsilon^i_0\, A^j_\mu \\ \delta \tilde{A}^k_\mu &= C^k_{ij}\, \varepsilon^i_0\, A^j_\mu\,, \end{aligned} \tag{D.2}$$

que son las denominadas trasformaciones del Background Field. Donde el campo cuántico $\tilde{A}_\mu$ transforma homogéneamente, como un campo de materia usual, en la representación adjunta del grupo, y el campo A_μ transforma como un campo de gauge usual.

Como la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}_0$ depende de A_μ y $\tilde{A}_\mu$ sólo a través de términos de la forma $\left(A_\mu + \tilde{A}_\mu\right)$, que usando (D.2) transforman:

$$\delta\left(A_\mu + \tilde{A}_\mu\right) = \partial_\mu \varepsilon_0^k + C_{ij}^k\, \varepsilon_0^i \left(A_\mu + \tilde{A}_\mu\right),$$

imitando una transformación de gauge usual de la cantidad $\left(A_\mu + \tilde{A}_\mu\right)$. Tenemos que $\mathcal{L}_0$ será invariante bajo la acción de (D.2).

Luego $\tilde{Z}(A_\mu, J)$ será invariante bajo estas transformaciones [29], preservando la invarianza de gauge en el campo de fondo. Es importante recalcar [13] que (D.2) no corresponde a una verdadera transformación de gauge, ya que ésta será:

$$\delta A_\mu^k = 0$$

$$\delta \tilde{A}_\mu^k = \partial_\mu \varepsilon_0^k + C_{ij}^k\, \varepsilon_0^i \left(A_\mu + \tilde{A}_\mu\right).$$

Esta transformación deja invariante a $\mathcal{L}_0$ pero no al término que fija el gauge.

$$\delta_{verd}\left(G^k G^k\right) \neq 0,$$

lo que garantiza la validez de G^k como $Gauge\,Fixing$.

La acción efectiva del Background Field, que depende tanto del campo clásico $\mathcal{A}$ como del campo de fondo A:

$$\tilde{\Gamma}(\tilde{\mathcal{A}}, A) = \tilde{W}[J, A] - \int d^4x\, J_\mu^k\, \tilde{\mathcal{A}}_\mu,$$

está relacionada con la acción efectiva convencional, que sólo depende de $\mathcal{A}$

$$\Gamma(\mathcal{A}) = W[J] - \int d^4x\, J_\mu^k\, \mathcal{A}_\mu,$$

donde

$$W[J] = -i \ln Z[J]$$

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\tilde{A}_\mu\, \Delta_{FP}\, e^{i\int d^4x\left[\mathcal{L}_0(\tilde{A}) - \frac{1}{2\alpha}\left(G^k\right)^2 + J_\mu^k \tilde{A}_\mu^k\right]}.$$

De la siguiente forma:

$$\tilde{\Gamma}(0, A) = \Gamma(\mathcal{A})|_{\mathcal{A}=A} \,. \tag{D.3}$$

Por lo tanto $\tilde{\Gamma}(0, A)$, que es la acción invariante de gauge del Background Field, es igual a la acción efectiva usual $\Gamma(\mathcal{A})$ con $\mathcal{A} = A$ (pero calculada en un gauge no convencional) y puede usarse para generar la matriz S de la misma manera que una acción efectiva convencional, sólo que además es explícitamente invariante de gauge, lo que genera grandes ventajas.

La acción efectiva $\tilde{\Gamma}(0, A)$ se calcula sumando todas las contribuciones de los diagramas de una partícula irreducible con patas externas A_μ y campos cuánticos dentro de loops. No hay campos cuánticos en las patas externas ya que $\tilde{\mathcal{A}} = 0$ y no hay propagadores de A_μ dentro de loops debido a que la integral funcional es sólo sobre el campo $\tilde{A}$. También contribuyen a la acción efectiva los diagramas que contienen a los campos fantasmas, calculados por el método de Faddevv-Popov o por BRST, a partir del Gauge Fixing (D.1), pero estos campos, al igual que $\tilde{\mathcal{A}}$ sólo viven dentro de loops, de modo que todos los diagramas que contribuyen a la acción efectiva sólo tendrán patas externas A_μ y campos cuánticos o fantasmas dentro de loops.

Debido a que la invarianza de gauge en el campo A_μ es retenida tenemos que los factores de renormalización Z_A y Z_g del campo y de la constante de acoplamiento, respectivamente, están relacionados.

$$\begin{aligned} g_0 &= Z_g g \\ (A_\mu)_0 &= \sqrt{Z_A}\, A_\mu \,. \end{aligned} \tag{D.4}$$

Esto se debe a que la invarianza de gauge obliga a los infinitos de $\tilde{\Gamma}(0, A)$ a tener la forma de una constante divergente por $\left(F^k_{\mu\nu}\right)^2$ y como $F^k_{\mu\nu}$ es renormalizada, según (D.4), por:

$$\left(F^k_{\mu\nu}\right)_0 = \sqrt{Z_A}\left[\partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu A^k_\mu + g\, Z_g \sqrt{Z_A}\, C^k_{ij}\, A^i_\nu\, A^j_\mu\right],$$

tenemos que se debe cumplir

$$Z_g \sqrt{Z_A} = 1, \tag{D.5}$$

para satisfacer los requisitos de invarianza.

Esta relación es de suma importancia ya que permite determinar la función β, del grupo de renormalización, a partir de calcular, únicamente, las funciones de Green de dos puntos, no siendo necesario considerar funciones de Green tipo vértices [29].

La función β se define como:

$$\beta = -g\,\mu\,\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_g\,,$$

por lo que depende de la renormalización de la constante de acoplamiento, pero en virtud de (D.5) se puede escribir como [29]:

$$\beta = g\gamma_A\,,$$

donde γ_A es la dimensión anómala, que se define como:

$$\gamma_A = \frac{1}{2}\,\mu\,\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_A\,,$$

que depende de la renormalización del campo.

La simplificación del método radica en que el factor Z_A es más simple de calcular que Z_g, necesitando sólo las funciones de Green de dos puntos para hacerlo.

En virtud de la relación (D.5) y siguiendo el esquema de [29], que utiliza regularización dimensional, para calcular las integrales y sustracción minimal, como esquema de renormalización, podemos escribir:

$$\beta = -g\left[\beta_0\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 + \beta_1\left(\frac{g}{2\pi}\right)^4 + \ldots\,, \qquad \text{(D.6)}$$

si

$$Z_A = 1 + \frac{1}{\epsilon}\beta_0\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 + \frac{1}{2\epsilon}\beta_1\left(\frac{g}{2\pi}\right)^4 + \ldots\,. \qquad \text{(D.7)}$$

Estas relaciones nos permiten encontrar la función β de la teoría conociendo la renormalización del campo Z_A, y son las utilizadas en el capítulo 6.

Bibliography

[1] H. Weyl, Gravitation und Elecktrizität. Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaften Berlin, 465-480 (1918).

[2] N. Straumann, Early History of Gauge Theory and Weak Interaction, hep-th/9609230.

[3] H. Weyl, Electron und Gravitation. I. Z. Phys. **56**, 330 (1929).

[4] C. N. Yang and R. L. Mills, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).

[5] G. 't Hooft, When Was Asymptotic Freedom Discover? or The Rehabilitation of Quantum Field Theory. hep-th/9808154.

[6] P. Higgs, Phys. Lett. **12**, 1067 (1964); Phys. Lett. **13** 508 (1964); Phys. Rev. **145**, 1156 (1966).

[7] M. Gell-Mann, Phys. Rev **125**, 1067 (1962).

[8] M. Gell-Mann and Y. Ne'eman, Eightfold Way (1964), Reading W. Benjamin.

[9] Y. Ne'eman, Nucl. Phys. **26**, 222 (1961).

[10] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).

[11] C. Zweig, CERN Rep. 8419/TH 412.

[12] L. D. Faddeev and A.A. Slavnov, Gauge Fields Introduction to Quantum Theory, The Benjamin Cummunings Publishing Company, EEUU, 1982, p.3.

[13] S. Weinberg, The Quantum Theory of Field, Vol. II, Press Syndicate of the University of Cambridge 1996, p. 97.

[14] T. Kugo and S. Uehara, General Procedure of Gauge Fixing Based on BRST Invariance Principle, Phys. **B197**, 378-384 (1982).

[15] G. 't Hooft and M. Veltman, Diagrammar, CERN, Geneva 1973, p. 4-5.

[16] M. Peskin and D. Shroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Addison-Wesley Publishing company, EEUU 1997, p. 500.

[17] M. Peskin and D. Shroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Addison-Wesley Publishing company, EEUU 1997, p. 295.

[18] L. Ryder, Quantum Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge 1991, p. 247.

[19] T. Muta, Fundations of Quantum Chromodinamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories, World Scientific, Singapore 1987.

[20] M. Kaku, Quantum Field Theory a Modern Introduction, Oxford University Press, New York 1993, cap. 9 sec. 2.

[21] R. P. Feynman, Acta Physica Polonica **24**, 697 (1963).

[22] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, Renormalization of Gauge Theories, Ann. Phys. **98**, 287-321 (1975).

[23] I. V. Tyutin, Lebedev Institute preprint **N39** (1975).

[24] D. J. Gross, Les Houches. Sessiones $XXVIII$, Methods in Field Theory, 1975.

[25] M. Kaku, Quantum Field Theory a Modern Introduction, Oxford University Press, New York 1993, p. 279.

[26] P. Ramond, Field Theory a Modern Primer, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. EEUU 1987, p. 173.

[27] L. Elsgoltz, Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional, Editorial MIR, Moscú 1969, cap. 5 sec. 2.

[28] P. Ramond, Field Theory a Modern Primer, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. EEUU 1987, p. 183.

[29] L. F. Abbott, The Background Field Method Beyond One Loop, CERN, Geneva 1980.

[30] G. 't Hooft, In Acta Universitatis Wratislavensis No. 38, XIIth Winter School of Theoretical Physics in Karpacz; Funtional and Probabilistic Methods in Quantum Field Theory Vol. I (1975).