

Práctica de licenciatura en astronomía

Marco San Martín Hormazábal

10 de junio de 2016

Índice general

1. Introducción	1
2. Cosmología estándar	2
2.1. Métrica FLRW	2
2.2. Dependencia del factor de escala $a(t)$ con el redshift z	3
2.3. Ley de Hubble en FLRW	4
2.4. Expansión del factor de escala $a(t)$ y el parámetro de desaceleración	5
2.5. Ecuación de fluido perfecto	6
2.6. Ecuaciones de estado	6
2.7. Relación de la densidad $\rho(t)$ (o $\epsilon(t)$) con el factor de escala $a(t)$	7
2.8. Ecuaciones de Friedmann	7
2.9. Expresión para encontrar el parámetro de desaceleración $q(t)$	8
2.10. Tiempo cosmológico t y redshift z relacionados mediante composición del universo Ω_i	9
2.11. Distancia comóvil en función del redshift z para universo multicomponente	11
2.12. Distancia luminosa	12
2.12.1. Definición	12
2.12.2. Deducción	12
2.13. Distancia angular	15
2.13.1. Definición	15
2.13.2. Deducción	16
2.14. Comparación d_L y d_A	16
2.15. Módulo de distancia en astronomía	16
2.16. Referencias	17
3. Resumen de los fundamentos teóricos de Gravedad-δ	19

3.1. Introducción	19
3.1.1. Teorías- $\tilde{\delta}$ ($\tilde{\delta}$ -Theories)	19
3.1.2. Transformaciones- $\tilde{\delta}$ ($\tilde{\delta}$ -transformations)	20
3.1.3. Acción modificada	21
3.2. Lagrangiano en Gravedad- $\tilde{\delta}$	22
3.3. Ecuaciones de movimiento	22
3.4. Fluido perfecto	23
3.5. Trayectoria para partículas	24
3.5.1. Partículas masivas	24
3.5.2. Partículas sin masa	25
3.6. Métrica para describir al universo	25
3.7. Ecuaciones "de Friedmann" para $\mathbf{g}_{\mu\nu}$	27
3.8. Ecuaciones "de Friedmann" para $\tilde{g}_{\mu\nu}$	27
3.9. Relaciones para el factor de escala efectivo \tilde{R}	28
3.10. Comentarios	28
3.11. Referencias	29
4. Ecuaciones para el ajuste de datos de supernovas	30
4.1. Distancia luminosa	30
4.2. Módulo de distancia	31
4.3. Factor de escala ("Tamaño" del unviverso)	31
4.4. Parámetro de Hubble	32
4.5. Parámetro de desaceleración	32
4.6. Dependencia entre redshift y tiempo cosmológico	32
4.7. Densidades de materia y radiación ordinaria: Ω_m y Ω_r	33
4.8. Determinación de materia y radiación delta	33
4.9. Referencias	33
5. Ajuste de supernovas y predicción de parámetros para Gravedad-$\tilde{\delta}$	34
5.1. Ajuste con datos experimentales	34
6. Resultados para Gravedad-$\tilde{\delta}$	36
6.1. Edad del universo	36

6.2. Factor de escala efectivo \tilde{Y}	36
6.3. Predicción de \tilde{H}	37
6.4. Determinación del parámetro de desaceleración $q(t)$	38
6.5. Determinación del redshift de transición z_t	38
6.6. Dependencia de tiempo cosmológico con redshift	39
6.7. Test con OHRG	39
6.8. Referencias	40
7. Comentarios sobre los resultados y posibles investigaciones a futuro	41
7.1. Referencias	45

Capítulo 1

Introducción

El estudio del universo es una rama de la ciencia que requiere de modelos teóricos aportados por la física, y una validación por parte de la astronomía que es quién aporta la evidencia científica. Debido al estudio de galaxias lejanas mediante telescopios y del *CMB* mediante el satélite Planck se sabe que el universo es plano, es homogéneo e isótropo (*Principio Cosmológico*), además de estar en expansión (observación hecha por Edwin Hubble) y ser acelerada (Premio Nobel de física 2011). Además el estudio de las curvas de rotación galáctica ha sugerido la existencia de una masa ("materia") faltante, diferente a la común, a la que se le ha denominado *materia oscura*. Todas estas observaciones son muy recientes y deben ser explicadas por modelos teóricos.

Hasta ahora, una de las mejores formas de explicar la expansión del universo, es introduciendo una constante en las ecuaciones de Einstein para el universo. Esta constante (la constante cosmológica) se asocia con la *energía oscura*, una energía que domina el universo actual y trata de explicar la expansión acelerada del universo que se ha observado.

Los intentos por entender que es la energía oscura no han dado frutos, al igual que con la materia oscura. Uno de los intentos de la física teórica para explicar que es la energía oscura, ha sido suponer que corresponde a energía del vacío, sin embargo las estimaciones teóricas versus la densidad de energía oscura estimada por observaciones, han arrojado errores de más de 100 órdenes de magnitud.

La búsqueda de una teoría que pueda explicar estos fenómenos cosmológicos es lo que motiva el estudio y sugerencia de nuevos modelos teóricos que tengan sustentos, tanto en la física teórica como en los datos observacionales.

Capítulo 2

Cosmología estándar

2.1. Métrica FLRW

Para estudiar el universo a gran escala, es necesario centrar las observaciones en fenómenos físicos que ocurren a muy grandes distancias. Los fenómenos que permiten hacer estos estudios se pueden resumir en [2] la *Ley de Hubble* (expansión del universo) y la *Radiación de Fondo de Microondas* (*Cosmic microwave background, CMB*).¹

De la observación del *Corrimiento al Rojo Cosmológico* (*Cosmological Redshift*) de galaxias lejanas se pudo concluir que estas se alejaban de nosotros (observador). La velocidad era proporcional a la distancia a la que estaba la galaxia de nosotros. Esta observación, inicialmente hecha por Hubble en la década de 1920 [1], implica una independencia de la dirección en que se mira (está la galaxia que se observa), por ende hay una *isotropía* en el distanciamiento con respecto a nosotros, ya que la dependencia de la velocidad es radial y no involucra una parte angular. Asumiendo que todas las galaxias se están alejando de nosotros (y asumiendo que no estamos en una posición especial y única en el universo), es fácil notar que todas las galaxias se están alejando de todas en dirección radial (unas de otras). De alguna manera la descripción física del problema debe describir todo punto del espacio del universo, sin distinción uno del otro. [2]

La existencia del CMB fue detectada por primera vez en 1965 por Arno Penzias y Robert Wilson mientras trabajaban para la empresa Bell Telephone Laboratories como un exceso de ruido. Esta radiación había sido predicha en 1948 con las participaciones de Robert Herman, George Gamow y Ralph Alpher. Casualmente, un grupo de investigadores de la Universidad de Princeton estaban diseñando un experimento para encontrar el CMB. Al conocer la noticia sobre el exceso de ruido detectado por Penzias y Wilson, se dieron cuenta que este correspondía al CMB. [3] El CMB corresponde a la radiación (fotones) que logró escapar del Universo cuando este se hizo *transparente*. Antes de esto, el universo era opaco. Esta característica se debía a la dispersión (scattering) de fotones debido a que la materia bariónica en esta etapa del universo aún no se encontraba formando átomos, estando como un plasma ionizado. A medida que el universo se volvió menos denso por la expansión de este, la densidad bajó hasta un punto tal que ocurre la *transición* de opaco a transparente, donde la materia bariónica pasa a estar en un estado neutro (formando átomos de hidrógeno mayoritariamente). En este momento, los fotones logran viajar libremente por el universo "desacoplándose de la materia". Esta radiación se "desprende" en todo el Universo y viaja por todo este en todas direcciones.[4] La observación actual de esta radiación (que se logró escapar en la época de transición de opaco a transparente) es altamente homogénea e isótropa y puede ser descrita por un espectro de cuerpo negro caracterizado por una temperatura de 2.726 ± 0.0013 K [4]. En términos más técnicos, se dice que el CMB corresponde a la radiación térmica que es emitida durante la época de *desacoplamiento de la radiación de la materia* (*photon decoupling*). Es importante notar que las variaciones en T en el espectro del CMB son muy pequeñas. Así se tiene que el CMB es extremadamente homogéneo [5] e isótropo. [2]

En conjunto estas observaciones permiten sustentar un modelo cosmológico donde la **homogeneidad e isotropía**

¹También existen observaciones de otros fenómenos como la *Estructura del Universo a Gran Escala* (*Large-Scale Structure*), existencia de *Oscilaciones Acústicas de Bariones* (*Barion Acoustic Oscillations* (BAO)), entre otros.

sean algo básico para su construcción. Estas dos características para el universo a gran escala se conocen como *Principio Cosmológico*. [5]

Una forma de imaginar el universo a gran escala (distancias de cientos de Mpc), es suponer que las galaxias están distribuidas homogéneamente formando un fluido cósmico, que no posee viscosidad ni conductividad térmica; esencialmente es un fluido ideal a grandes escalas. [2]

En un universo homogéneo e isótropo, si se coloca un observador que se está comoviendo (*comoving*) con respecto al fluido cósmico (galaxias), verá que el universo (en el tiempo) sigue siendo a gran escala homogéneo e isótropo.

Una métrica espacio-tiempo descrito en un sistema de coordenadas comóviles que quiera describir al universo, debe cumplir las condiciones del Principio Cosmológico: homogeneidad e isotropía. Además el tiempo que estará incluido en la métrica se le llamará *tiempo cosmológico* y corresponderá al tiempo propio medido por el observador fundamental comoviéndose con respecto al fluido cósmico en este sistema de coordenadas.

A partir de una métrica genérica:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Aplicando condiciones de isotropía (simetría rotacional, simetría esférica), ecuación de geodésicas (de relatividad general) y agregando la condición de homogeneidad espacial (simetría traslacional), además de usar que la métrica es invariante bajo transformación, se obtiene (luego de un muy largo cálculo)[2]:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (2.1)$$

Donde se ocupó la signatura $(-1, +1, +1, +1)$. Esta métrica cumple con el principio cosmológico. También admite tres curvaturas k posibles: $-1, 0$ o 1 . Cualquier otro valor de $k \in \mathbb{R}$ puede ser reducido a uno de los tres valores anteriores mediante un reescalamiento de la variable r .

La función $a(t)$ que aparece delante de la parte espacial de la métrica se conoce como *factor de escala*, e indica (físicamente) como va cambiando el "tamaño" del espacio en función del tiempo cosmológico t .

La métrica 2.1 se conoce como *Métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker* (FLRW).

2.2. Dependencia del factor de escala $a(t)$ con el redshift z

Para estudiar la dependencia del factor de escala con el redshift, es necesario analizar la trayectoria de un fotón entre una galaxia observada y nosotros (observador). Usando la métrica FLRW 2.1 y notando que un fotón sigue una geodésica nula $ds^2 = 0$ describiendo físicamente una trayectoria radial en el espacio queda²:

$$c^2 dt^2 = a(t)^2 dr^2 \quad (2.2)$$

Estudiando la trayectoria de dos fotones que son emitidos en diferentes tiempos (t_0 y t con $t \neq t_0$), se tiene que³:

$$dr = \frac{c}{a(t)} dt \quad (2.3)$$

²Dedución de [2]

³Notar que los subíndices 0 indica que se evalúa en el tiempo actual, el presente.

$$\int_0^R dr = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} \frac{c}{a(t)} dt$$

$$\int_0^R dr = \int_t^{t+\Delta t} \frac{c}{a(t)} dt$$

Dado que dx^i son coordenadas comóviles (cosmología) las cuales describe el universo en expansión (contracción o cualquier escalamiento) se tiene que son exactamente iguales para ambos fotones, luego igualando estas dos expresiones se llega a:

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} \frac{c}{a(t)} dt = \int_t^{t+\Delta t} \frac{c}{a(t)} dt$$

Como $a(t)$ es un parámetro que cambia en grandes escalas temporales, y no en un periodo de emisión de luz, entonces se puede considerar constante durante el intervalo de tiempo de emisión. Usando esto queda:

$$\frac{\Delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\Delta t}{a(t)}$$

Relacionando los tiempos (periodos, por ejemplo) de los fotones con las frecuencias y longitudes respectivas de cada fotón se obtiene:

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{\nu_0}{\nu} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \quad (2.4)$$

Y finalmente usando la definición de corrimiento al rojo cosmológico:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1$$

Se obtiene la expresión más conocida⁴:

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = \frac{1}{1+z} \quad (2.5)$$

2.3. Ley de Hubble en FLRW

Como el espacio es homogéneo, se puede tomar cualquier punto en la métrica como colocación del observador. Por conveniencia fíjese $r = 0$ para el observador. Luego el observador está en ⁵ $(r, \theta, \phi) = (0, 0, 0)$ y la galaxia lejana en $(r, 0, 0)$ por simplificación (simetría del problema). Entonces la distancia estará dada por la parte radial (distancia comóvil radial por el factor de escala)[2]:

$$D_r = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

⁴En algunos casos $a(t_0)$ se define igual a 1. Esto no afecta la deducción ni las siguientes fórmulas de cosmología estándar. Es una forma de referencia en el cual se entiende que "en la actualidad" el universo tiene un tamaño espacial de "1".

⁵Deducción [2]

Para obtener la velocidad, se diferencia con respecto al tiempo cósmico:

$$v_r = \dot{D}_r = \dot{a}(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{\dot{a}}{a} D_r$$

Y fijando la constante de Hubble como (definición de constante de Hubble):

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \tag{2.6}$$

Se obtiene la ley de Hubble expresada de la siguiente manera:

$$v_r = H(t)D_r \tag{2.7}$$

Si se hace una observación en la actualidad (caso real) se tendrá que:

$$v_r = H_0 D_r \tag{2.8}$$

Donde H_0 es la constante de Hubble que se puede obtener observacionalmente.

2.4. Expansión del factor de escala $a(t)$ y el parámetro de desaceleración

La necesidad de entender como cambia el tamaño del universo durante el tiempo conllevó al estudio de las tasas de cambio del factor de escala (una forma de "medir el tamaño del universo"). A la primera derivada (normalizada por el factor de escala a un tiempo t dado) se le conoce como H (por Hubble). La segunda variación como *parámetro de desaceleración* 2.9.⁶

El factor de escala $a(t)$ se puede expandir en forma de serie de Taylor en torno a t_0 [6]:

$$a(t) = a(t_0) + (t - t_0) \left. \frac{da(t)}{dt} \right|_{t_0} + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \left. \frac{d^2a(t)}{dt^2} \right|_{t_0} + O((t - t_0)^3)$$

Definiendo el parámetro de desaceleración $q(t)$ como:

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \tag{2.9}$$

Usando 2.5 se puede despejar z , y dejando solo términos hasta orden 2, se obtiene

$$z(t) \approx (t_0 - t)H_0 + (t_0 - t)^2 \left(1 + \frac{1}{2}q_0 \right) H_0^2 + \dots \tag{2.10}$$

Esto se puede ampliar a cualquier orden.⁷

⁶También existe una tercera y cuarta tasa de cambio a las que se les conoce como *Jerk*, *Snap* y *lerk*. Se puede revisar la bibliografía para más información.

⁷ El cálculo se vuelve muy tedioso. Expansiones a mayor orden se encuentran en bibliografía

2.5. Ecuación de fluido perfecto

La descripción de las galaxias se puede tratar como un "fluido cosmológico" en el universo. Para esto se puede hacer uso de el fluido perfecto de relatividad general descrito por[7]:

$$T^{\mu\nu} = (\rho c^2 + P) u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}$$

Como las galaxias (fluido cosmológico) está sujeto en la métrica, su cuadrivelocidad solo tiene componentes temporales y agregando que la energía de las galaxias se debe principalmente a su masa en reposo y no a su velocidad, entonces:

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

Usando la conservación de la energía expresada por la divergencia de $T^{\mu\nu}$:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu T^{\mu\alpha} + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu T^{\nu\alpha} = 0$$

Y evaluando la componente temporal ya que la cuadrivelocidad de las galaxias solo es diferente de 0 en esta componente (y haciendo uso de la métrica FLRW 2.1), queda:

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0 \quad (2.11)$$

Que corresponde a la ecuación de fluido con la métrica FLRW[8].

2.6. Ecuaciones de estado

Para poder encontrar la dependencia del factor de escala con la densidad ρ se hace necesario otra ecuación que se pueda relacionar con 2.11. Esta será la ecuación de estado [8].

Para la materia la presión será 0, luego: $\rho_m = \frac{\epsilon_m}{c^2}$ y $P_m = 0$.

Para los fotones se tiene que $P = \frac{1}{3}\epsilon_r$ donde ϵ_r es la densidad de energía de radiación.

Para la constante cosmológica esta ecuación se puede deducir entendiendo a Λ como una densidad de energía constante que no se diluye con una variación del factor de escala $a(t)$. Así de la ecuación 2.11 queda $P_\Lambda = -\epsilon_\Lambda$.

Luego, todas estas ecuaciones de estado se pueden resumir en una sola ecuación de la forma:

$$P_i = \omega_i \epsilon_i \quad (2.12)$$

Con $\omega_m = 0$, $\omega_r = 1/3$ y $\omega_\Lambda = -1$.

2.7. Relación de la densidad $\rho(t)$ (o $\epsilon(t)$) con el factor de escala $a(t)$

Usando la ecuación de fluido 2.11 y la ecuación de estado genérica 2.12, se obtiene, (lizado cada componente por separado, una ecuación diferencial[8]:

$$\dot{\epsilon}_i + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon_i + \omega_i\epsilon_i) = 0 \quad (2.13)$$

Resolviéndola para cada componente se obtiene:

Para la radiación:

$$\epsilon_r(t) = \epsilon_{r,0}a(t)^{-4} \quad (2.14)$$

Para la materia:

$$\epsilon_m(t) = \epsilon_{m,0}a(t)^{-3} \quad (2.15)$$

Para la constante cosmológica:

$$\epsilon_\Lambda(t) = \epsilon_{\Lambda,0} \quad (2.16)$$

es decir, la densidad de energía asociada a la constante cosmológica es constante. La densidad asociada a Λ no cambia con el tiempo cosmológico, ni con expansión o contracción del universo.

2.8. Ecuaciones de Friedmann

Para obtener una descripción física del modelo a partir de la métrica FLRW que describe al universo, se pueden aplicar las ecuaciones de Einstein. A las ecuaciones resultantes de este proceso usando la métrica FLRW se conocen como *ecuaciones de Friedmann*.

Las ecuaciones de campo de Einstein son:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Donde $G_{\mu\nu}$ está dado por:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

Donde se ha incluido la constante cosmológica Λ como una proporcionalidad a la métrica $g_{\mu\nu}$.

Luego, escribiendo las ecuaciones de campo de Einstein en forma explicita queda:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.17)$$

Todos los componentes de tensores de la ecuacion 2.17 son calculables directamente de la métrica FLRW, excepto $T_{\mu\nu}$, que se debe obtener de la expresión de un fluido perfecto de relatividad general.

Con esto se obtienen dos ecuaciones, una para la primera derivada en a y otra para la segunda derivada en a ⁸:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho + \Lambda}{3} - K\frac{c^2}{a^2} \quad (2.18)$$

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = \Lambda - 4\pi G\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \quad (2.19)$$

2.9. Expresión para encontrar el parámetro de desaceleración $q(t)$

Usando la definición del parámetro de desaceleración 2.9 se puede obtener:

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}}{a(\dot{a}/a)^2} = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}$$

Y usando la primera ecuación de Friedmann 3.4 queda:

$$\frac{1}{a} \frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3c^2} [\epsilon_m + \epsilon_r + 3p_r] + \frac{\Lambda}{3}$$

Como $\Lambda = 8\pi G\rho_\Lambda$ ⁹ y $\epsilon_r = 3p_r$, queda

$$\frac{1}{a} \frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3c^2} [\epsilon_m + 2\epsilon_r - 2\epsilon_\Lambda]$$

Luego,

$$q(t) = \frac{8\pi G}{3H^2c^2} \left[\frac{1}{2}\epsilon_m + \epsilon_r - \epsilon_\Lambda \right]$$

Y como la densidad crítica¹⁰ es $\epsilon_c = \frac{3c^2H^2}{8\pi G}$, se obtiene:

$$q(t) = \frac{1}{\rho_c} \left[\frac{1}{2}\rho_m + \rho_r - \rho_\Lambda \right] = \frac{1}{2} \sum_i ((1 + 3\omega_i)\Omega_i(t))$$

Donde $\omega_m = 0$, $\omega_r = 1/3$ y $\omega_\Lambda = -1$ y $\Omega_i(t) = \frac{\epsilon_i(t)}{\epsilon_c(t)}$.¹¹

⁸Esta deducción es muy larga. Se puede encontrar completa en [7].

⁹ya que si esta tuviese una "densidad", sería esperable poder sumarla dentro de la primera ecuación de Friedmann como una densidad, y no solo como una constante 3.4. Además debería tener signo positivo ya que aporta a la expansión, oponiéndose al colapso del universo por la densidad de materia positiva

¹⁰se despeja bajo la condición de *densidad necesaria para que el universo sea plano* $k = 0$, en la primera ecuación de Friedmann 3.4

¹¹Deducción en [9]

2.10. Tiempo cosmológico t y redshift z relacionados mediante composición del universo Ω_i

Para obtener esto es necesario reescribir la primera ecuación de Friedmann 3.4 tomando en cuenta que $\Lambda = 8\pi G\rho_\Lambda$ e incluyendo la densidad total ϵ donde $\epsilon = \sum_i \epsilon_i$ sobre todos los componentes i del universo, quedando

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon}{3c^2} - k\frac{c^2}{a^2} \quad (2.20)$$

Haciendo $K = 0$ se obtiene la densidad de energía crítica ϵ_c ,

$$\epsilon_c = \frac{3H^2c^2}{8\pi G}$$

expresión que sirve para cualquier tiempo cosmológico dado t .

Luego, la ecuación 2.20 se puede reescribir como:

$$H^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_c} H^2 - k\frac{c^2}{a^2} \quad (2.21)$$

Y usando la definición de $\Omega = \frac{\epsilon}{\epsilon_c}$ y reemplazándola en 2.21 queda:

$$H^2(1 - \Omega) = -k\frac{c^2}{a^2} \quad (2.22)$$

Y evaluando 2.22 hoy queda:

$$H_0^2(1 - \Omega_0) = -k\frac{c^2}{a_0^2} \quad (2.23)$$

Y como $a_0 = 1$ (por definición),

$$H_0^2(1 - \Omega_0) = -kc^2 \quad (2.24)$$

Definiendo $\Omega_{k,0} = 1 - \Omega_0$ se obtiene

$$\Omega_{k,0} = -\frac{kc^2}{H_0^2} \quad (2.25)$$

Lo cual se "puede interpretar" como una densidad asociada a un exceso de energía con respecto a la crítica tal que causa una curvatura (una desviación con respecto a la planitud del espacio).

Reemplazando en 2.20

$$H^2 = \frac{8\pi G\epsilon}{3c^2} + \frac{H_0^2(1 - \Omega_0)}{a^2} \quad (2.26)$$

y usando la definición de ϵ_c pero evaluado en t actual (H_0),

$$\epsilon_{c,0} = \frac{3H_0^2 c^2}{8\pi G}$$

y sustituyéndola en 2.26,

$$H^2 = \frac{\epsilon H_0^2}{\epsilon_{c,0}} + \frac{H_0^2(1 - \Omega_0)}{a^2} \quad (2.27)$$

Dividiendo en ambos lados por H_0^2 ,

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\epsilon}{\epsilon_{c,0}} + \frac{(1 - \Omega_0)}{a^2} \quad (2.28)$$

Y expresando la densidad de energía en todas sus componentes,

$$\epsilon(t) = \epsilon_r(t) + \epsilon_m(t) + \epsilon_\Lambda = \frac{\epsilon_{r,0}}{a^4} + \frac{\epsilon_{m,0}}{a^3} + \epsilon_\Lambda \quad (2.29)$$

Y reemplazando 2.29 en 2.28 da

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\frac{\epsilon_{r,0}}{a^4} + \frac{\epsilon_{m,0}}{a^3} + \epsilon_\Lambda}{\epsilon_{c,0}} + \frac{(1 - \Omega_0)}{a^2} \quad (2.30)$$

Y expresándolo en notación de Ω_i da

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_\Lambda + \frac{(1 - \Omega_0)}{a^2} \quad (2.31)$$

Y como se había supuesto que $a(t_0) = 1$ y además $H = \dot{a}(t)/a(t)$,

$$\frac{da}{dt} = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{r,0}}{a^2} + \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_\Lambda a^2 + (1 - \Omega_0)} \quad (2.32)$$

E integrando para encontrar una relación entre t y a ,

$$t = \int_0^t dt = \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\frac{\Omega_{r,0}}{a^2} + \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_\Lambda a^2 + (1 - \Omega_0)}} \quad (2.33)$$

Con la condición $\Omega_0 = \Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_\Lambda$.¹²

Como a no es un parámetro directamente medible, es conveniente relacionarlo con el redshift z , que sí es fácil de medir astronómicamente,

¹²Deducción en [10]

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{1/(1+z)} \frac{da}{\sqrt{\frac{\Omega_{r,0}}{a^2} + \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_\Lambda a^2 + 1 - \Omega_0}} \quad (2.34)$$

Donde t está midiendo el tiempo cosmológico, es decir, cuando se "crea" el universo $t = 0$, y para la actualidad hay que integrar la expresión 2.34 hasta $z = 0 \rightarrow a = 1$.

2.11. Distancia comóvil en función del redshift z para universo multicomponente

Tomando la métrica FLRW 2.1 y haciendo 0 las componentes angulares (como ya es de costumbre), y tomando la geodésica nula para un fotón:

$$cdt = a(t)dr$$

e integrando,

$$c \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (2.35)$$

Luego, la distancia propia estará dada por:

$$d_p(t) = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

Si la distancia la mide un observador en la actualidad, entonces $a(t) \rightarrow a(t_0)$ además de notar que el objeto que observa tendrá un cierto redshift z el cuál será la variable de la función, luego

$$d_p(t_0) = a(t_0) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (2.36)$$

y reemplazando 2.35 en 2.36 se obtiene:

$$d_p(t_0) = a(t_0)c \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.37)$$

y haciendo el cambio de variable $da = \frac{da}{dt} dt$, queda

$$d_p(t_0) = a(t_0)c \int_{t_1}^{t_0} \frac{da}{\dot{a}(t)a(t)} \quad (2.38)$$

y usando 2.32 la ecuación 2.38 queda como:

$$d_p(t_0) = \frac{a(t_0)c}{H_0} \int_{a(t)}^{a(t_0)} \frac{da}{\sqrt{\Omega_{r,0} + \Omega_{m,0}a + \Omega_\Lambda a^4 + (1 - \Omega_0)a^2}} \quad (2.39)$$

y usando $a(t_0) = 1$, se obtiene la distancia propia medida por un observador en la actualidad que detecta un objeto con un redshift z en un universo de composición inicial $\Omega_{i,0}$.

$$d_p = \frac{c}{H_0} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{da}{\sqrt{\Omega_{r,0} + \Omega_{m,0}a + \Omega_{\Lambda}a^4 + (1 - \Omega_0)a^2}} \quad (2.40)$$

Que corresponde a la distancia propia en un universo de métrica FLRW para cualquier curvatura conociendo un parámetro medible z y parámetros de la composición del universo $\Omega_{i,0}$.¹³

2.12. Distancia luminosa

2.12.1. Definición

Para astronomía es conveniente establecer un concepto de distancia que esté relacionada con un observable (algo medible). En el caso euclideo se tiene que el flujo de radiación F (energía por unidad de tiempo que atraviesa una área A determinada) está relacionado con la potencia emitida L (energía por unidad de tiempo) mediante:¹⁴

$$F = \frac{L}{A} = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (2.41)$$

Donde el área en 2.41 está determinada por una esfera de radio r . Es decir, si el observador está a una distancia radial r de la fuente luminosa en una geometría euclidea, entonces el flujo que pasará por el observador estará dado por la ecuación 2.41.

De esta ecuación se puede encontrar la distancia entre el observador y la fuente luminosa observada. Esta distancia r se puede generalizar a una geometría cualquiera en cuyo caso se denomina "distancia luminosa" d_L , por lo que la ecuación 2.41 queda escrita como:

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (2.42)$$

2.12.2. Dedución

Considérese un espejo de radio b que está recibiendo luz de una fuente que se encuentra a una distancia r_1 del observador. Los fotones que alcanzan el espejo, forman un cono de medio ángulo ϵ situado en la fuente luminosa.

Entonces de la métrica FLRW (ecuación 2.1):

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (2.43)$$

Lo que se quiere encontrar es el ancho del espejo b en función del ángulo ϵ . Lo primero es notar que ϵ está medido entre la fuente luminosa (origen) y el observador, por lo que el segmento de línea en esta situación tiene un $dr = 0$ ya que no hay una variación radial (el segmento de línea, que será el espejo, tendrá una variación solo sobre la superficie $dr = 0$ de la geometría, es decir, un espejo perpendicular a la línea de visión que une

¹³Dedución en [11]

¹⁴La deducción más formal se basa en relatividad general. La deducción completa y más general para cosmología se puede encontrar en [12]

el objeto luminoso con el observador). El ángulo ϵ está apuntando directamente en la misma dirección de la línea que une al observador con el objeto luminoso, luego $d\phi = 0$. (Nota: si $d\phi$ fuese el ángulo que se identifica con ϵ , se tendría un ángulo medido a una distancia r del objeto, y apuntando en un θ específico, es decir, no necesariamente en la misma línea de visión de observador-fuente luminosa); luego $\epsilon = d\theta$, tal que el ángulo sí apunte en la línea de visión, ocupando el elemento de línea espacial se tendrá que:

$$dD = a(t)r d\theta \quad (2.44)$$

y notando que $dD = b$ (mitad del diámetro del espejo) y donde la distancia objeto-observador es r_1 (y que en la posición del observador el tiempo es el actual t_0):

$$b = a(t_0)r_1\epsilon \quad (2.45)$$

La ecuación es válida para las tres curvaturas que admite FLRW. Esta expresión permite relacionar el radio del espejo con el ángulo.¹⁵

Ahora se desea calcular la fracción de luz que se está recibiendo en la posición del observador. Para esto es necesario estimar el ángulo sólido que se subtenden entre la fuente luminosa y el observador para luego dividirlo por el total de ángulo sólido 4π (esto es válido para fuentes que emiten isotrópicamente). Entonces, calculando el $\Delta\Omega$ basándose en la métrica FLRW:

$$\Delta\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\epsilon \sin(\theta)d\theta = 2\pi(1 - \cos(\epsilon))$$

Y notando que (observacionalmente) ϵ es muy chico, $\cos(\epsilon) \approx 1 - \epsilon^2/2$

$$\Delta\Omega \approx \pi\epsilon^2 \quad (2.46)$$

Y usando 2.45 en 2.46 queda $\Delta\Omega \approx \frac{\pi b^2}{r_1^2 a^2(t_0)}$. Luego tomando que $A = \pi b^2$, donde A es el área propia del espejo queda:

$$\Delta\Omega \approx \frac{A}{r_1^2 a^2(t_0)} \quad (2.47)$$

Luego, la fracción de luz que llega al espejo con respecto a toda la que se emitió será $f = \frac{\Delta\Omega}{4\pi}$ que corresponde a:

$$f = \frac{A}{4\pi r_1^2 a^2(t_0)} \quad (2.48)$$

La potencia (energía /tiempo) recibida en el espejo debe ser corregida con respecto a la tasa Δt con que se emitieron y son recibidos, además de su corrimiento al rojo $\Delta\nu$. Para esto basta estudiar la potencia.

La potencia con que se recibe el fotón será la energía recibida del fotón por unidad de tiempo y por la fracción f de la ecuación 2.48:

¹⁵Una deducción mucho más formal se puede encontrar en [12]

$$P = \frac{h\nu_0}{\Delta t_0} f \quad (2.49)$$

Pero la fuente emitió $L = \frac{h\nu_1}{\Delta t_1}$, donde $h\nu_1$ es la energía correspondiente al fotón emitido.

Reemplazando 2.48 en 2.49 queda:

$$P = \frac{h\nu_0}{\Delta t_0} \frac{A}{4\pi r_1^2 a^2(t_0)} \quad (2.50)$$

Pero se sabe que las frecuencias y los tiempos están relacionados por la ecuación 2.4 y 2.50 queda escrito como:

$$P = \frac{ha(t_1)/a(t_0)\nu_1}{a(t_0)/a(t_1)\Delta t_1} \frac{A}{4\pi r_1^2 a^2(t_0)} \quad (2.51)$$

$$P = \frac{h\nu_1}{\Delta t_1} \frac{A}{4\pi r_1^2 a^4(t_0)/a^2(t_1)} \quad (2.52)$$

Luego, como el flujo es P/A se tiene que:

$$F = \frac{L}{4\pi r_1^2 a^4(t_0)/a^2(t_1)} \quad (2.53)$$

y como esta ecuación debe ser del tipo 2.42:

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2}$$

Por comparación se obtiene la distancia luminosa d_L :

$$d_L = \frac{a^2(t_0)}{a(t_1)} r_1 \quad (2.54)$$

y usando 2.3

$$d_L = c \frac{a^2(t_0)}{a(t_1)} \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.55)$$

Notar que 2.57 es compatible con 2.55 ya que

$$d_L = a(t_0)r_1(1+z) = a(t_0)r_1 \frac{a(t_0)}{a(t_1)}$$

Interpretación física

1. A tiempo t_0 la luz ha llegado a la Tierra, y la área propia de un esfera dibujada alrededor de la fuente luminosa que está a una distancia comóvil r_1 , tendrá por distancia propia $a(t_0)r_1$. La fracción de luz recibida por el telescopio de área A será entonces $A/4\pi r_1^2 a(t_0)^2$, y por lo tanto en la fórmula (2.41) se tendrá que reemplazar r por $r_1 a(t_0)$.
2. La razón (tasa de llegada: cuanta energía llega por unidad de tiempo) se ve disminuida porque el espacio entre la fuente y el observador ha estado en expansión, luego la tasa de llegada disminuye en comparación a cuando fueron emitidos. Debido a que la expansión (o contracción) del universo es de tipo radial (por isotropía), entonces la corrección debe estar relacionada con:

$$\frac{a(t_1)}{a(t_0)} = \frac{1}{1+z}$$

Es decir, a mayor expansión, menor tasa de llegada se tiene en el tiempo del observador actual t_0 .

3. La energía del fotón está dada por $h\nu$. Cuando el fotón fue emitido tenía una energía dada por ν_1 , pero al llegar al observador este lo detecta con $h\nu_0$. Luego la energía disminuye, por ende la potencia, y por la ecuación 2.4 se tiene que la energía va a haber disminuido en un factor de

$$\frac{1}{1+z}$$

Juntando estas 3 razones, se obtiene que,

$$F = \frac{L}{4\pi r_1^2 a^2(t_0)(1+z)^2} \tag{2.56}$$

Por lo que la distancia luminosa, comparando con la ecuación 2.42, se tiene que

$$d_L = a(t_0)r_1(1+z) \tag{2.57}$$

2.13. Distancia angular

2.13.1. Definición

La distancia angular se define como la distancia d_A tal que ¹⁶:

$$\theta = \frac{s}{d_A} \tag{2.58}$$

Donde s es el tamaño (en unidades de distancia) del objeto, y θ el ángulo que subtiende el objeto al estar a una distancia d_A del observador.

Notar que esto viene de que $\sin(\theta) \approx \theta$ para ángulos pequeños y por lo tanto será igual al cateto (tamaño del objeto) dividido por la hipotenusa (distancia al objeto). Por esta relación angular es que se le llama "distancia angular".

¹⁶Para más información se puede revisar [12]

2.13.2. Deducción

Si se considera que el objeto está a una distancia r_1 (todos sus puntos lo están $dr = 0$), al igual que en el razonamiento anterior con el ángulo (deducción formal de distancia luminosa), el ángulo medido será θ por lo que $d\phi = 0$ y tomando solo la parte espacial que es la que importa se obtiene ¹⁷:

$$dD = a(t)rd\theta$$

Donde dD será la distancia del objeto desde extremo a extremo, es decir, el tamaño (en unidades de distancia) que tiene el objeto que se encuentra "perpendicular" a la línea de visión del observador), $d\theta$ el ángulo que subtiende bajo la mirada del observador y $r = r_1$ será la distancia al objeto. Entonces queda

$$s = a(t_1)r_1\theta$$

Despejando θ se obtiene que $\theta = \frac{s}{a(t)r_1}$, y usando la definición de distancia angular 2.58,

$$\theta = \frac{s}{d_A} = \frac{s}{a(t_1)r_1}$$

Queda:

$$d_A = a(t_1)r_1 \quad (2.59)$$

2.14. Comparación d_L y d_A

Comparando 2.54 con 2.59 se obtiene que [12]:

$$\frac{d_A}{d_L} = \frac{1}{(1+z_1)^2} \quad (2.60)$$

Este resultado es una importante predicción (consecuencia) de relatividad general que relaciona d_A y d_L mediante una simple expresión que solo involucra al redshift.

2.15. Módulo de distancia en astronomía

Recordando la definición de la magnitud absoluta M : magnitud aparente del objeto si estuviese a 10 pársec de distancia del observador. Además de definir que: "hay una diferencia de 5 magnitudes para una diferencia de 100 veces más brillante" se obtiene ¹⁸

$$\frac{F_2}{F_1} = 100^{(m_1 - m_2)/5}$$

Usando esta fórmula para relacionar un magnitud relativa con una magnitud absoluta:

¹⁷Deducción más general en [12].

¹⁸Para más información ver [13]

$$\frac{F_M}{F} = 100^{(m-M)/5}$$

Donde F_M es el flujo asociado a la magnitud absoluta. Tomando el logaritmo en ambos lados, usando la definición de flujo $F = \frac{L}{4\pi r^2}$ y recordando que la magnitud absoluta está definida a los $10pc$, se encuentra que:

$$\mu = m - M = 5 \log_{10}(d) - 5$$

Con la distancia medida en pc, donde a $\mu = m - M$ se le llama módulo de distancia.

Dado que esta distancia se dedujo en astronomía (históricamente) usando la definición de luminosidad y su dependencia inversa con r^2 (es decir, usando una métrica plana), esta se puede generalizar usando la distancia luminosa, quedando:

$$\mu = m - M = 5 \log_{10}(d_L) - 5 \tag{2.61}$$

Donde d_L debe estar en pársec.

Ya que observacionalmente es práctico medir magnitudes (y obtener μ , y la d_L se puede determinar fácilmente ya que el redshift z es un observable (haciendo uso de la relación de distancia luminosa y composición del universo), entonces se puede hacer un ajuste de acuerdo a datos observacionales para determinar los Ω_i , es decir, la composición del universo. Los datos observacionales pueden ser proporcionados por la observación de supernovas.

2.16. Referencias

- [1] Hannu Karttunen, Pekka Kröger, Heikki Oja, Markku Poutanen, Karl Johan Donner, *Fundamental Astronomy*, Springer, 2007, página 394.
- [2] Mirjana Dalarsson, Nils Dalarsson, *Tensors, Relativity, and Cosmology*, Academic Press, Segunda edición, 2015, Capítulo 23.
- [3] Tests of Big Bang: The CMB. [Internet] Disponible en: http://map.gsfc.nasa.gov/universe/bb_tests_cmb.html [Visitado el 2 de Junio del 2016].
- [4] Abhay Ashtekar, Vesselin Petkovk, *Handbook of Spacetime*, Springer, 2014, Capítulo 32, sección 3.
- [5] Abhay Ashtekar, Vesselin Petkovk, *Handbook of Spacetime*, Springer, 2014, página 698.
- [6] Valerio Faraoni, Salvatore Capozziello, *Beyond Einstein Gravity, A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*, Springer, Volumen 170 de "Fundamental Theories of Physics", Capítulo 7, sección 2.
- [7] Mirjana Dalarsson, Nils Dalarsson, *Tensors, Relativity, and Cosmology*, Academic Press, Segunda edición, 2015, Capítulo 24.
- [8] David McMahon, *Relativity Demystified*, McGraw, 2006, Capítulo 12.
- [9] Steven Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, 2008, página 43.
- [10] Steven Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, 2008, página 41.
- [11] James Rich, *Fundamentals of Cosmology*, Springer, 2010, Capítulo 5.

- [12] Steven Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, 2008, Capítulo 14, sección 3.
- [13] Hannu Karttunen, Pekka Kröger, Heikki Oja, Markku Poutanen, Karl Johan Donner, *Fundamental Astronomy*, Springer, 2007, página 88.

Capítulo 3

Resumen de los fundamentos teóricos de Gravedad- $\tilde{\delta}$

Nota 1: No se pretende ahondar en los detalles sobre la deducción completa de la teoría, ya que no es la finalidad de esta investigación. Más detalles sobre esto pueden ser encontrados en las referencias de este capítulo. A continuación se presenta un esquema de los fundamentos y una guía básica sobre el camino por el cuál se llegó a la fórmulas útiles para la evaluación observacional de la teoría (finalidad de esta Práctica de Licenciatura).

Nota 2: Las ecuaciones presentadas en este capítulo son todas obtenidas de la única referencia que hay en este capítulo [1]

3.1. Introducción

Gravedad- $\tilde{\delta}$ nace como una teoría para la gravedad muy similar a relatividad general (*General Relativity, GR*), pero que funciona bien a nivel cuántico. En su construcción se consideran dos puntos. El primero es que GR es finita a un loop en el vacío, por lo que no se necesita renormalización. El segundo punto son las $\tilde{\delta}$ -Gauge Theories (DGT) donde las propiedades son: a) se introduce un nuevo tipo de campo $\tilde{\phi}_I$, diferente del original ϕ_I . b) Las ecuaciones de movimiento clásicas se satisfacen incluso a nivel cuántico. c) El modelo vive a un loop. d) La acción es obtenida mediante la extensión de la simetría original del gauge del modelo; por tanto se introduce una simetría extra, a la que se llama $\tilde{\delta}$ -simetría (ya que es obtenida como la variación de la simetría original). Aplicando esta idea a GR se obtiene $\tilde{\delta}$ -Gravity.[1]

3.1.1. Teorías- $\tilde{\delta}$ ($\tilde{\delta}$ -Theories)

Estas teorías consisten en la aplicación de variaciones representadas por $\tilde{\delta}$. Como es una variación, tiene propiedades típicas de estas como:

$$\tilde{\delta}(AB) = \tilde{\delta}(A)B + A\tilde{\delta}(B)$$

$$\tilde{\delta}\delta A = \delta\tilde{\delta}A$$

$$\tilde{\delta}(\phi_{,\mu}) = (\tilde{\delta}\Phi)_{,\mu}$$

Donde δ es otra variación. Algo particular de este tipo de variación es que cuando se aplica sobre un campo (función, tensor, etc...) dará nuevos elementos que se definen como *campos- $\tilde{\delta}$* (*$\tilde{\delta}$ -fields*), los cuales constituyen un objeto completamente independiente del original: $\tilde{\Phi} = \tilde{\delta}(\Phi)$.

Además se usa la convención de que un tensor tilde $\tilde{S}_{\mu\nu\alpha}$ es la transformación hecha por $\tilde{\delta}$ sobre el tensor convariante, es decir

$$\tilde{S}_{\mu\nu\alpha} \equiv \tilde{\delta}S_{\mu\nu\alpha}$$

Luego,

$$\tilde{\delta}(S_{\nu\alpha}^{\mu}) = \tilde{\delta}(g^{\mu\rho}S_{\rho\nu\alpha})$$

Y aplicando las propiedades de una variación $\tilde{\delta}$ queda

$$\tilde{\delta}(S_{\nu\alpha}^{\mu}) = \tilde{\delta}(g^{\mu\rho})S_{\rho\nu\alpha} + g^{\mu\rho}\tilde{\delta}(S_{\rho\nu\alpha})$$

$$\tilde{\delta}(S_{\nu\alpha}^{\mu}) = -\tilde{g}^{\mu\rho}S_{\rho\nu\alpha} + \tilde{S}_{\rho\nu\alpha}$$

Donde se usó que $\tilde{\delta}(g^{\mu\rho}) = -g^{\alpha\mu}g^{\beta\rho}\tilde{\delta}(g_{\alpha\beta})$.

3.1.2. Transformaciones- $\tilde{\delta}$ ($\tilde{\delta}$ -transformations)

Se representa la transformación del campo Φ_i como:

$$\bar{\delta}\Phi_i = \Lambda_i^j(\Phi)\epsilon_j$$

donde ϵ_j es el parámetro de transformación. Entonces $\tilde{\Phi}_i = \tilde{\delta}\Phi_i$ transforma:

$$\bar{\delta}\tilde{\Phi}_i = \tilde{\Lambda}_i^j(\Phi)\epsilon_j + \Lambda_i^j(\Phi)\tilde{\epsilon}_j$$

donde se usó que $\tilde{\delta}\bar{\delta}\Phi_i = \bar{\delta}\tilde{\delta}\Phi_i = \bar{\delta}\tilde{\Phi}_i$ y donde $\tilde{\epsilon}_j = \tilde{\delta}\epsilon_j$ es el parámetro de la nueva transformación. Ahora considerando las siguientes transformaciones infinitesimales:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - \xi_0^{\mu}(x) \rightarrow \bar{\delta}x^{\mu} = -\xi_0^{\mu}(x)$$

Donde $\bar{\delta}$ corresponde a la transformación general de coordenadas. Esto queda definido por:

$$\xi_1^{\mu}(x) \equiv \tilde{\delta}\xi_0^{\mu}(x)$$

Luego, la transformaciones para diferentes casos son:

1. Para un escalar ϕ :

$$\bar{\delta}\phi = \xi_0^\mu \phi_\mu$$

$$\bar{\delta}\tilde{\phi} = \xi_1^\mu \phi_\mu + \xi_0^\mu \tilde{\phi}_\mu$$

2. Para un vector V_μ :

$$\bar{\delta}V_\mu = \xi_0^\beta V_{\mu,\beta} + \xi_{0,\mu}^\alpha V_\alpha$$

$$\bar{\delta}\tilde{V}_\mu = \xi_1^\beta V_{\mu,\beta} + \xi_{1,\mu}^\alpha V_\alpha + \xi_0^\beta \tilde{V}_{\mu,\beta} + \xi_{0,\mu}^\alpha \tilde{V}_\alpha$$

3. Tensor covariante de rango 2 $M_{\mu\nu}$:

$$\bar{\delta}M_{\mu\nu} = \xi_0^\rho M_{\mu\nu,\rho} + \xi_{0,\nu}^\beta M_{\mu\beta} + \xi_{0,\mu}^\beta M_{\nu\beta}$$

$$\bar{\delta}\tilde{M}_{\mu\nu} = \xi_1^\rho M_{\mu\nu,\rho} + \xi_{1,\nu}^\beta M_{\mu\beta} + \xi_{1,\mu}^\beta M_{\nu\beta} + \xi_0^\rho \tilde{M}_{\mu\nu,\rho} + \xi_{0,\nu}^\beta \tilde{M}_{\mu\beta} + \xi_{0,\mu}^\beta \tilde{M}_{\nu\beta}$$

Estas transformaciones son la base de las teorías- $\tilde{\delta}$.

Este modelo presenta dos campos. El primero es el campo gravitacional $g_{\mu,\nu}$, y el segundo es su variación, es decir, $\tilde{g}_{\mu,\nu}$.

Habrán dos transformaciones de gauge asociadas a la transformación general de coordenadas. Estas estarán dadas por:

$$\bar{\delta}g_{\mu\nu} = \xi_{0\mu;\nu} + \xi_{0\nu;\mu}$$

$$\bar{\delta}\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \xi_{1\mu;\nu} + \xi_{1\nu;\mu} + \tilde{g}_{\mu\rho}\xi_{0,\nu}^\rho + \tilde{g}_{\nu\rho}\xi_{0,\mu}^\rho + \tilde{g}_{\mu\nu,\rho}\xi_0^\rho$$

3.1.3. Acción modificada

Para construir la acción basta con buscar un invariante. Tomando en consideración un acción original $S_0[\phi_I]$ donde ϕ_I son campos genéricos, entonces se agrega un término que es proporcional a una variación $\tilde{\delta}$ con respecto a los campos. Usando la notación $\tilde{\delta}\phi_J = \tilde{\phi}_J$ se tiene que:

$$S[\phi, \tilde{\phi}] = S_0[\phi] + \kappa_2 \int d^4x \frac{\delta S_0}{\delta \phi_J(x)}[\phi] \tilde{\phi}_J(x) \quad (3.1)$$

Donde κ_2 es una constante arbitraria y los índices J pueden representar cualquier tipo de índices. Esta acción da la estructura básica de cualquier tipo de teoría- $\tilde{\delta}$.

Una importante propiedad de esta acción es que se preservan las ecuaciones clásicas. Esto se puede observar cuando se hace la siguiente variación $\tilde{\phi}_I$:

$$\frac{\delta S_0}{\delta \phi_I(x)}[\phi] = 0$$

Obviamente, hay nuevas ecuaciones cuando se varía con respecto a ϕ_I . Estas ecuaciones determinan $\tilde{\phi}_I$ y estas pueden ser reducidas a:¹

$$\int d^4x \frac{\delta^2 S_0}{\delta \phi_I(y) \delta \phi_J(x)} [\phi] \tilde{\phi}_J(x) = 0$$

3.2. Lagrangiano en Gravedad- $\tilde{\delta}$

Usando la expresión de la (3.1) $\tilde{\delta}$ para teorías- $\tilde{\delta}$ y las igualdades encontradas en las subsecciones 3.1.1 y 3.1.2 sobre la acción de Einstein-Hilbert S_0 ²:

$$S_0 = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa} + L_M \right) \quad (3.2)$$

donde $L_M = L_M(\phi_I, \partial_\mu)$ es el lagrangiano del campo de materia ϕ_I . Usando la ecuación de la acción en teorías- $\tilde{\delta}$ (3.1) y sustituyendo en ella la acción de Einstein-Hilbert (3.2) queda:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa} + L_M - \frac{\kappa_2}{2\kappa} (G^{\alpha\beta} - \kappa T^{\alpha\beta}) \tilde{g}_{\alpha\beta} + \kappa_2 \tilde{L}_M \right) \quad (3.3)$$

donde

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$$

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \tilde{\delta} g_{\mu\nu}$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} [\sqrt{-g} L_M]$$

$$\tilde{L}_M = \tilde{\phi}_I \frac{\delta L_M}{\delta \phi_I} + (\partial_\mu \tilde{\phi}_I) \frac{\delta L_M}{\delta(\partial_\mu \phi_I)}$$

y donde ϕ_I y $\tilde{\phi}_I = \tilde{\delta} \phi_I$ son los campos de materia y campos de materia- $\tilde{\delta}$ respectivamente.

3.3. Ecuaciones de movimiento

A partir de esta acción se pueden obtener las ecuaciones de movimiento de $g_{\mu\nu}$ and $\tilde{g}_{\mu\nu}$, estas son³:

¹También existe otra propiedad importante a nivel cuántico. Esta corresponde a que las teorías- $\tilde{\delta}$ viven a orden de un *loop*, así que correcciones a orden mayor no existen.

²La acción de Einstein-Hilbert corresponde a la acción que proporciona las ecuaciones campo de Einstein para la teoría de la relatividad general mediante el principio de mínima acción.

³Ecuaciones correspondientes a (30), (31), (33) y (34) de [1]

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \quad (3.4)$$

$$F^{(\mu\nu)(\alpha\beta)\rho\lambda} D_\rho D_\lambda \tilde{g}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R^{\alpha\beta} \tilde{g}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} R = \kappa \tilde{T}^{\mu\nu} \quad (3.5)$$

$$D_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (3.6)$$

$$D_\nu \tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} T^{\alpha\beta} D^\mu \tilde{g}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T^{\mu\beta} D_\beta \tilde{g}_\alpha^\alpha + D_\beta (\tilde{g}_\alpha^\beta T^{\alpha\mu}) \quad (3.7)$$

Donde ⁴:

$$F^{(\mu\nu)(\alpha\beta)\rho\lambda} = P^{((\rho\mu)(\alpha\beta))} g^{\nu\lambda} + P^{((\rho\nu)(\alpha\beta))} g^{\mu\lambda} - P^{((\mu\nu)(\alpha\beta))} g^{\rho\lambda} - P^{(\rho\lambda)(\alpha\beta)} g^{\mu\nu}$$

$$P^{((\alpha\beta)(\mu\nu))} = \frac{1}{4} (g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu})$$

y donde D_ν representa la derivada covariante con respecto a ν .

3.4. Fluido perfecto

Para describir un universo, es necesario poder ingresar la energía y/o materia que lo compone. Para esto es necesario escribir el tensor energía-momento para esta teoría. Para esto se recurre a una definición general de fluido perfecto (que se ajusta muy bien al modelo de fluido cosmológico, usando como "partículas" a las galaxias o estructuras mayores), el cual puede ser obtenido de una definición de la acción para fluido perfecto en GR ⁵:

$$S_0 = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa} - \mathbf{r}(1 + \epsilon(\mathbf{r})) - \lambda_1(u^a u_a + 1) - \lambda_2 D_\alpha(\mathbf{r} U^\alpha) \right) \quad (3.8)$$

donde \mathbf{r} es el número de partículas por unidad de volumen en el sistema de referencia de las partículas, $\epsilon(\mathbf{r})$ es la densidad de energía interna por unidad de masa del fluido, u_a es la velocidad del fluido en el sistema de referencia local y λ_1 y λ_2 son los multiplicadores de Lagrange para asegurar que la normalización de u_a y la conservación de masa, respectivamente. Además $U_\alpha = e_\alpha^a u_a$ donde e_α^a es el Vierbein.

Reemplazando la acción S_0 (3.8) en la expresión general de la acción para teorías $\tilde{\delta}$ (3.3) se obtiene la expresión de la acción para un fluido perfecto en Gravedad- $\tilde{\delta}$ ⁶:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa} - \mathbf{r}(1 + \epsilon(\mathbf{r})) - \lambda_1(u^a u_a + 1) - \lambda_2 D_\alpha(\mathbf{r} U^\alpha) - \frac{\kappa_2}{2\kappa} (G^{\alpha\beta} - \kappa T^{\alpha\beta}) \tilde{g}_{\alpha\beta} + \kappa_2 \tilde{L}_M \right) \quad (3.9)$$

$$\tilde{L}_M = -\tilde{\mathbf{r}}(1 + \epsilon(\mathbf{r})) + \mathbf{r}\epsilon'(\mathbf{r}) - \tilde{\lambda}_1(u^a u_a + 1) - 2\lambda_1 u^a \tilde{u}_a - \tilde{\lambda}_2 D_\alpha(\mathbf{r} U^\alpha) - \lambda_2 D_\alpha(\tilde{\mathbf{r}} U^\alpha + \mathbf{r} U_T^\alpha) \quad (3.10)$$

donde $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\delta}\mathbf{r}$, $\epsilon'(\mathbf{r}) = \frac{\partial\epsilon}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{r})$, $\tilde{u}_a = \tilde{\delta}u_a$, $U_T^\alpha = e^{a\alpha}\tilde{u}_a$ y donde $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\delta}\lambda_1$ y $\tilde{\lambda}_2 = \tilde{\delta}\lambda_2$ son los nuevos multiplicadores de Lagrange.

⁴Ecuaciones (28) en [1]

⁵Ecuación (35) de [1]

⁶Ecuaciones (36) y (37) de [1]

De esta acción se obtienen las expresiones de el tensor energía-momento para fluido perfecto ⁷:

$$T_{\mu\nu} = p(\rho)g_{\mu\nu} + (\rho + p(\rho))U_\mu U_\nu \quad (3.11)$$

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = p(\rho)\tilde{g}_{\mu\nu} + \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho)\tilde{\rho}g_{\mu\nu} + \left(\tilde{\rho} + \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho)\tilde{\rho}\right)U_\mu U_\nu + (\rho + p(\rho))\left(\frac{1}{2}(U_\nu U^\alpha \tilde{g}_{\mu\alpha} + U_\mu U^\alpha \tilde{g}_{\nu\alpha}) + U_\mu^T U_\nu + U_\mu U_\nu^T\right) \quad (3.12)$$

3.5. Trayectoria para partículas

A continuación se resume el resultado de las trayectorias para partículas de prueba con masa y sin masa para Gravedad- $\tilde{\delta}$.

3.5.1. Partículas masivas

Para GR, la acción está dada por⁸:

$$S_0[\dot{x}, g] = -m \int dt \sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \quad (3.13)$$

Usando S_0 y sustituyéndola en (3.1) y eliminando una simetría, se obtiene la acción de una partícula masiva para Gravedad- $\tilde{\delta}$ ⁹:

$$S[\dot{x}, g, \tilde{g}] = m \int dt \left(\frac{\bar{g}_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}{\sqrt{-g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta}} \right) \quad (3.14)$$

donde $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{\kappa_2}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}$.

Obteniendo las ecuaciones de movimiento a partir de (3.14) queda:

$$\hat{g}_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu + \hat{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \frac{\kappa_2}{4}\hat{K}_{,\mu} \quad (3.15)$$

Donde:

$$\hat{\Gamma}_{\mu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{\mu\alpha,\beta} + \hat{g}_{\beta\mu,\alpha} - \hat{g}_{\alpha\beta,\mu})$$

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = \left(1 + \frac{\kappa_2}{2}\tilde{K}\right)g_{\alpha\beta} + \kappa_2\tilde{g}_{\alpha\beta}$$

$$\tilde{K} = \tilde{g}_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

⁷Ecuaciones (61) y (62) de [1]

⁸Ecuación (63) de [1]

⁹Ecuación (67) de [1]

Es importante notar que la ecuación de movimiento no es una geodésica.

3.5.2. Partículas sin masa

Desafortunadamente (3.15) no sirve para partículas sin masa ya que si $m = 0$, entonces la acción es igual a 0. Para resolver este problema se parte (comúnmente) de la acción:

$$S_0[\dot{x}, g, \nu] = \frac{1}{2} \int dt (\nu m^2 - \nu^{-1} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) \quad (3.16)$$

donde ν es un multiplicador de Lagrange.¹⁰

Luego la acción (3.16) es una buena acción que incluye el caso de partícula sin masa. Luego tomando la (3.16) y usando (3.1) se obtiene la acción para una partícula sin masa en Gravedad- $\tilde{\delta}$ ¹¹:

$$S[\dot{x}, g, \tilde{g}, \nu, \tilde{\nu}] = \frac{1}{2} \int dt [\nu m^2 - \nu^{-1} (g_{\mu\nu} + \kappa_2 \tilde{g}_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \kappa_2 \tilde{\nu} (m^2 + \nu^{-2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)] \quad (3.17)$$

Eliminando una dependencia entre variables (multiplicador de Lagrange nuevo y el antiguo), haciendo $m = 0$ y haciendo un *gauge*, finalmente se obtienen las ecuaciones de movimiento para una partícula sin masa en Gravedad- $\tilde{\delta}$:

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (3.18)$$

Donde $\mathbf{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \kappa_2 \tilde{g}_{\mu\nu}$.

En el caso estándar de *GR* las ecuaciones de movimiento implican una partícula moviéndose en una geodésica nula expresado por $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$, pero en este modelo la geodésica nula queda expresada por $\mathbf{g}_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$.

En resumen, las partículas se mueven acopladas a ambas métricas $g_{\mu\nu}$ y $\tilde{g}_{\mu\nu}$, dadas por las ecuaciones (3.15) y (3.18).

3.6. Métrica para describir al universo

La métrica usual para el universo es la métrica de FLRW (2.1):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right)$$

En Gravedad- $\tilde{\delta}$ la descripción se hace para un universo plano, luego solo interesa el caso con $k = 0$, entonces para la métrica estándar se tiene que:

¹⁰Esto es razonable ya que si

$$\nu = - \frac{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}}{m}$$

y se sustituye en (3.16), se recupera la acción para una partícula masiva (3.13)

¹¹Ecuación (71) de [1]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + R(t)^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.19)$$

Donde al factor de escala $a(t)$ se le llamará (arbitrariamente) $R(t)$.

La finalidad es construir una métrica para el Universo. Para esto es necesario que esta explique la trayectoria de los fotones, ya que estos son los que (observacionalmente) nos informan del movimiento relativo de las galaxias con respecto a nosotros, indicando que el espacio se está expandiendo (o haciendo algun otro "movimiento"). Como en el esquema estándar de cosmología las galaxias u objetos masivos están fijos en las coordenadas del espacio, y es el espacio el que se expande, sin que las galaxias se muevan por este, entonces Gravedad- $\tilde{\delta}$ solo se debe preocupar por el efecto en la luz (ya que esta es la única partícula que no estará arraigada al espacio en este esquema). Es por esto que la métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ que importa en cosmología es la que describe trayectorias para partículas sin masa. Esta métrica es la de la ecuación (3.18). Para poder explicar el escalamiento del espacio, es necesario que la parte espacial de esta esté escalada por algun valor (una función), que a priori no se puede saber cual es; esto mismo sucede con la parte temporal de la métrica. Sin embargo, por simetría, es claro que estas funciones de escalamiento pueden ser diferentes y solamente deben depender temporalmente, ya que en otro caso, la simetría y homogeneidad se perderían (propiedades que se desean mantener en cosmología).

En base a lo explicado, se procede a encontrar la métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ a partir de la métrica $g_{\mu\nu}$.

Primero se realiza un cambio de variable de t a u , donde $T(u) = \frac{dt}{du}(u)$. Con esto queda:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -T^2(u) c^2 du^2 + R^2(u) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Y agregando las dependencias de una nueva función para la parte temporal y otra para la espacial, y así tener el caso más general de una métrica posible sin perder homogeneidad e isotropía:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -F_b(u) T^2(u) c^2 du^2 + F_a(u) R^2(u) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Al haber hecho esta introducción genérica de funciones, es importante eliminar grados de libertad sobrantes. Fijando un *gauge* armónico se obtiene:

$$T(u) = T_0 R^3(u)$$

$$F_b(u) = 3(F_a(u) + T_1)$$

donde T_0 y T_1 son constantes de *gauge*. Usando $T_0 = 1$ y $T_1 = 0$ el *gauge* se fija completamente.

Así, el sistema (u, x, y, z) corresponde a un sistema de coordenadas armónico.

Finalmente, se puede volver al sistema usual de coordenadas donde $g_{\mu\nu}$ and $\tilde{g}_{\mu\nu}$ están fijados. Luego, la métrica $\mathbf{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \kappa_2 \tilde{g}_{\mu\nu}$ (Subsección 3.5.2) queda fijada para el caso cosmológico:

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \kappa_2 \tilde{g}_{\mu\nu} = -(1 + 3\kappa_2 F_a(t)) c^2 dt^2 + R^2(t) (1 + \kappa_2 F_a(t)) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.20)$$

3.7. Ecuaciones "de Friedmann" para $g_{\mu\nu}$

Utilizando la métrica $g_{\mu\nu}$ expresada en la ecuación (3.19) (que corresponde a la métrica de la "cosmología estándar"), utilizando las ecuaciones (3.4) y (3.6), y usando $U_\mu = (c, 0, 0, 0)$ se obtiene¹²:

$$\left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\right) = \frac{kc^2}{3} \sum_i \rho_i(t) \quad (3.21)$$

$$\dot{\rho}_i(t) = -\frac{3\dot{R}(t)}{R(t)}(\rho_i(t) + p_i(t)) \quad (3.22)$$

Usando una ecuación de estado, es posible relacionar ρ y p para cada componente i . Asumiendo que solo existe materia (bariónica, *cold dark matter*) y radiación (fotones y partículas sin masa), y usando la ecuación genérica (2.12) con las correspondientes igualdades para materia y radiación de cosmología estándar, se encuentra que¹³:

$$\rho(Y) = \rho_M(Y) + \rho_R(Y) \quad (3.23)$$

$$p(Y) = \frac{1}{3}\rho_R(Y) \quad (3.24)$$

$$t(Y) = \frac{2\sqrt{C}}{3H_0\sqrt{\Omega_R}} \left(\sqrt{Y+C}(Y-2C) + 2C^{3/2} \right) \quad (3.25)$$

$$Y = \frac{R(t)}{R_0} \quad (3.26)$$

Es importante notar que t es el tiempo, R_0 es el factor de escala en el tiempo actual, $C = \frac{\Omega_R}{\Omega_M}$, donde Ω_R y Ω_M corresponden a las densidades de radiación y a la materia no relativista normalizadas por la densidad crítica (tal como se define en cosmología estándar).

3.8. Ecuaciones "de Friedmann" para $\tilde{g}_{\mu\nu}$

Usando las ecuaciones (3.5) y (3.7), donde $\tilde{T}_{\mu\nu}$ es un nuevo tensor de energía momento, se definen dos nuevas densidades de energía dadas por $\tilde{\rho}_M$ y $\tilde{\rho}_R$, y en conjunto con las ecuaciones (3.23)-(3.26) se obtienen las siguientes ecuaciones¹⁴:

$$F_a(Y) = -\frac{3}{2}C_1 \frac{Y}{C} \left(\sqrt{\left(\frac{Y}{C} + 1\right)} \ln \left(\frac{\sqrt{\frac{Y}{C} + 1} + 1}{\sqrt{\frac{Y}{C} + 1} - 1} \right) - 2 \right) + C_3 \frac{Y}{C} \sqrt{\frac{Y}{C} + 1} \quad (3.27)$$

$$\tilde{\rho}_M(Y) = \frac{9H_0^2\Omega_R C_1 - F_a(Y)}{2\kappa c^2 C Y^3} \quad (3.28)$$

$$\tilde{\rho}_R(Y) = -\frac{6H_0^2\Omega_R F_a(Y)}{2\kappa c^2 C Y^3} \quad (3.29)$$

Donde C_1 y C_3 son constantes de integración.

¹²Ecuaciones (175) y (176) de [1]

¹³Ecuaciones (177)-(180) de [1]

¹⁴Ecuaciones (182)-(184) de [1]

3.9. Relaciones para el factor de escala efectivo \tilde{R}

Como la métrica que describe el universo está dada por (3.20):

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = -\left(1 + 3\kappa_2 \tilde{T}_d(t)\right) c^2 dt^2 + R^2(t) \left(1 + \kappa_2 \tilde{T}_d(t)\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

A partir de esta métrica, se puede estudiar la trayectoria de un fotón, el cual sigue una geodésica nula, además de seguir un sentido radial, por lo que se obtiene:

$$-(1 + 3\kappa_2 F_a(t)) c^2 dt^2 + R^2(t) (1 + \kappa_2 F_a(t)) dr^2 = 0$$

Desde donde es posible definir un factor de escala efectivo denominado \tilde{R} ¹⁵:

$$\tilde{R}(t) = R(t) \sqrt{\frac{1 + \kappa_2 F_a(t)}{1 + 3\kappa_2 F_a(t)}} \quad (3.30)$$

De tal manera que la trayectoria de la geodésica nula pueda quedar descrito como:

$$-c^2 dt^2 + \tilde{R}^2(t) dr^2 = 0 \quad (3.31)$$

Definiendo un factor de escala efectivo (observable)¹⁶

$$\tilde{Y}(Y, L_1, L_2, C) = Y \frac{\sqrt{1 - L_2 \frac{Y}{3} \sqrt{Y+C} + L_1 \frac{Y}{c} \left(\sqrt{\frac{Y}{c} + 1} \ln \left(\frac{\sqrt{\frac{Y}{c} + 1} + 1}{\sqrt{\frac{Y}{c} + 1} - 1} \right) - 2 \right)}}{\sqrt{1 - L_2 Y \sqrt{Y+C} + 3L_1 \frac{Y}{c} \left(\sqrt{\frac{Y}{c} + 1} \ln \left(\frac{\sqrt{\frac{Y}{c} + 1} + 1}{\sqrt{\frac{Y}{c} + 1} - 1} \right) - 2 \right)}} \quad (3.32)$$

Donde $\tilde{Y} = \frac{\tilde{R}(t)}{R(t_0)}$, $C_1 = -\frac{2L_1}{3\kappa_2}$ y $C_3 = \frac{-C^{3/2}L_2}{3\kappa_2}$ (donde L_1 y L_2 son unas nuevas constantes).

3.10. Comentarios

- Es importante notar que (3.31) es idéntica en estructura a la ecuación (2.2), por lo que las deducciones de la métrica FLRW (estándar) se seguirán cumpliendo en este modelo cosmológico, solo que el factor de escala estará descrito por \tilde{R} . En este sentido, la Ley de Hubble sigue siendo válida.
- También es importante destacar que la relación entre distancia luminosa y angular dada por la ecuación (2.60) sigue siendo válida, ya que sus deducciones se basan en una métrica (FLRW), la cual posee la misma estructura que la aquí expuesta. Esta relación predicha por GR y comprobada observacionalmente, también es predicha por Gravedad- $\tilde{\delta}$:

$$\frac{d_A}{d_L} = \frac{1}{(1 + z_1)^2}$$

¹⁵Ecuación (167) de [1]

¹⁶Ecuación (185) de [1]

- La relación entre *redshift* cosmológico y factor de escala también se conserva. Solo que el factor de escala en esta teoría está dado por \tilde{R} . Esto también es una consecuencia de la similitud en estructura de las ecuaciones(3.31) y. (2.2). Por lo tanto se tiene que ¹⁷:

$$\frac{\tilde{R}(t)}{\tilde{R}(t_0)} = \frac{1}{1+z} \quad (3.33)$$

- Como la ecuación de distancia luminosa en comoslogía estándar fue deducida a partir de (2.1) (métrica *FLRW*) en la subsección 2.12.2, se tiene que la ecuación (2.55) seguirá siendo válida para Gravedad- $\tilde{\delta}$ cambiando a por \tilde{R} . Luego se tiene que:

$$d_L = c \frac{\tilde{R}^2(t_0)}{\tilde{R}(t_1)} \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{\tilde{R}(t)} \quad (3.34)$$

- Otra observación importante es que, al estar todo definido con respecto a \tilde{R} , el parámetro de Hubble H , será en este caso función de \tilde{R} . Para evitar confusiones, se denominará al parámetro de Hubble efectivo (observable) como \tilde{H} . Lo mismo sucede con el parámetro de desaceleración, el cuál será función de \tilde{R} .
- Es importante notar que las estructuras de las ecuaciones en esta teoría, están (en general) parametrizadas en función de Y , donde $Y = R(t)/R(t_0)$. Luego es importante usar el parámetro Y para facilitar la obtención de un parámetro efectivo (algo medible) a otro parámetro efectivo.
- Como $\tilde{Y}(t) = \tilde{R}(t)/R(t_0)$, entonces usando (3.33)

$$\tilde{Y}(t) = \frac{\tilde{R}(t)}{R(t_0)} = \frac{\tilde{R}(t_0)}{(1+z)R(t_0)} = \frac{\tilde{Y}(t_0)}{1+z} \quad (3.35)$$

Como las ecuaciones están parametrizadas en Y , se tendrá que los parámetros medibles actuales (evaluados en el presente) corresponden a evaluarlos en $Y = 1$.

3.11. Referencias

- [1] J. Alfaro and P. Gonzalez, *Cosmology in delta-gravity*, Class. Quantum Grav, Vol. 30, 085002, (2013), doi:10.1088/0264-9381/30/8/085002.

¹⁷Ecuación (172) de [1]

Capítulo 4

Ecuaciones para el ajuste de datos de supernovas

En este capítulo se presentarán las ecuaciones necesarias para entender como fueron obtenidos los resultados.

Cada sección contendrá la deducción o estructura de la ecuación que se usó para obtener los parámetros que se presentan en el siguiente capítulo.

4.1. Distancia luminosa

Usando la ecuación (4.1):

$$t(Y) = \frac{2\sqrt{C}}{3H_0\sqrt{\Omega_R}} (\sqrt{Y+C}(Y-2C) + 2C^{3/2})$$

se obtiene que

$$\frac{dt}{dY} = \frac{\sqrt{C}}{H_0\sqrt{\Omega_R}} \frac{Y}{\sqrt{Y+C}}$$

y como $dt = \frac{dt}{dY} dY$, reemplazando dt en la ecuación de distancia luminosa (3.34) se obtiene

$$d_L = c \frac{\tilde{R}^2(t_0)}{\tilde{R}(t_1)} \frac{\sqrt{C}}{H_0\sqrt{\Omega_R}} \int_{Y(t_1)}^{Y(t_0)} \frac{Y}{\sqrt{Y+C}} \frac{dY}{\tilde{R}(t)}$$

Y como $\frac{\tilde{R}(t)}{\tilde{R}(t_0)} = \frac{\tilde{Y}(t_0)}{1+z}$,

$$d_L = c \frac{\tilde{R}^2(t_0)}{\tilde{R}(t_1)} \frac{1}{\tilde{Y}(t_0)R(t_0)} \frac{\sqrt{C}}{H_0\sqrt{\Omega_R}} \int_{Y(t_1)}^{Y(t_0)} \frac{(1+z)Y}{\sqrt{Y+C}} dY$$

Pero $\tilde{Y}(t_0) = \frac{\tilde{R}(t_0)}{R(t_0)}$ y solo queda:

$$d_L = c \frac{\tilde{R}(t_0)}{\tilde{R}(t_1)} \frac{\sqrt{C}}{H_0 \sqrt{\Omega_R}} \int_{Y(t_1)}^{Y(t_0)} \frac{(1+z)Y}{\sqrt{Y+C}} dY$$

Y usando (3.33) se obtiene:

$$d_L = c(1+z) \frac{\sqrt{C}}{H_0 \sqrt{\Omega_R}} \int_{Y(t_1)}^{Y(t_0)} \frac{(1+z)Y}{\sqrt{Y+C}} dY$$

Agregando que $H_0 = 100h$, entonces (donde hay que incluir cambio de unidades, por la expresión de H en Mpc/km/s).

$$d_L = c(1+z) \frac{\sqrt{C}}{100 \sqrt{h^2 \Omega_R}} \int_{Y(z)}^1 \frac{(1+z)Y}{\sqrt{Y+C}} dY \tag{4.1}$$

Además el H y/o h están definidos en función de $R(t)$ y no de $\tilde{R}(t)$. Notar que la procedencia de este H se arrastra de la definición de densidad crítica del universo en cosmología estándar Ω_c , que en Gravedad- $\tilde{\delta}$ corresponde a la "primera métrica" $g_{\mu\nu}$. El tiempo t_1 corresponde al tiempo de emisión de la luz el cual tiene asociado un redshift cosmológico observable. Así d_L está en función del redshift, el que es un parámetro observable. El tiempo t_0 corresponde al presente, por lo que el redshift asociado es 0. Esto también se puede ver en la ecuación (3.35).

Integrar esta ecuación numéricamente no es trivial.

Observaciones:

- La integración corre en la variable Y . Pero el redshift es función de \tilde{Y} . Luego usando que:

$$1+z = \frac{\tilde{Y}(Y=1)}{\tilde{Y}(Y)}$$

y la ecuación (3.32) se tiene una función a integrar. Notar que habrán 3 parámetros libres: $C, L1, L2$ que serán parte del límite de integración.

- Para el límite de la integral $Y(z)$, primero se encuentra \tilde{Y} en función de z usando $1+z = \frac{\tilde{Y}(Y=1)}{\tilde{Y}(Y)}$, y luego se despeja Y numéricamente usando (3.32). Notar que habrán 3 parámetros libres: $C, L1, L2$ que serán parte del límite de integración.
- Notar que los parámetros libres: $C, L1, L2$ se encuentran tanto en el integrando como en un límite de la integral numérica.

4.2. Módulo de distancia

Usando la ecuación para relacionar magnitudes con distancia (4.2) y la (4.1) se obtiene una relación para magnitudes y redshift.

4.3. Factor de escala ("Tamaño" del universo)

El factor de escala para este modelo estará dado por el factor de escala *efectivo* \tilde{Y} , el cual es función de Y .

4.4. Parámetro de Hubble

El parámetro de Hubble (y por tanto la constante de Hubble) se define en cosmología estándar en función de la derivada temporal del factor de escala normalizado por el factor de escala. Esto se repite en este modelo, pero con \tilde{Y} . Luego H está dado por:

$$\tilde{H}(t) = \frac{\dot{\tilde{Y}}(t)}{\tilde{Y}(t_0)}$$

Donde t_0 es el tiempo actual. Esto en función de Y corresponde a

$$\tilde{H}(t) = \frac{\dot{\tilde{Y}}(t)}{\tilde{Y}(Y=1)}$$

Notar que $\tilde{Y}(Y=1)$ no necesariamente es 1 ya que dependerá de cuanto valgan los parámetros libres.

La constante de Hubble actual corresponderá a evaluar H en $Y=1$.

Para encontrar $\dot{\tilde{Y}}$:

$$\frac{d\tilde{Y}}{dt} = \frac{d\tilde{Y}}{dY} \frac{dY}{dt} = \frac{d\tilde{Y}}{dY}(Y) \left(\frac{dt}{dY}(Y) \right)^{-1}$$

Ya que todas las ecuaciones están parametrizadas en función de Y .

4.5. Parámetro de desaceleración

Este parámetro se define de la misma manera que en cosmología estándar, cambiando $a(t)$ por $\tilde{Y}(t)$.

$$\tilde{q}(t) = -\frac{\ddot{\tilde{Y}}}{\dot{\tilde{Y}}^2}$$

Donde la segunda derivada de \tilde{Y} será:

$$\ddot{\tilde{Y}} = \frac{d\dot{\tilde{Y}}}{dt} = \frac{d\dot{\tilde{Y}}}{dY} \frac{dY}{dt} = \frac{d\dot{\tilde{Y}}}{dY}(Y) \left(\frac{dt}{dY}(Y) \right)^{-1}$$

4.6. Dependencia entre redshift y tiempo cosmológico

Como todo está parametrizado en función de Y , entonces usando (4.1) para encontrar $t(Y)$ y usando (3.35) con (3.32) se obtiene $z(t)$ despejándolo numéricamente. Para graficar una dependencia entre redshift y tiempo se pueden dar rangos de Y obteniendo tablas de datos de $t(Y)$ y $z(Y)$.

4.7. Densidades de materia y radiación ordinaria: Ω_m y Ω_r

Como $\Omega_m + \Omega_r = 1$ y $C = \frac{\Omega_R}{\Omega_M}$ se tiene que:

$$\Omega_r = \frac{1}{1 + \frac{1}{C}}$$

Donde $\Omega_m = 1 - \Omega_r$.

Es decir que, determinándose C , se pueden obtener las densidades de materia ordinaria. Notar que la condición de $\Omega_T = 1$ es debido a la suposición de que no existe nada más que radiación y materia, además de exigir que el universo tenga curvatura $k = 0$.

Que esta condición se exija no implica que no haya densidades de energía de materia delta y radiación delta, ya que estas provienen de la métrica efectiva (3.20).

4.8. Determinación de materia y radiación delta

Usando (3.28) y (3.29) y evaluando en $Y = 1$ se pueden obtener las *densidades de energía delta* en la época actual.

Normalizando estas densidades por el término $3H_0^2/\kappa c^2\kappa_2$ se obtiene que¹:

$$\tilde{\Omega}_m \approx \frac{|L_2 - 4L_1|}{2} \Omega_m \tag{4.2}$$

$$\tilde{\Omega}_r \approx \frac{2|L_2 - 2L_1|}{3} \Omega_r \tag{4.3}$$

Notar que, debido a las formas en que se definen estas densidades de materia y radiación delta, estos valores pueden ser negativos o positivos. Se introduce el valor absoluto para asegurar esto. Notar que, dependiendo del valor de κ_2 (un valor que no se puede determinar mediante este análisis) las densidades de energía variarán y podría ser posible corregir intercambiar el signo entre - y +. Es importante entender estos datos como una proporción en relación a materia y radiación ordinaria.

4.9. Referencias

[1] J. Alfaro and P. Gonzalez, *Cosmology in delta-gravity*, Class. Quantum Grav, Vol. 30, 085002, (2013), doi:10.1088/0264-9381/30/8/085002.

¹Ecuaciones (195) y (196) de [1]

Capítulo 5

Ajuste de supernovas y predicción de parámetros para Gravedad- $\tilde{\delta}$

5.1. Ajuste con datos experimentales

Usando los datos de: diferencia de magnitud aparente y absoluta con los errores en magnitud y redshift de supernovas, se ajustó una curva usando 4.2 en conjunto a las ecuaciones del capítulo 4.¹

Mediante el uso del software Wolfram Mathematica 10.4 y la función `NonLinearModelFit` se encuentra la siguiente curva:

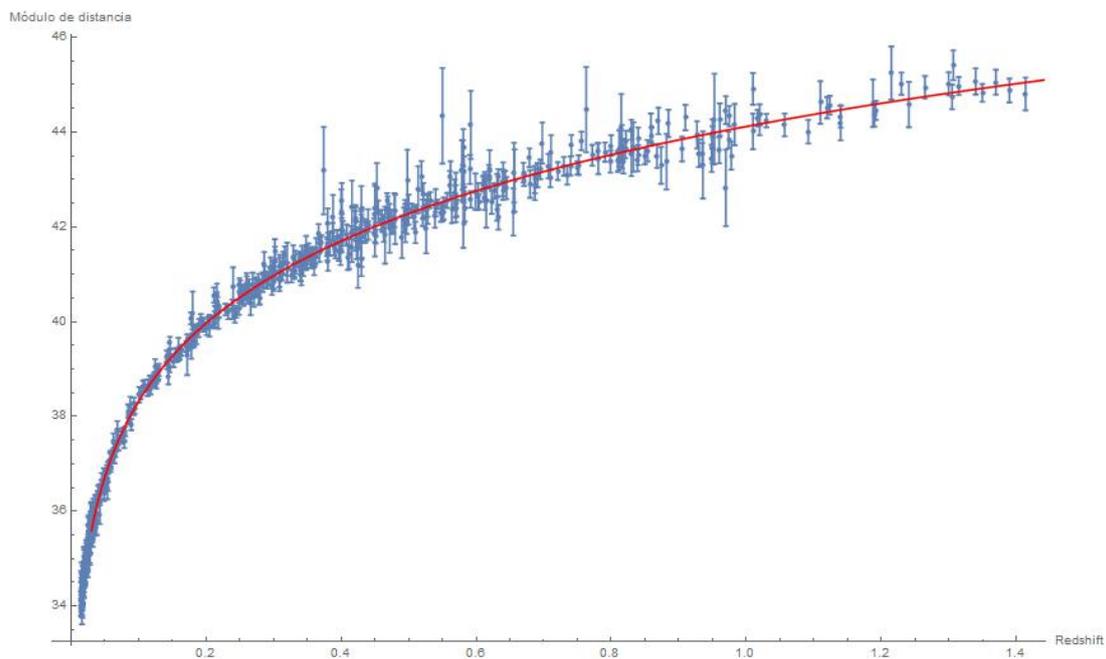


Figura 5.1: Datos y curva ajustada para Gravedad- $\tilde{\delta}$.

Del ajuste se tiene: $\chi^2 = 0,999981$ con los parámetros y errores mostrados en la figura 5.2.²

¹Son 580 datos de supernovas corresponden a los mismos usados en [1], pero mejorando el código de ajuste

²En comparación con el modelo cosmológico estándar se obtiene el mismo χ^2 , donde las curvas son iguales (a simple vista).

	Estimate	Standard Error
L1	0.497656	0.0152317
L2	0.976514	0.0150707
C	0.000182913	4.18236×10^{-6}

Figura 5.2: Parametros de la curva ajustada para Gravedad- $\tilde{\delta}$ usando SN.

Capítulo 6

Resultados para Gravedad- $\tilde{\delta}$

En este capítulo se presentan las predicciones numéricas de los parámetros cosmológicos más relevantes.

En general, la línea (roja) vertical indica el tiempo actual del universo.

Nota: En este capítulo solo se presentan los resultados. En el próximo están los análisis y observaciones sobre esto.

6.1. Edad del universo

Usando la definición de $t(Y)$ de la ecuación (3.25) se obtiene:

$$t_{universo} = 1,36889 \times 10^{10} \pm 1,56417 \times 10^8 \text{ años}$$

6.2. Factor de escala efectivo \tilde{Y}

Haciendo uso de la definición de \tilde{Y} se obtiene la figura 6.1:

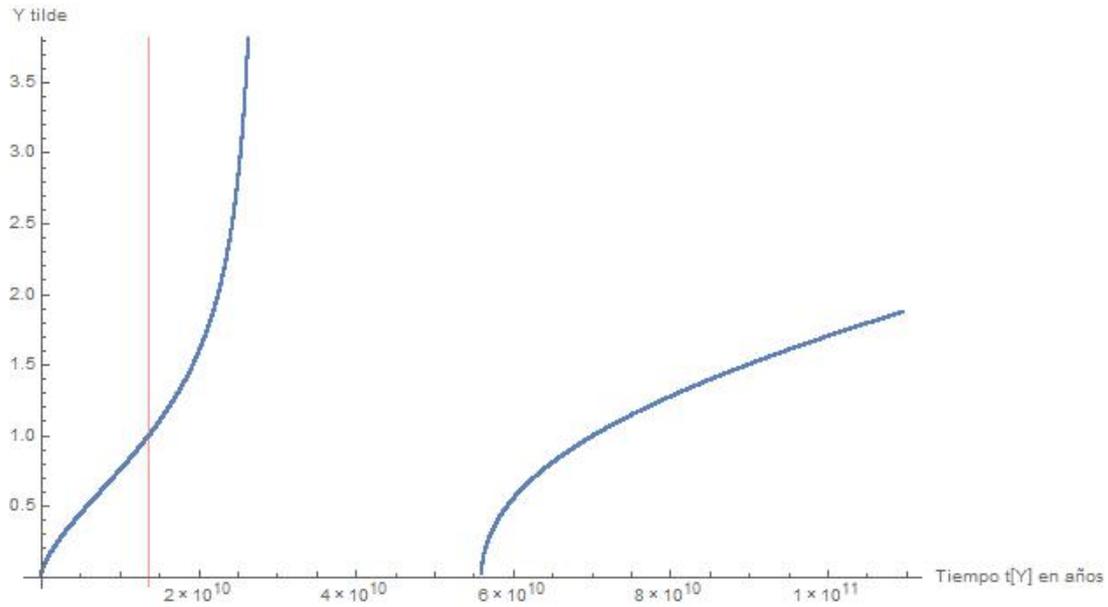


Figura 6.1: Gráfico de \tilde{Y} versus tiempo cosmológico en años.

6.3. Predicción de \tilde{H}

Haciendo el procedimiento descrito en 4.4 se obtiene el gráfico 6.2

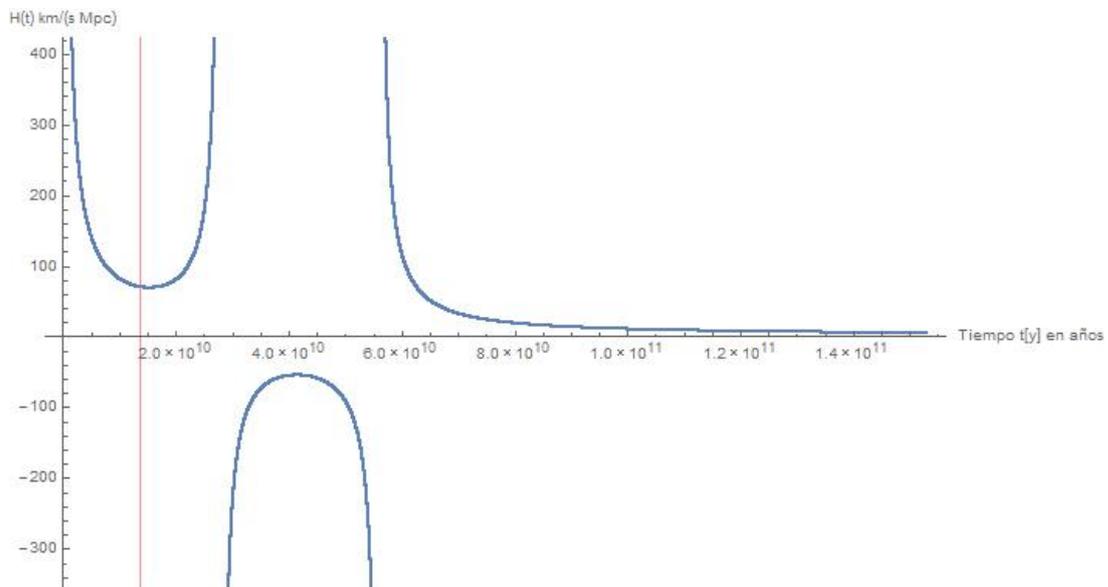


Figura 6.2: Gráfico de \tilde{H} versus tiempo cosmológico en años.

Donde la constante de Hubble (parámetro de Hubble evaluado al tiempo actual $Y = 1$) es:

$$\tilde{H} = 70,43 \pm 1,45 \text{ km}/(\text{s Mpc})$$

6.4. Determinación del parámetro de desaceleración $q(t)$

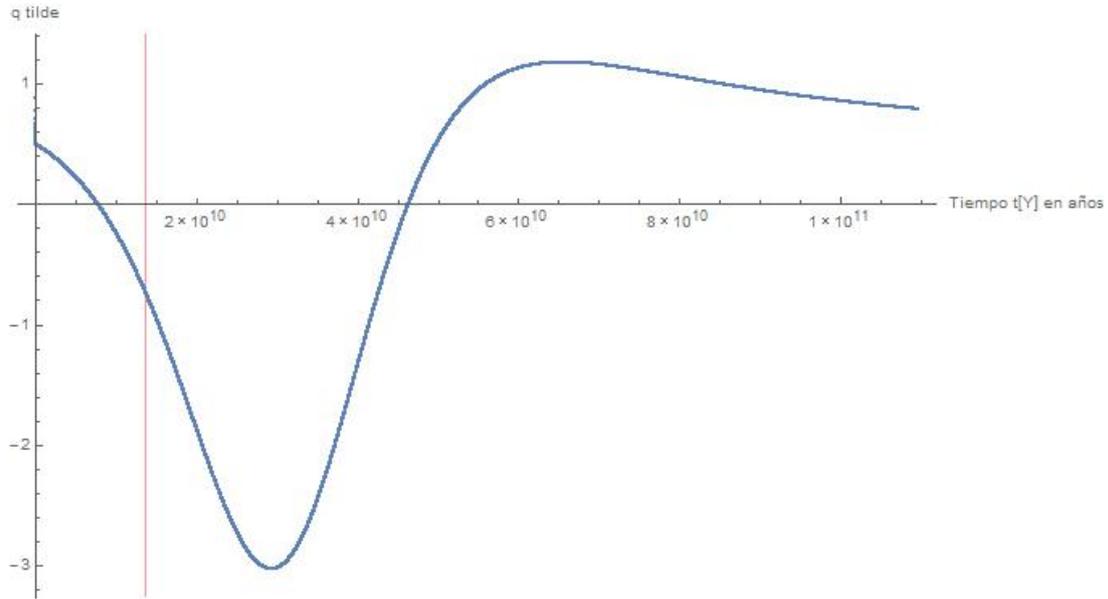


Figura 6.3: Gráfico de \tilde{q} versus tiempo cosmológico en años.

Evaluando en el presente se obtiene:

$$\tilde{q} = -0,73 \pm 0,04$$

Se puede graficar el parámetro de desaceleración y el factor de escala efectivo juntos, obteniéndose el gráfico 6.4

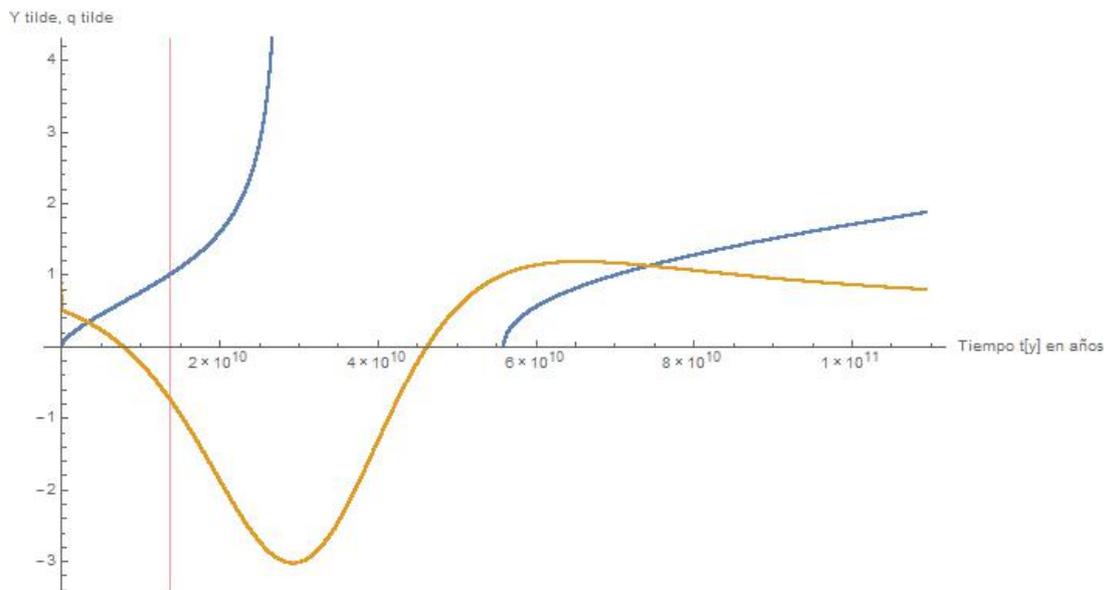


Figura 6.4: Gráfico de \tilde{q} (amarillo) y \tilde{Y} (azul) versus tiempo cosmológico en años.

6.5. Determinación del redshift de transición z_t

El redshift de transición predicho es $z_t \approx 0,7$.

6.6. Dependencia de tiempo cosmológico con redshift

Usando el método descrito en la subsección 4.6 se obtiene el gráfico 6.5

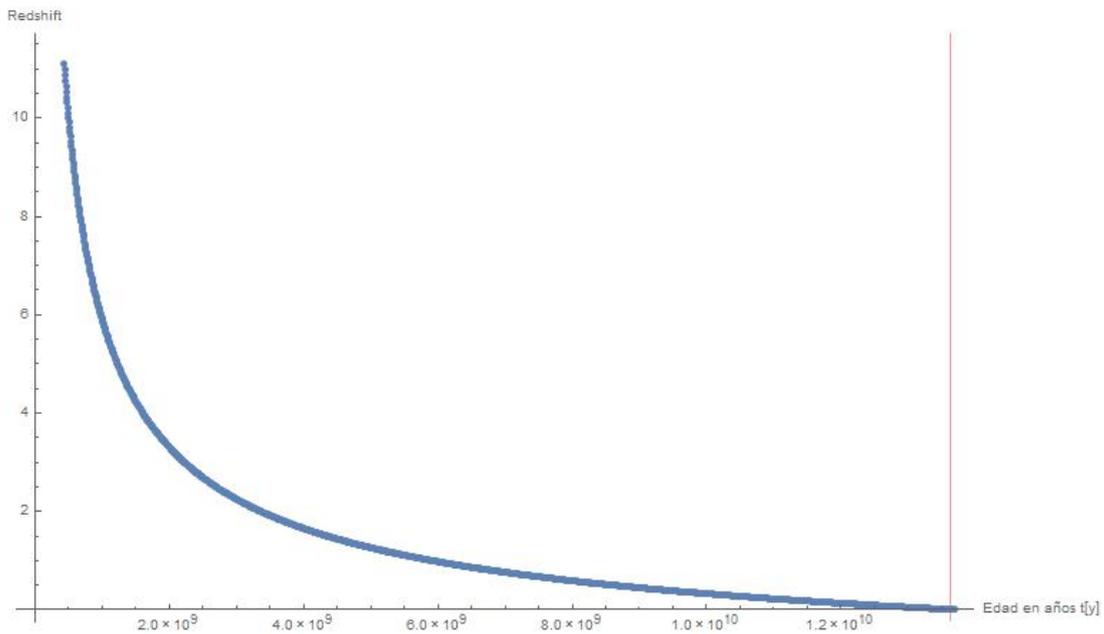


Figura 6.5: Gráfico de dependencia entre tiempo cosmológico y redshift.

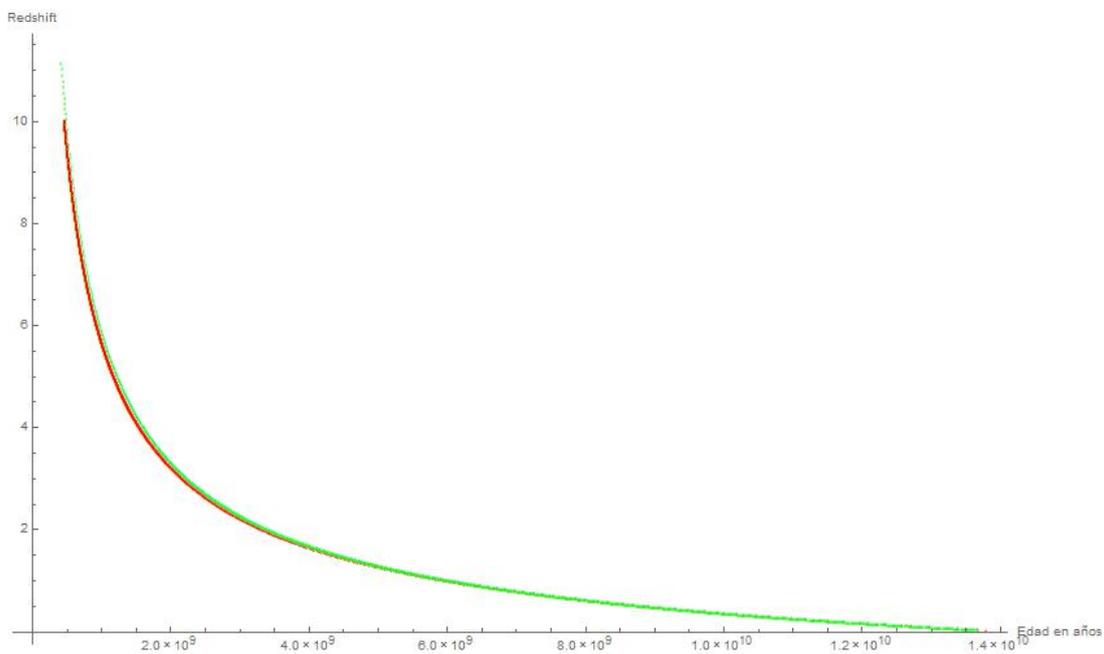


Figura 6.6: Gráfico de dependencia entre tiempo cosmológico y redshift para LCDM (rojo) y Gravedad- $\tilde{\delta}$ (verde).

6.7. Test con OHRG

Un método de validación para modelos cosmológicos corresponde al uso de observaciones de objetos de los cuales se conoce (estima) una edad mínima y de los cuales se posee un redshift. Dada las formas de las curvas de redshift versus tiempo, es claro que el poder predictivo se evalúa con objetos a alto redshift. Existen tres objetos

comúnmente usadas y medidos para este propósito. Se pueden encontrar bajo los nombres de *Olg High Redshift Galaxies* (OHRG) o *Old High Redshift Objects* (OHRO), entre otros acrónimos. A continuación se presentan estos tres objetos posicionados en el gráfico de tiempo cosmológico versus redshift.^{1 2}

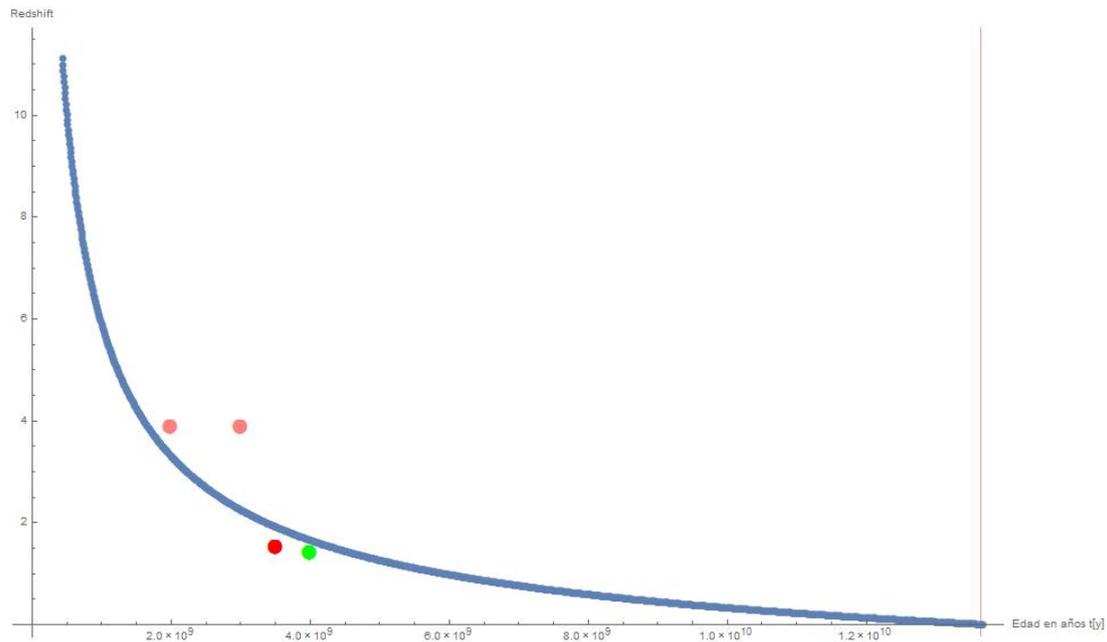


Figura 6.7: Gráfico de tiempo versus redshift para Gravedad- $\delta\tilde{\delta}$ incluyendo las 3 OHRG. Objetos: LBDS 53W091 (rojo), LBDS 53W069 (verde) y APM 08279+5255 (rosado, son dos datos de diferentes métodos de estimación).

6.8. Referencias

- [1] Yi Zhang, Hui Li, Xing Wu, Hao Wei, Rong-Gen Cai, *Age constraints on the Agegraphic Dark Energy Model*, *Astrophysical Journal*, 9 de Agosto del 2007, arXiv:0708.1214v1.
- [2] Longair, *High Energy Astrophysics*, Cambridge University Press, tercera edición, página 748.

¹Estos objetos son ampliamente encontrados en la literatura al igual que sus datos. De todas formas se pueden hallar en [1]

²Cita de [2] "Evidence that the stellar populations of large redshift radio galaxies are likely to be old was presented by Lilly for the radio galaxy 0902+34 at a redshift $z = 3.4$ and by Dunlop and his colleagues for the radio galaxy LBDS 53W091 at redshift 1.55 (Lilly, 1988; Dunlop et al., 1996). In the latter case, the age of its stellar population was at least $3,5 \times 10^9$ years so that these stars must have been formed at large redshifts. A similar result, namely an age of $4,5 \times 10^9$ years was found for the radio galaxy LBDS 53W069 at redshift $z = 1.43$ (Dey, 1997). Radio galaxies with qualitatively the same stellar properties have been observed to redshifts greater than 4 by Lacy, Spinrad and their colleagues (Lacy et al., 1994; Spinrad et al., 1995)."

Capítulo 7

Comentarios sobre los resultados y posibles investigaciones a futuro

En este capítulo se comentan los resultados enseñados en el capítulo 6.

Ajuste de datos de SN:

El ajuste con los datos de las SN (usando los mismos datos de [1] mejoró significativamente en cuanto a la disminución de errores en la predicción de parámetros. Estos se pueden encontrar en 5.2 (cada parámetro con su error). El coeficiente χ^2 mejoró desde 0,996 [1] a 0,99998. Esto se logró mediante el mejoramiento de la rutina, además de las mejoras que aportó una versión más moderna de Wolfram Mathematica 10.4.

Edad del Universo:

La edad del universo predicha por este modelo es de $13,688 \pm 0,156$ mil millones de años. Esto es muy concordante con la actual (aceptada) edad del universo predicho por cosmología estándar (modelo Λ CDM) $13,799 \pm 0,021$ (calculado en base a los datos aportados por Planck-2015 [3]).

Factor de escala efectivo

En el gráfico 6.1 se puede apreciar un aumento progresivo del factor de escala efectivo con el paso del tiempo, llegando hasta nuestro presente. Continúa aumentando hasta irse a infinito a un tiempo dado. Este fenómeno es conocido como *Big Rip*. Este modelo predice un *Big Rip* a una edad de (aproximadamente) 29 mil millones de años (valor encontrado por gráfico).

Observación: Existe una zona donde el factor de escala efectivo se vuelve complejo, luego retoma valores reales. El *Big Rip* se produce justo en el comienzo de la indefinición.

Parámetro de Hubble

El parámetro de Hubble tiene un comportamiento en forma de "U". Desde el comienzo hasta ahora el universo ha estado disminuyendo la velocidad. La línea roja indica el presente. Actualmente se ubica en muy cercano al mínimo del parámetro de Hubble. Esto indica que nos encontramos en la antesala desde donde el universo empieza a aumentar su parámetro de Hubble.

Es importante notar que, debido a la definición del \tilde{H} , este existe en todo el tiempo $t > 0$, exceptuando dos puntos específicos de indefinición. El primer tiempo de indefinición corresponde al *Big Rip*. En este punto se puede ver que: $\lim_{t \rightarrow t_{\text{Big Rip}}^-} \tilde{H} = \infty$. Pero el límite por la derecha retorna desde $-\infty$. Esto puede tener importancia dependiendo de un futuro análisis¹.

¹Ver posibles investigaciones futuras, última sección de este capítulo.

Por otro lado, la constante de Hubble (parámetro de Hubble actual) da un valor de $\tilde{H}_0 = 70,43 \pm 1,45$ km/(s Mpc), que comparado con respecto al valor que obtiene Λ CDM: $H_0 = 67,3 \pm 0,7$ km/(s Mpc) está un poco alejado. No obstante, la última publicación² sobre la medición de la constante de Hubble independiente de modelo cosmológico encontró un valor de $H_0 = 73,02 \pm 1,79$ km/(s Mpc) que calza con lo que predice este modelo tomando en cuenta los errores de ambas mediciones. También cabe destacar que Λ CDM no concuerda con este valor publicado recientemente, presentándose una incongruencia entre lo que Λ CDM predice con los datos de Planck y lo que se encuentra por parte de observaciones de SN en galaxias. Citando la publicación [5]:

We consider four geometric distance calibrations of Cepheids: (i) megamasers in NGC 4258, (ii) 8 DEBs in the LMC, (iii) 15 MW Cepheids with parallaxes measured with HST/FGS, HST/WFC3 spatial scanning and/or Hipparcos, and (iv) 2 DEBs in M31. The Hubble constant from each is 72.39 ± 2.56 , 71.93 ± 2.70 , 76.09 ± 2.41 , and 74.45 ± 3.34 km/(s Mpc), respectively. Our best estimate of $H_0 = 73.02 \pm 1.79$ km/(s Mpc) combines the anchors NGC 4258, MW, and LMC, and includes systematic errors for a final uncertainty of 2.4%. This value is 3.0σ higher than 67.3 ± 0.7 km/(s Mpc) predicted by Λ CDM with 3 neutrino flavors having a mass of 0.06 eV and the Planck data, but the discrepancy reduces to 2.0σ relative to the prediction of 69.3 ± 0.7 km/(s Mpc) based on the comparably precise combination of WMAP+ACT+SPT+BAO observations, suggesting that systematic uncertainties in cosmic microwave background radiation measurements may play a role in the tension. If we take the conflict between Planck high-redshift measurements and our local determination of H_0 at face value, one plausible explanation could involve an additional source of dark radiation in the early Universe in the range of $\delta N_{\text{eff}} \approx 0.4-1$. We anticipate further significant improvements in H_0 from upcoming parallax measurements of long-period MW Cepheids.

Esto abre la posibilidad a nuevos modelos cosmológicos que puedan explicar esta incoherencia en Λ CDM, el cual es, hasta ahora, el modelo más aceptado.

Parámetro de desaceleración

La diferencia más notoria entre el gráfico del parámetro de desaceleración frente a los parámetros ya analizados es que es continuo en todo $t \geq 0$.

Con respecto a la época presente, se puede notar que el parámetro de desaceleración es negativo, siendo de $\tilde{q}_0 \approx -0,7$, lo que predice que el universo se encuentra acelerando. Esto es importante ya que el modelo, en ningún momento, hace uso de la *energía oscura* para explicar este fenómeno. Es importante destacar que la aceleración (o desaceleración) del universo, depende de la densidad de radiación estándar que existe. Esta cantidad, expresada en las ecuaciones por la constante C implica una expansión del universo (el hecho de que C sea distinto de 0).

El parámetro de desaceleración actual predicho por el modelo es de $\approx -0,7$. No existen mediciones independientes de modelo cosmológico que arrojen un valor exacto de q_0 . Sin embargo, se puede comparar con lo predicho por Λ CDM y por algunas mediciones (muy imprecisas) de q_0 independientes de modelo. Λ CDM arroja un valor de $\approx -0,5$. [6]. Comparando ahora con un método paramétrico [7] independiente de modelo, dependiendo del tipo de función que usen encuentran tres valores posibles³: $-0,332$, $-0,595$ y $-0,796$. Mayor precisión en estas mediciones no han sido logradas. A grandes rasgos se puede decir que Gravedad- $\tilde{\delta}$ se encuentra en el rango de los valores "esperados".

A continuación se presentan algunas observaciones y sugerencias de un posible trabajo a futuro en el tema de la desaceleración del universo y su futuro: La continuidad del parámetro de desaceleración en todo tiempo t , podría sugerir que el universo sigue existiendo después del tiempo de "Big Rip". La idea que el universo siga existiendo se podría justificar en un fenómeno de superconductividad, que describe que las partículas sin masa a temperaturas muy bajas ($T \rightarrow 0$), adquieren masa. Dado que el universo durante el *Big Rip* habrá diluido "al máximo" todos sus componentes, entonces la temperatura de estos será extremadamente baja, haciendo que los fotones adquieran masa mediante este fenómeno. Si esto fuese así, el coeficiente C se haría 0 ya que no habrían partículas sin

²Publicación reciente hecha mediante observaciones del telescopio Hubble publicada el 5 de abril de este año [5].

³Citando la publicación: *We study the accelerated expansion of the Universe by using the kinematic approach. In this context, we parameterize the deceleration parameter, $q(z)$, in a model independent way. Assuming three simple parameterizations we reconstruct $q(z)$. We do the joint analysis with combination of latest cosmological data consisting of standard candles (Supernovae Union2 sample), standard ruler (CMB/BAO), cosmic clocks (age of passively evolving galaxies) and Hubble ($H(z)$) data. Our results support the accelerated expansion of the Universe.*

masa, frenando la expansión del universo y haciendo que este colapse. Esto podría también evidenciarse en el comportamiento de $H(t)$, ya que después del tiempo de *Big Rip*, este término se acerca desde $-\infty$. Si se observa el comportamiento de $\tilde{q}(t)$ se puede apreciar que actualmente el universo está acelerando ($\tilde{q}_0 < 0$) y que llegará a un mínimo (un máximo de aceleración), el cual coincide con el tiempo de *Big Rip*. Luego, $q(t)$ sigue aumentando hasta llegar a 0 sin nunca indefinirse, (es decir, el universo empieza a desacelerar) hasta llegar a 0 y volverse positivo (universo desacelera). Finalmente $\tilde{q}(t)$ sigue siendo positivo (universo desacelerando) para siempre, hasta tender a un límite (valor positivo). Es decir, luego de este "rebote", el universo queda desacelerando "para siempre". Quizás sea posible reconstruir (ya que el factor de escala efectivo y el parámetro de Hubble se indefinen), a partir de $q(t)$, el comportamiento del universo resolviendo la ecuación diferencial e imponiendo condiciones "post-*Big Rip*" y analizar que sucede, además de estudiar el fenómeno de la adquisición de masa a $T \rightarrow 0$ por parte de partículas sin masa. Esto podría ayudar a evitar un *Big Rip* en el modelo.

Redshift de transición z_t

El redshift de transición predicho es de 0,7. Es importante destacar que este redshift corresponde al momento de la primera transición de $\tilde{q}(t)$ por el eje $\tilde{q} = 0$. Existen dos transiciones, pero solo una "ha ocurrido". La otra es posterior al *Big Rip*. Todo indica a que sí ocurrió una transición, desde que el universo era dominado por radiación, luego materia y finalmente *energía oscura* (al menos en cosmología estándar). Así que es esperable que ocurra una transición y este modelo también la predice.

La determinación exacta de este parámetro no se ha hecho. Una de las predicciones de esta época, independiente de modelo, se puede hallar en [7]. Los tres valores predichos (mediante los métodos de parametrización) son: 2,27, 0,87 y 0,61. Es decir, dentro de las posibles opciones, Gravedad- $\tilde{\delta}$ está contenida (aunque es claro que no es un parámetro restrictivo).

Relación entre tiempo cosmológico y redshift

La relación mostrada entre el tiempo cosmológico para Gravedad- $\tilde{\delta}$ es extremadamente similar al Λ CDM. Ver figura 6.6. Esto es muy relevante, ya que esta similitud en esta dependencia (a pesar de tener fundamentos teóricos tan diferentes) muestra que cualquier test que el modelo estándar aceptado actualmente ha superado con éxito, Gravedad- $\tilde{\delta}$ también los supera. Esto se observa en el "test con *OHRG*".

Test con *OHRG*

Como Gravedad- $\tilde{\delta}$ describe la misma dependencia que Λ CDM entre tiempo y redshift, fallan en la misma explicación de un dato. Actualmente se usan tres objetos de alto redshift al cual se les ha podido asociar una edad mínima de existencia. El test consiste en comparar la edad del modelo cosmológico a ese redshift y ver si esta edad es mayor o menor que la del *OHRG*. Si es mayor entonces está en lo correcto (el universo es mas viejo que el objeto), de lo contrario se estaría diciendo que los objetos son mas viejos que el universo, algo que es ilógico. Dos de los datos validan el modelo, excepto el dato de APM 08279+5255 (color rosa). Este dato tiene predicción de dos edades diferentes, es por eso que existen dos puntos en el gráfico 6.7 que están al mismo redshift (ya que es el mismo objeto). Ninguna de estas dos edades mínimas predichas para este objeto tienen concordancia para ninguno los dos modelos. Algo que juega a favor de esta "mala predicción", es que a este objeto se le haintentado determinar una edad, pero estos valores varían mucho. Esto aumenta las dudas sobre el posible "mal" cálculo de la edad de este objeto. Además ambos modelos (estándar y este) se validan y fallan de la misma manera en este test.

Valores de densidad de energía de materia delta y radiación delta

Usando las ecuaciones (4.2) y (4.3) se obtienen las proporciones:

$$\tilde{\Omega}_m \approx -0,5070\Omega_m$$

$$\tilde{\Omega}_r \approx -0,0125\Omega_r$$

Y usando los valores encontrados para Ω_r , ya que esta se puede encontrar desde C , se tiene que:

$$\tilde{\Omega}_m \approx -0,50$$

$$\tilde{\Omega}_r \approx -2,29 \times 10^{-6}$$

Dos cosas importantes de notar en esto:

Primero, la obtención de una fórmula para $\tilde{\Omega}_r$ y $\tilde{\Omega}_m$ es arbitraria ya que debía normalizarse para eliminar la dependencia de constantes que no se pueden determinar (al menos mediante el método de SN). Por ejemplo, si κ_2 fuese negativa, entonces estas densidades serían positivas. Luego, el hecho de que las dos densidades den del mismo signo, puede ser explicado por este fenómeno (diferente sería si una fuese negativa y la otra positiva).

Segundo, las fórmulas expresan una proporción de estas cantidades. La normalización no es "objetiva", y en este sentido la interpretación se puede dar entre la proporción entre estos dos componentes deltas. Claramente la dominante es la materia delta por lo que es esperable observar de alguna manera implicancias de la existencia de esta densidad de energía que interactúa como materia, y no así de la radiación delta. Esto puede concordar (a priori) con una interpretación de la materia delta como si fuese la *materia oscura*.

Futuras investigaciones en este modelo

Además del fenómeno de la continuidad de $\tilde{q}(t)$ y su posible vinculación con una explicación para la sobrevivencia del universo (y así evitar el Big Rip), existen otras aristas interesantes. Una de ellas es el estudio del CMB para predecir densidades de materia y radiación normales, además de poder descartar (o tener que incluir) algún nuevo componente como materia y energía oscura. La predicción del espectro de potencias del CMB es parte de una investigación actual, la cual puede ser de mucha relevancia para esta teoría, ya que puede ser comparación con el método de SN.

Queda abierta la posibilidad a incluir nuevos datos, ya que es posible incluir nuevas supernovas que se han descubierto desde los datos usados hasta ahora. La inclusión de estos datos podría dar mayor restricción a los parámetros predichos. A pesar de que la curva fiteada de módulo de distancia versus redshift ajusta muy bien, esto podría permitir la predicción de un parámetro más: $h^2\Omega_r$. Este parámetro, actualmente, es introducido como un dato conocido (procediente de la temperatura del CMB medida por Planck). El dejar libre este parámetro permitiría predecir (con algo de precisión) la temperatura del CMB, arrojando un dato que ningún modelo cosmológico ha podido predecir. El hecho de que la radiación sea tan importante para este modelo, permite la predicción de un parámetro como este, algo que típicamente se toma como ~ 0 en teorías "estándar" ya que es un valor muy chico y despreciable comparativamente a las densidades de materia (masiva) y energía oscura (que domina el universo actual, según estas teorías).

Se intentó predecir el valor $h^2\Omega_r$ y así obtener un valor de la temperatura del CMB. El mayor problema radica en agregar un grado de libertad al ajuste, lo que hace que las constantes converjan a valores, pero con errores muy grandes (el método sigue convergiendo). A pesar de esto, los valores predichos contienen (con el error incluido) los parámetros encontrados con el fiteo que se presenta en esta investigación. Esto apoya la idea de que el código y el método converge bien, pero hace falta variar algo de este para poder aumentar la precisión (disminuir el error). La temperatura predicha por este modelo es de 3.5 K (con la mayor probabilidad de que sea este valor), pero con un error de 266 K. Para ser la primera predicción de la temperatura del CMB, no está lejos de los 2.725 K medidos por Planck). Es un buen intento aunque se espera poder mejorar este error.

Otra dos opciones abiertas a investigar son: estudiar perfiles de materia oscura y ver si esto se puede explicar únicamente con materia delta. Y la otra opción abierta es buscar alguna conversión de las ecuaciones actuales de esta teoría a unas similares a las Ecuaciones de Friedmann y así poder encontrar una expresión "congruente" con lo que se le llama actualmente *energía oscura*.

Es importante recalcar que el modelo no hace nunca uso del concepto de *energía oscura* y atribuye todo a un

efecto geométrico, propiamente matemático. También es necesario buscar a futuro un concepto más acabado sobre qué es la materia delta y la radiación delta (mejor dicho, densidades de energía delta).

7.1. Referencias

- [1] Yi Zhang, Hui Li, Xing Wu, Hao Wei, Rong-Gen Cai, *Age constraints on the Agegraphic Dark Energy Model*, *Astrophysical Journal*, 9 de Agosto del 2007, arXiv:0708.1214v1.
- [2] Longair, *High Energy Astrophysics*, Cambridge University Press, tercera edición, página 748.
- [3] Planck 2015 results. XIII. *Cosmological parameters*, *Astrophysical Journal*, 6 de Febrero del 2015.
- [4] J. S. Alcaniz and J. A. S. Lima, *New Limits on QL and QM from Old Galaxies at High Redshift*, *The Astrophysical Journal*, 520:L87–L90, 1999, August 20 q 1999.
- [5] Adam G. Riess, Lucas M. Macri, Samantha L. Hoffmann, et. al. *A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant*, astro-ph.CO, 5 de abril del 2016. Disponible en internet: http://www.spacetelescope.org/static/archives/releases/science_papers/heic1611a.pdf
- [6] Yu.L. Bolotin, V.A. Cherkaskiy, O.A. Lemets D.A. Yerokhin and L.G. Zazunov, *Cosmology in Terms of the Deceleration Parameter. Part I*, arXiv:1502.00811 [gr-qc], página 9.
- [7] Remya Nair, Sanjay Jhingana and Deepak Jainb, *Cosmokinetics: A joint analysis of Standard Candles, Rulers and Cosmic Clocks*, [astro-ph.CO], 2 de enero, del 2012, arXiv:1109.4574v2.