



Pontificia Universidad Católica de Chile

Facultad de Física

Departamento de Física

Test Clásicos para Delta

Gravity

POR

Christian Felipe Díaz Bahamondes

Informe de práctica presentado a la Facultad de Física de la Pontificia Universidad Católica de Chile, como requisito para optar al grado académico de Licenciado en Física.

Profesor Guía : Dr. Jorge Alfaro

Comisión Examinadora : Dr. Máximo Bañados

Dr. Andreas Reisenegger

Enero de 2012

Santiago - Chile

Dedicado a todos aquellos que ven en la física algo más que fórmulas y números, ven la realidad, esa realidad que nos enamora una vez y no nos suelta jamás.

Agradecimientos

En primero lugar quiero agradecer a mi profesor guía Jorge Alfaro, por permitirme realizar esta práctica con él, sabiendo todas mis falencias matemáticas y personales. Sin su gran paciencia y comprensión no habría podido alcanzar las metas que nos propusimos. En segundo lugar, a todas las personas que discutieron conmigo mis dudas y comentarios sobre los temas que aquí se trataron, con su gran aporte de conocimiento y crítica fueron verdaderamente importantes en mis logros obtenidos, me refiero a mis amigos y profesores. También debo agradecer a todos aquellos fueron forjando mi enseñanza en este proceso educativo, sin ellos no sería la persona que hoy he llegado a ser. Por último, pero no menos importante, a Dios, mi familia y mis grandes amigos, que fueron el pilar fundamental en los momentos más angustiantes que tuve, su comprensión y apoyo han sido piedra angular en mi formación tanto personal como académica. A mis padres, Elio y Pollyanna, mis hermanos, Cristóbal, Jose Manuel y Paola, mi mama Chela , a Macarena, sin ustedes no sería nada de lo que soy. Gracias, totales.

Resumen

El siguiente trabajo consiste principalmente en testear el modelo Delta Gravity, que se ha venido desarrollando en nuestra facultad. En concreto pusimos el modelo a prueba en dos *test* clásicos de la Teoría de Relatividad General creada por Albert Einstein, la deflexión de la luz al pasar por el sol y la precesión del perihelio de Mercurio. Con estos resultados intentaremos verificar que la teoría puesta a prueba, preserva las ecuaciones generales de la relatividad, considerando que nuestra teoría es una modificación a la propuesta por Einstein.

Índice

Agradecimientos	3
Resumen	4
1.- Introducción	8
2.- Relatividad General	
2.1.- Ecuación de Movimiento.....	11
2.2.- Ecuaciones generales de Movimiento.....	14
2.3.- Deflexión de la luz al pasar por un cuerpo masivo.....	18
2.4.- Precesión del perihelio de Mercurio.....	21
3.- Modelo Delta Gravity	
3.1.- El modelo	27
3.2.- Principio de Acción	28
3.3.- Acción para Delta Gravity	30
3.4.- Ecuaciones para $g_{\mu\nu}$ y $\tilde{g}_{\mu\nu}$	31
3.5.- Ecuaciones de movimiento para partículas	36

4.- Test de Delta Gravity	
4.1.- Métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$	40
4.2.- Deflexión de la luz al pasar por un cuerpo masivo con el modelo Delta Gravity,.....	42
4.3.- Precesión del perihelio de Mercurio con el modelo Delta Gravity	48
5.- Conclusiones	58
Anexo 1	59
Bibliografía	60

Capítulo 1

Introducción

Desde los comienzos de la humanidad el hombre ha intentado comprender y dar explicación a lo que sucede en su alrededor. Ya sea mediante dioses, mitos, leyendas, etc. Deja expuesta una explicación a los sucesos que no logra entender fácilmente. Así es como nuestro cielo ha sido una gran fuente de interrogantes desde los comienzos de la historia, y se han gastado horas de sueño, papiros, hojas de papel para poder encontrarle una respuesta contundente a lo que ocurre en esa gran bóveda oscura de preguntas, que en muchos casos carecen de una respuesta definitiva.

De esta forma, el mundo científico, y en particular la física y la astronomía, juega un rol fundamental en su entendimiento y comprensión, ya que es por medio de este método que se le da la real validez a los descubrimientos hechos por el hombre. Y es gracias a estos pequeños avances (descubrimientos) que vamos construyendo una gran respuesta al final, cada uno aportando su granito de arena.

Sin duda que si nos referimos a la Teoría de la Relatividad General (T.R.G.) se ha avanzado una gran cantidad, descifrando y entendiendo la mayoría de los fenómenos que se dan en nuestro inmenso, oscuro y frío universo, es así como esta teoría funciona muy bien a escalas macroscópicas. Pero como no solo nos basta entender

lo que sucede a distancias muy lejanas de nuestra realidad, el hombre ha encontrado una respuesta para las cosas que suceden a escalas microscópicas, ha descubierto la Teoría Cuántica (T.C.).

En el siglo pasado muchos científicos trataron de unificar las teorías físicas existentes hasta ese entonces, sin embargo, en el intento por unificar estas dos grandes teorías, la T.R.G y la T.C., no se ha podido lograr, impidiendo así la unión de estas fuerzas de la naturaleza.

La incompatibilidad que se produce entre estas dos grandes teorías es muy relevante, pues es suma importancia tratar de explicar fenómenos gravitacionales a escalas muy pequeñas, y este es una de las principales motivaciones para unificarlas. Para esto se necesita encontrar una Modelo de Gravitación Cuántica.

Sumémosle a esto, dos de los últimos descubrimientos en cosmología: a) la expansión acelerada del universo y, b) la mayor cantidad de masa que las curvas de rotación de las galaxias predicen. Para ambos problemas se han dado soluciones, la energía oscura (E.O.) y la materia oscura (M.O.). Pero en este punto cabe preguntarnos ¿qué son estas dos cosas?.

Para ello se ha venido trabajando en nuestra facultad, principalmente por el profesor Jorge Alfaro [4] [8], en un modelo de gravitación que intenta ser una modificación, o un intento por completar aún más la Teoría de Relatividad General y de esta forma, intentar dar una aproximación de que son estas dos cosas tan enigmáticas a nuestro conocimiento.

Sin duda que para que esta aproximación llegue a ser verdaderamente compatible con la T.R.G. debe pasar por muchos obstáculos, siendo estos la gran motivación de esta presente tesis. En este sentido, trataremos de comprobar que el presente modelo es una modificación de la TGR con dos “*tests*” clásicos de la teoría de Einstein, que son:

- a) La deflexión de la luz al pasar por un cuerpo masivo, como el Sol.
- b) La precesión del perihelio de Mercurio.

Estos experimentos han sido comprobados por la T.R.G. y han dado resultados muy precisos con respecto al valor medido experimentalmente, convirtiéndose en problemas clásicos dentro de la teoría, y que cualquier aproximación o modificación de ella debe ser capaz de contenerlos.

Es así como esta tesis pretende ser, un humilde paso más en el avance de este nuevo modelo, y por ende un pequeño paso para el avance científico, siendo una de las tantas pruebas que debe soportar la teoría *Delta Gravity*.

Con estas comprobaciones y otras más en estudios, este modelo se perfila como una buena fuente de estudio y una posible explicación a las preguntas que el propio universo nos ha puesto en el camino, queda mucho por recorrer, así que *caminante, no hay camino, se hace camino al andar*. [12].

Capítulo 2

Relatividad General

Para comenzar nuestro estudio debemos primero revisar un poco sobre la Relatividad General de Einstein y reproduciremos los problemas a estudiar, es decir, la precesión del Perihelio de Mercurio y la deflexión de la luz al pasar por un cuerpo masivo, que en este caso es el sol.

2.1 Ecuación de movimiento

Consideraremos el movimiento libre de una partícula con masa o sin ella (fotón) en un campo gravitacional estático e isotrópico. Utilizando el Principio de Equivalencia, este nos dice que existe un sistema de coordenadas σ^α en caída libre tal que su ecuación de movimiento es el de una línea recta en el espacio-tiempo:

$$\frac{d^2\sigma^\alpha}{d\tau^2} = 0 \tag{2.1.1}$$

Con $d\tau$ cómo tiempo propio [1]:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\sigma^\alpha d\sigma^\beta \quad (2.1.2)$$

Ahora suponemos que podemos usar cualquier tipo de sistema de coordenadas, como por ejemplo las de un laboratorio x^μ , así que el sistema de coordenadas en caída libre σ^α son función de x^μ y la ecuación (2.1.1) queda:

$$\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \sigma^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.1.3)$$

sí multiplicamos (2.1.3) por $\partial x^\lambda / \partial \sigma^\alpha$ y utilizamos:

$$\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \sigma^\alpha} = \delta_\mu^\lambda \quad (2.1.4)$$

que es el producto usual [2], nuestra ecuación de movimiento quedará:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.1.5)$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ es la *conexión afín*:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial^2 \sigma^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (2.1.6)$$

El tiempo propio (2.1.2) también sufre una modificación, pues debemos expresarlo en función de las coordenadas arbitrarias x^μ , quedándonos:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1.7)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, definido por:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial\sigma^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (2.1.8)$$

Para el caso de partículas sin masa la ecuación (2.1.1) es la misma, solo que existe un pequeño detalle, la variable independiente τ no puede ser tomada como el tiempo propio al igual que en (2.1.2) ya que $d\tau^2$ se hace cero. Para solucionar esto la variable τ la reemplazaremos por $\rho \equiv \sigma^0$, entonces nuestras ecuaciones nos quedan:

$$\frac{d^2\sigma^\alpha}{d\rho^2} = 0 \quad (2.1.9)$$

$$0 = -\eta_{\alpha\beta} \frac{d\sigma^\alpha}{d\rho} \frac{d\sigma^\beta}{d\rho} \quad (2.1.10)$$

Siguiendo con el mismo razonamiento de más arriba, podemos encontrar las ecuaciones de movimiento en un campo gravitacional arbitrario con un sistema de coordenadas arbitrarias para esta situación:

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\rho^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\rho} \frac{dx^\nu}{d\rho} = 0 \quad (2.1.11)$$

$$0 = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\rho} \frac{dx^\nu}{d\rho} \quad (2.1.12)$$

2.2 Ecuaciones generales de movimiento

Ahora para encontrar nuestro tensor métrico usaremos la solución de Schwarzschild [9] que resulta:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -B(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

donde:

$$B(r) = 1 - \frac{a}{r} \quad , \quad A(r) = \left[1 - \frac{a}{r}\right]^{-1} \quad (2.2.1)$$

con a :

$$a = 2MG \quad (2.2.2)$$

Así que el tiempo propio será el siguiente:

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\varphi^2 \quad (2.2.3)$$

Recordando la ecuación (2.1.5) obtendremos las cuatro ecuaciones independientes de movimiento para una partícula:

$$0 = \frac{d^2t}{d\tau^2} + \frac{B'(r)}{B(r)} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \quad (2.2.4)$$

$$0 = \frac{d^2r}{d\tau^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{r}{A(r)} \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - \frac{r\sin^2(\theta)}{A(r)} \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 + \frac{B'(r)}{2A(r)} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \quad (2.2.5)$$

$$0 = \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - \sin(\theta)\cos(\theta) \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \quad (2.2.6)$$

$$0 = \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + 2\cot(\theta) \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (2.2.7)$$

Ahora que tenemos las ecuaciones comenzaremos a trabajar sobre ellas. En primer lugar consideraremos que el movimiento se produce en un plano, ya que el campo es isotrópico, por ende cualquier orbita que siga una partícula podrá ser sobre el plano ecuatorial, es decir fijamos:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad (2.2.8)$$

Al hacer esto satisfacemos la ecuación para θ de manera instantánea. Ahora conseguiremos dos cantidades de movimiento. Para esto dividimos (2.2.4) por $dt/d\tau$ y (2.2.7) por $d\varphi/d\tau$ obteniendo:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\ln \frac{dt}{d\tau} + \ln B \right] = 0 \quad (2.2.9)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[\ln \frac{d\varphi}{d\tau} + \ln r^2 \right] = 0 \quad (2.2.10)$$

de (2.2.9) obtenemos la cantidad J (constante):

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = J \quad (2.2.11)$$

que juega el rol del momentum angular por unidad de masa. La siguiente cantidad viene dada por (2.2.10):

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{B(r)} \quad (2.2.12)$$

donde hemos fijado la constante que aparece a 1 pues si $r \rightarrow \infty$, $B(r)$ se acerca a 1, la coordenada τ se convierte en la coordenada t [3]. Ahora insertaremos (2.2.11) y (2.2.12) en (2.2.5), además usaremos (2.2.8) en esta misma ecuación, con ellos obtendremos:

$$0 = \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{J^2}{r^3 A(r)} + \frac{B'(r)}{2A(r)B^2(r)} \quad (2.2.13)$$

esta última ecuación la usaremos para obtener nuestra última constante de movimiento, para ello multiplicaremos (2.2.13) por $2A(r) dr/d\tau$ y la escribiremos como:

$$\frac{d}{d\tau} \left[A(r) \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} \right] = 0 \quad (2.2.14)$$

de esta forma obtenemos nuestra última constante de movimiento, donde E es constante

$$A(r) \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E \quad (2.2.15)$$

si ocupamos (2.2.15), (2.2.12) y (2.2.11) y ε como un parámetro libre podremos saber cual es tiempo propio

$$d\tau^2 = E d\varepsilon^2 \quad (2.2.16)$$

entonces podemos definir qué valores puede tomar E si lo comparamos con (2.1.7) y (2.1.12)

$$E > 0 \quad \text{para partículas con masa} \quad (2.2.17)$$

$$E = 0 \quad \text{para partículas sin masa} \quad (2.2.18)$$

En los casos que estudiaremos más adelante lo más importante es cómo se puede describir la órbita de algún objeto en relatividad general, para esto, necesitamos tener la coordenada r en función de la coordenada φ . Esta órbita puede ser obtenida directamente si ocupamos (2.2.11) y (2.2.15), de esta forma eliminando $d\tau$ obtenemos:

$$\frac{A(r)}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{J^2 B(r)} = -\frac{E}{J^2} \quad (2.2.19)$$

si separamos dr y $d\varphi$ e integramos obtendremos un resultado de φ en función de r :

$$\int d\varphi = \pm \int \frac{A^{1/2}(r) dr}{r^2 \left(\frac{1}{J^2 B(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right)^{1/2}} \quad (2.2.20)$$

esta última igualdad la usaremos en nuestros dos casos para resolver los problemas de la deflexión de la luz por un cuerpo masivo, como el sol, y la precesión del perihelio de Mercurio.

2.3 Deflexión de la luz al pasar por un cuerpo masivo

Consideraremos una partícula que se acerca a un cuerpo masivo (en nuestro caso será el Sol) desde una gran distancia y además que viaje a una velocidad constante V en línea recta, pues en infinito debemos volver a la métrica de Minkowski, de esto se concluye que $A(\infty) = B(\infty) = 1$. Si vemos la Figura 2.3.1 podemos obtener:

$$b \simeq r \sin(\varphi - \varphi_\infty) \simeq r(\varphi - \varphi_\infty) \quad (2.3.1)$$

$$-V \simeq \frac{d}{dt} (\cos(\varphi - \varphi_\infty)) \simeq \frac{dr}{dt} \quad (2.3.2)$$

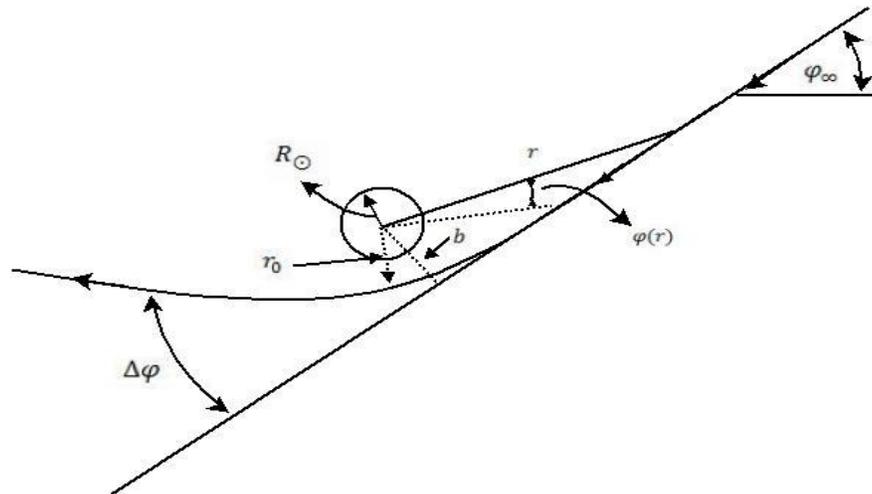


Figura 2.3.1 .- Deflexión de la luz al pasar por un cuerpo masivo (la deflexión está exagerada en la figura)

donde b es el parámetro de impacto y φ_∞ es la dirección incidente.

Si ocupamos (2.3.1) y (2.3.2) en las constantes de movimiento que conseguimos anteriormente, vemos que estas las satisfacen en infinito y por ende tenemos las constantes de movimiento:

$$J = bV^2 \quad (2.3.3)$$

$$E = 1 - V^2 \quad (2.3.4)$$

En este punto cabe recalcar que en nuestro caso $E = 0$, ya que para fotones – partículas sin masa – $V = 1$. Para resolver este problema lo mejor es considerar J en términos de r_o que es la distancia más próxima al Sol, en lugar de usar el parámetro b . En r_o , $dr/d\varphi$ se hace cero, así que utilizando (2.2.19) y (2.3.4) nos da:

$$J = r_o \left(\frac{1}{B(r_o)} + V^2 - 1 \right)^{1/2} \quad (2.3.5)$$

De esta forma la órbita será descrita por (2.2.20):

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = \int_r^\infty \frac{A^{1/2}(r) dr}{r^2 \left[\frac{1}{r_o^2} \left(\frac{B(r_o)}{B(r)} \right) - \frac{1}{r^2} \right]^{1/2}} \quad (2.3.6)$$

podemos escribirla de una manera más reducida como:

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = \int_r^\infty A^{1/2}(r) \left[\left(\frac{r}{r_o} \right)^2 \left(\frac{B(r_o)}{B(r)} \right) - 1 \right]^{-1/2} \frac{dr}{r} \quad (2.3.7)$$

Ahora usaremos los valores de $A(r)$ y $B(r)$ expandidos

$$A(r) = 1 + \frac{2MG}{r}$$

$$B(r) = 1 - \frac{2MG}{r}$$

En primer lugar reduciremos el término de la raíz cuadrada para poder trabajar con él de una forma más conocida

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \left(\frac{B(r_0)}{B(r)}\right) - 1 &= \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \left[1 + 2MG \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)\right] - 1 \\ &= \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + \frac{2MG}{r(r+r_0)} - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \frac{2MGr}{r_0(r+r_0)} - 1 \\ &= \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1\right] \left[1 - \frac{2MGr}{r_0(r+r_0)}\right] \end{aligned}$$

entonces (2.3.7) nos queda:

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = \int_r^\infty \frac{dr}{r} \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1\right]^{-1/2} \left[1 + \frac{MG}{r} + \frac{MGr}{r_0(r+r_0)}\right] \quad (2.3.8)$$

Integrando resulta:

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = \sin^{-1} \left(\frac{r_0}{r}\right) + \frac{MG}{r_0} \left(2 - \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2} - \sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}}\right) \quad (2.3.9)$$

En este punto definiremos el camino que recorre la partícula. Podemos expresar este camino en función del ángulo $\varphi(r)$, así que el cambio total en

$\varphi(r)$ como la disminución de r desde el infinito hasta su mínimo valor r_0 y nuevamente el aumento de este hasta infinito será expresado como $2|\varphi(r_0) - \varphi_\infty|$. Si la trayectoria fuera en una línea recta, esto equivaldría solo a π ; así que por lo cual la desviación de la órbita de la línea recta será:

$$\Delta\varphi = 2|\varphi(r_0) - \varphi_\infty| - \pi \quad (2.3.10)$$

por lo tanto usando (2.3.9) y (2.3.10) obtenemos el ángulo de deflexión a primer orden en MG/r_0 :

$$\Delta\varphi = \frac{4MG}{r_0} \quad (2.3.11)$$

Utilizando el Anexo 1 con los valores de las constantes podemos encontrar que $\Delta\varphi$ es:

$$\Delta\varphi = 1,753''$$

2.4 Precesión del Perihelio de Mercurio

El siguiente problema es otro clásico *test* de la Relatividad General, la precesión del Perihelio de Mercurio. En este caso también ocuparemos la ecuación (2.2.20) pero antes definiremos el perihelio y el afelio (Figura 2.4.1), que son los valores mínimos (r_-) y máximo (r_+), respectivamente, que alcanza r . Ambos puntos se van a cero en $dr/d\varphi$ así que (2.2.19) queda:

$$\frac{1}{r_\pm^2} - \frac{1}{J^2 B(r_\pm)} = -\frac{E}{J^2} \quad (2.4.1)$$

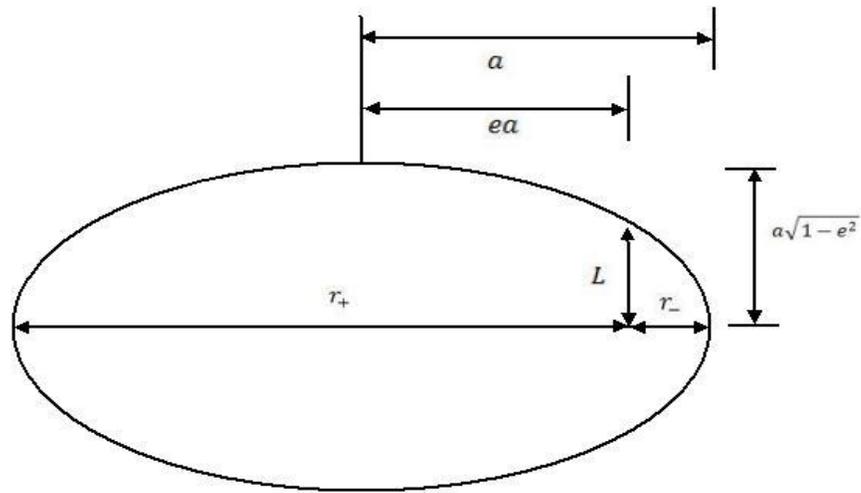


Figura 2.4.1.- Propiedades de una elipse

de (2.4.1) tenemos dos ecuaciones una para r_- y r_+ , de aquí podemos despejar E y J en función del afelio y perihelio:

$$E = \frac{\frac{r_+^2}{B(r_+)} - \frac{r_-^2}{B(r_-)}}{r_+^2 - r_-^2} \quad (2.4.2)$$

$$J^2 = \frac{\frac{1}{B(r_+)} - \frac{1}{B(r_-)}}{\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2}} \quad (2.4.3)$$

El ángulo de barrido comienza desde la posición de r_- y comienza a incrementarse, así utilizando (2.2.20) tendremos que:

$$\varphi(r) - \varphi(r_-) = \int_{r_-}^r A^{1/2}(r) \left[\frac{1}{J^2 B(r)} - \frac{1}{r^2} - \frac{E}{J^2} \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^2} \quad (2.4.4)$$

si utilizamos (2.4.2) y (2.4.3) obtendremos la siguiente integral:

$$\begin{aligned} \varphi(r) - \varphi(r_-) &= \\ &= \int_{r_-}^r A^{1/2}(r) \left[\frac{r_-^2(B^{-1}(r) - B^{-1}(r_-)) - r_+^2(B^{-1}(r) - B^{-1}(r_+))}{r_+^2 r_-^2 (B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-))} - \frac{1}{r^2} \right]^{-1/2} \frac{dr}{r^2} \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Ahora ocuparemos los valores de $A(r)$ y $B(r)$ de la expansión de Robertson[1]:

$$A(r) = 1 + \gamma \frac{2MG}{r}$$

$$B(r) = 1 - \frac{2MG}{r} + \frac{2(\beta - \gamma)M^2G^2}{r^2}$$

esto lo hacemos ya que en (2.4.5) se cancela el término principal de $B(r)$ pero no el de $A(r)$, así que para calcular $\varphi(r)$ debemos ocupar a primer orden $A(r)$ y a segundo orden $B(r)$.

$$B^{-1}(r) \simeq 1 + \frac{2MG}{r} + \frac{2(2-\beta+\gamma)M^2G^2}{r^2} \quad (2.4.6)$$

En primer lugar trabajaremos con el término que contiene los $B(r)$ y los $B(r_{\pm})$, entonces podemos hacer

$$\frac{r_-^2(B^{-1}(r)-B^{-1}(r_-)) - r_+^2(B^{-1}(r)-B^{-1}(r_+))}{r_+^2 r_-^2 (B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-))} - \frac{1}{r^2} = C \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \quad (2.4.7)$$

la escribimos de esta forma pues es algo mucho más conocido que lo anterior y , como veremos más adelante, si hacemos otro cambio de variable la integral es simple de resolver. Para poder determinar C lo que haremos será hacer $r \rightarrow \infty$, de esta forma nos quedara:

$$C = \frac{r_+^2(1 - B^{-1}(r_+)) - r_-^2(1 - B^{-1}(r_-))}{r_+ r_- (B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-))}$$

utilizando los valores de la expansión de Robertson obtenemos:

$$C = \frac{1}{1 + (2 - \beta + \gamma)MG \left(\frac{1}{r_-} + \frac{1}{r_+} \right)}$$

$$\Rightarrow C \simeq 1 - (2 - \beta + \gamma)MG \left(\frac{1}{r_-} + \frac{1}{r_+} \right) \quad (2.4.8)$$

de esta forma usando el valor de $A(r)$ de la expansión de Robertson, (2.4.8) en (2.4.5) obtenemos:

$$\varphi(r) - \varphi(r_-) \simeq$$

$$\simeq \left[1 + \frac{1}{2}(2 - \beta + \gamma)MG \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \right] \int_{r_-}^r \frac{dr}{r^2} \frac{\left[1 + \frac{\gamma MG}{r} \right]}{\left[\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \right]^{1/2}}$$

(2.4.9)

Si vemos (2.4.9) podemos hacer un cambio de variable que la vuelve mucho más simple y fácil de integrar, este es:

$$\frac{1}{r} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \sin \omega \quad (2.4.10)$$

entonces si integramos (2.4.9) con esta nueva variable ω obtenemos:

$$\begin{aligned} \varphi(r) - \varphi(r_-) = & \left[1 + \frac{1}{2} (2 - \beta + 2\gamma) MG \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \right] \left(\omega + \frac{\pi}{2} \right) \\ & - \frac{1}{2} \gamma MG \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \cos \omega \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

El cambio en φ como la disminución de r desde r_+ a r_- es el mismo cambio que ocurre en φ como crecimiento de r desde r_- a r_+ , así que el cambio total en por revolución es $2|\varphi(r_+) - \varphi(r_-)|$. Sin embargo esto podría ser igual a 2π si la órbita fuese una elipse cerrada, así que en general la precesión de la órbita por revolución será:

$$\Delta\varphi = 2|\varphi(r_+) - \varphi(r_-)| - 2\pi \quad (2.4.12)$$

Ahora podemos usar (2.4.11) y (2.4.12), entonces en el afelio $\omega = \pi/2$ y por ende $\Delta\varphi$ es:

$$\Delta\varphi = (6\pi MG) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \left[\frac{2-\beta+2\gamma}{3} \right] \quad (2.4.13)$$

Podemos arreglar un poco esta expresión utilizando algunas propiedades de la elipse, como por ejemplo L que es el *semilatus rectum* [ver algún libro de mate]

$$L \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \quad (2.4.15)$$

de aquí podemos determinar L en función de dos propiedades de la elipse, la excentricidad e y el eje semieje mayor a , definidos como:

$$r_{\pm} = (1 \pm e)a$$

por lo tanto usando $\beta = \gamma = 1$ [1] obtenemos una predicción para la precesión de:

$$\Delta\varphi = 6\pi \frac{MG}{L} \text{ radianes/revolución} \quad (2.4.16)$$

Utilizando los valores del anexo 1 encontramos que $\Delta\varphi$ es:

$$\Delta\varphi = 41.22'' \text{ por siglo}$$

Capítulo 3

Modelo Delta Gravity

Para resolver los problemas anteriores con Delta Gravity [4], primero debemos presentar dicho modelo. Este capítulo se encargara de dar un esbozo general de Delta Gravity, con su acción correspondiente, ecuaciones para $g_{\mu\nu}$ y $\tilde{g}_{\mu\nu}$; y por último las ecuaciones de movimiento que usaremos para dar solución a los problemas. El interés por estudiar este modelo es que en él podemos encontrar algunos indicios que nos ayuden a solucionar algunos de los problemas de nuestro Universo “oscuro” (materia y energía), y quien sabe que otros problemas se pueden solucionar.

3.1 El modelo

Una de las principales motivaciones por la cual aparece este modelo es la búsqueda de teorías de Gauge renormalizables y estudiar una forma diferente que tenga como base la estructura algebraica construida con el método de cuantización Batalin-Vilkovisky (BV). Para una introducción más detallada se puede ver en [5][6].

Otra idea fundamental en la cual se basa esta teoría es que se construye como un modelo extendido que está restringido a devolver en todo momento las ecuaciones originales de algún modelo original.

El modelo será aplicado a la Teoría de Relatividad General de Einstein y lo que nos da lo llamamos modelo Delta Gravity.

3.2 Principio de Acción

Un principio integral es aquel que considera el movimiento completo del sistema entre dos tiempos (t_1 y t_2); y tenga en cuenta pequeñas variaciones virtuales de tal movimiento completo con relación al movimiento real.

Con respecto al “movimiento del sistema entre los tiempos t_1 y t_2 ”, ¿qué es lo que se entiende por este? [7] La configuración instantánea de un sistema está determinado por sus coordenadas generalizadas $q_1 \dots q_n$, a este espacio se le suele llamar “espacio de configuración”. Cuando el sistema varíe con el tiempo, el punto que lo representa describirá, una “trayectoria del movimiento del sistema”. Así “movimiento del sistema”, se refiere al movimiento del punto definido a lo largo de esta trayectoria en el sistema de configuración. Con respecto al tiempo podemos decir, que este se puede considerar como un parámetro de la curva que representa sus variaciones, es decir, para cada punto de la trayectoria se le asocia uno o más valores del tiempo.

Para resumir podemos decir que, en la trayectoria del movimiento en el espacio de configuración, cada uno de sus puntos representa la configuración del sistema completo en un instante dado.

De esta forma el Principio integral de Hamilton para sistemas conservativos [7]:

El movimiento del sistema entre los tiempos t_1 y t_2 es tal que la integral:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (3.2.1)$$

Donde $L = T - V$, es un extremal respecto de la trayectoria del movimiento, es decir, que en $\delta q_i(t_1) = 0$ y $\delta q_i(t_2) = 0$ son extremos fijados.

En palabras más simples, nos quiere decir que de todas las trayectorias que uno se puede imaginar, que puede describir el punto representativo entre los tiempos t_1 y t_2 , describirá aquella que maximiza o minimiza la integral (3.2.1).

Podemos generalizar este principio a campos físicos ϕ , en n-dimensiones, así el principio integral de Hamilton queda:

$$S[\phi_a] = \int_R \mathfrak{L}(\phi_a(x), \partial \phi_a(x)) d^n x \quad (3.2.2)$$

donde \mathfrak{L} se llama densidad lagrangiana, R es el contorno del dominio de esta donde se va a integrar, aquí $\delta \phi_a = 0$.

En el caso de la Teoría de la Relatividad General ocuparemos la acción de Einstein-Hilbert:

$$S_G = \int d^d x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2\kappa} R + \mathfrak{L}_m \right) \quad (3.2.3)$$

donde R es el escalar de curvatura, \mathfrak{L}_m es un término de materia y $\kappa = 8\pi G/c^4$.

3.3 Acción para Delta Gravity

Al igual que en el caso de la Relatividad General el modelo Delta Gravity posee una acción propia, derivada de la primera. A continuación les mostraremos cual es. Comenzamos con nuestra densidad lagrangiana \mathfrak{L} y su variación con respecto a ϕ :

$$\delta\mathfrak{L} = \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\phi} \delta\phi + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta(\partial_a\phi)} \delta(\partial_a\phi) \quad (3.3.1)$$

definiremos $\delta\phi = \tilde{\phi}$ un campo auxiliar. Así nuestra variación quedará:

$$\delta\mathfrak{L} = \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\phi} \tilde{\phi} + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta(\partial_a\phi)} \partial_a\tilde{\phi} \quad (3.3.2)$$

En este punto podemos definir una nueva acción [8]:

$$S = \int d^d x [\mathfrak{L}_0 + \mathfrak{L}'] = \int d^d x \left[\mathfrak{L}_0 + \kappa_2 \left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\phi} - \partial_a \left[\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta(\partial_a\phi)} \right] \right) \tilde{\phi} \right] \quad (3.3.3)$$

Esto lo podemos hacer ya que podemos hacer una nueva invariante tal que:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + \mathfrak{L}'$$

donde $\mathfrak{L}' = \kappa_2 \delta\mathfrak{L}_0$, con κ_2 por determinar. Además \mathfrak{L}_0 es la acción clásica de la Relatividad General.

Este procedimiento se puede realizar en general [6], y lo podemos ocupar para cualquier Lagrangiano, y obtenemos resultados similares, aún cuando no haya simetrías de Gauge.

Sin embargo, en el resto de esta tesis solo ocuparemos la forma efectiva de esta nueva acción [8] dada en (3.3.3), esta será:

$$S = \int d^d x \left[\mathfrak{L}_0 + \kappa_2 \left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \phi} \right) \tilde{\phi} \right] \quad (3.3.4)$$

Como \mathfrak{L}_0 es la acción clásica definimos nuestro campos como $\phi \rightarrow g^{\alpha\beta}$ y el campo auxiliar como $\delta\phi \rightarrow \tilde{\phi} \rightarrow \tilde{g}^{\alpha\beta}$. Considerando estas cosas tenemos que la acción para Delta Gravity es:

$$S_{DG} = \int d^d x \sqrt{-g} \left[\left(-\frac{1}{2\kappa} R + \mathfrak{L}_m \right) + \kappa_2 \left\{ \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \kappa T_{\mu\nu} \right\} \tilde{g}^{\mu\nu} \right] \quad (3.3.5)$$

donde hemos considerador que [1][3]:

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} - (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda} \quad (3.3.6)$$

$$\frac{1}{2} \mathfrak{L}_m g^{\mu\nu} + \frac{\delta \mathfrak{L}_m}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \quad (3.3.7)$$

3.4 Ecuaciones para $g_{\mu\nu}$ y $\tilde{g}_{\mu\nu}$

Ahora estudiaremos las ecuaciones para $g^{\mu\nu}$ y $\tilde{g}^{\mu\nu}$. Para $g^{\mu\nu}$ encontraremos las famosas ecuaciones de Einstein. Así que variamos la acción de Relatividad General (3.2.3) obteniendo:

$$\delta S_G = \int d^d x \left[\delta \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2\kappa} R + \mathfrak{L}_m \right) + \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2\kappa} \delta R + \delta \mathfrak{L}_m \right) \right] \quad (3.4.1)$$

Veremos cada variación [1]:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \quad (3.4.2)$$

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = -g^{\sigma\mu}g^{\nu\rho}\delta g_{\sigma\rho}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \quad (3.4.3)$$

donde hemos ocupados que $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\sigma\mu}g^{\nu\rho}\delta g_{\sigma\rho}$. De esta forma usando (3.4.2), (3.4.3), y (3.3.6) obtendremos:

$$\begin{aligned} \delta S_G = \int d^d x \sqrt{-g} \left[-\frac{g^{\mu\nu}}{4\kappa} R + \frac{R^{\mu\nu}}{2\kappa} + \left(\frac{1}{2} \mathfrak{L}_m g^{\mu\nu} + \frac{\delta \mathfrak{L}_m}{\delta g_{\mu\nu}} \right) \right] \delta g_{\mu\nu} \\ - \int d^d x \frac{1}{2\kappa} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left[(\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{; \nu} - (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{; \lambda} \right] \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

El último término los podemos eliminar debido a que:

$$\begin{aligned} - \int d^d x \frac{1}{2\kappa} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left[(\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{; \nu} - (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{; \lambda} \right] = \\ - \int d^d x \frac{1}{2\kappa} \left[(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{; \nu} - (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{; \lambda} \right] \end{aligned}$$

Donde hemos usado que $(V^\nu)_{; \nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} V^\nu)_{; \nu}$ y cuando integramos en todo el espacio esta desaparece [1]. Así que finalmente usando (3.3.7) en (3.4.3) obtenemos:

$$\delta S_G = \int d^d x \sqrt{-g} \left[-\frac{g^{\mu\nu}}{4\kappa} R + \frac{R^{\mu\nu}}{2\kappa} + \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} \quad (3.4.4)$$

De esta forma la ecuación para $g^{\mu\nu}$, que es la ecuación de Einstein nos queda:

$$R^{\mu\nu} - \frac{g^{\mu\nu}}{2}R + \kappa T^{\mu\nu} = 0 \quad (3.4.5)$$

Ahora veremos la ecuación para $\tilde{g}^{\mu\nu}$ donde, esta vez, tomaremos la ecuación (3.3.5) que es la acción Delta Gravity. Si nos damos cuenta vemos que el primer término de esa acción son las ecuaciones de Einstein, así que ella se hace cero, con ello solo tomaremos en cuenta la segunda parte:

$$\delta S_{DG} = \kappa_2 \int d^d x \sqrt{-g} \left[\left(\delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta g_{\mu\nu} R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta R \right) + \kappa \delta T_{\mu\nu} \right] \tilde{g}^{\mu\nu} \quad (3.4.6)$$

haciendo las variaciones correspondientes obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta S_{DG} = \kappa_2 \int d^d x \sqrt{-g} & \left[(\delta \Gamma_{\mu\rho}^{\rho})_{,\nu} - (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho})_{,\rho} - \frac{1}{2} R \delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma} - g^{\alpha\sigma} \delta \Gamma_{\rho\alpha}^{\rho})_{,\sigma} \right] \tilde{g}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Arreglando un poco la expresión (ocupando la propiedad usada en (3.3.4)) podemos obtener la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \delta S_{DG} = \kappa_2 \int d^d x \sqrt{-g} & \left[-(\delta \Gamma_{\mu\rho}^{\rho}) \nabla_{\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} + (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) \nabla_{\rho} \tilde{g}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \delta g_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma} - g^{\alpha\sigma} \delta \Gamma_{\rho\alpha}^{\rho}) \nabla_{\sigma} \tilde{g}^{\mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Ocuparemos las siguientes propiedades [10] $\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\mu}(g_{\alpha\mu,\beta} + g_{\beta\mu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu})$ y $\Gamma_{\mu\rho}^{\rho} = (\log\sqrt{-g})_{,\mu}$, además usaremos $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\sigma\mu}g^{\nu\rho}\delta g_{\sigma\rho}$; con todo esto podemos dejar (3.4.8) como:

$$\begin{aligned} \delta S_{DG} = \kappa_2 \int d^d x \left\{ -\sqrt{-g}(\delta\Gamma_{\mu\rho}^{\rho})\nabla_{\nu}\tilde{g}^{\mu\nu} - \sqrt{-g}(g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\beta\mu}^{\sigma}\nabla_{\sigma}\tilde{g}^{\mu\nu} - (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho})\nabla_{\rho}\tilde{g}^{\mu\nu}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}g^{\alpha\sigma}\delta\Gamma_{\rho\alpha}^{\rho}\nabla_{\sigma}\tilde{g}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(R\tilde{g}^{\nu\sigma} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu}R^{\nu\sigma}\right)\delta g_{\nu\sigma} \right\} \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

El primer término se convierte en:

$$\int d^d x \sqrt{-g}(\delta\Gamma_{\mu\rho}^{\rho})\nabla_{\nu}\tilde{g}^{\mu\nu} = - \int d^d x (\sqrt{-g}\nabla_{\nu}\tilde{g}^{\mu\nu})_{,\mu} (\delta(\log\sqrt{-g})) \quad (3.4.10)$$

El tercer término se puede escribir como:

$$\int d^d x \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}g^{\alpha\sigma}\delta\Gamma_{\rho\alpha}^{\rho}\nabla_{\sigma}\tilde{g}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \int d^d x (\sqrt{-g}g^{\alpha\sigma}g_{\mu\nu}\nabla_{\sigma}\tilde{g}^{\mu\nu})_{,\alpha} (\delta(\log\sqrt{-g})) \quad (3.4.11)$$

El cuarto término no le haremos nada, así que nos fijaremos en el segundo término, en este haremos los cambios $\rho \rightarrow \sigma, \mu \rightarrow \beta, \nu \rightarrow \alpha$ para la segunda parte de este término y obtendremos:

$$\int d^d x \sqrt{-g}\delta\Gamma_{\beta\mu}^{\sigma}(g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_{\sigma}\tilde{g}^{\mu\nu} - \nabla_{\sigma}\tilde{g}^{\beta\alpha}) \quad (3.4.12)$$

Al término entre paréntesis lo llamaremos $K_{\sigma}^{\alpha\beta}$, de esta forma usando su simetricidad y que:

$$\int d^d x \sqrt{-g} K^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\gamma \delta g_{\alpha\beta} = - \int d^d x \sqrt{-g} K^{\alpha\beta\gamma}{}_{;\gamma} \delta g_{\alpha\beta} \quad (3.4.13)$$

Manipulando la última expresión (3.4.12) podemos obtener:

$$- \int d^d x \sqrt{-g} \frac{1}{2} (K^{\alpha\beta\gamma} + K^{\gamma\beta\alpha} - K^{\alpha\gamma\beta})_{;\beta} \delta g_{\alpha\gamma} \quad (3.4.14)$$

con

$$\frac{1}{2} (K^{\alpha\beta\gamma} + K^{\gamma\beta\alpha} - K^{\alpha\gamma\beta})_{;\beta} = S^{\alpha\gamma} \quad (3.4.15)$$

Así solo nos queda usar [3]:

$$g_{\alpha\sigma} \delta g^{\sigma\mu} = -\delta g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\mu}; \delta g^{\beta\mu} = -g^{\beta\alpha} \delta g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\mu} \quad (3.4.16)$$

$$\delta(\log \sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} g_{\mu\beta} \delta g^{\mu\beta} = \frac{1}{2} g_{\mu\beta} g^{\beta\gamma} \delta g_{\gamma\sigma} g^{\sigma\mu} = \frac{1}{2} \delta g_{\gamma\sigma} g^{\sigma\gamma} \quad (3.4.17)$$

Usando todo esto en (3.4.9) nos queda finalmente:

$$\begin{aligned} \delta S_{DG} = \kappa_2 \int d^d x \sqrt{-g} \left\{ S^{\sigma\gamma} + \frac{1}{2} (R \tilde{g}^{\gamma\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} R^{\sigma\gamma}) \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{-g}} g^{\sigma\gamma} (\sqrt{-g} g^{\alpha\sigma} g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \tilde{g}^{\mu\nu})_{;\alpha} - \frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \nabla_\nu \tilde{g}^{\mu\nu})_{;\mu} \right. \\ \left. - \kappa \frac{\delta T_{\mu\nu}}{\delta g_{\gamma\sigma}} \tilde{g}^{\mu\nu} \right\} \delta g_{\gamma\sigma} = 0 \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

De aquí se deduce que la ecuación de movimiento es:

$$S^{\sigma\gamma} + \frac{1}{2} \left(R \tilde{g}^{\gamma\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} R^{\sigma\gamma} \right) + \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{-g}} g^{\sigma\gamma} (\sqrt{-g} g^{\alpha\sigma} g_{\mu\nu} \nabla_{\sigma} \tilde{g}^{\mu\nu})_{,\alpha} - \frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \nabla_{\nu} \tilde{g}^{\mu\nu})_{,\mu} - \kappa \frac{\delta T_{\mu\nu}}{\delta g_{\gamma\sigma}} \tilde{g}^{\mu\nu} = 0$$

(3.4.19)

3.5 Ecuaciones de movimiento para partículas

En todo modelo una de las cosas más importante son las ecuaciones de movimiento, ya que estas son la esencia de la descripción de toda la física que nos puede entregar el modelo. En este modelo no está exento de ellas, por supuesto, y las obtendremos en las siguientes líneas.

Cabe destacar que en este modelo ocuparemos otra acción, con la finalidad de incluir partículas con y sin masa [4]. Pero antes, discutiremos un poco este proceso.

La acción de una partícula en un campo gravitatorio es (3.5.1) y su variación con respecto a x^{μ} nos da la ecuación de la geodésica:

$$\frac{1}{2\kappa} \int d^d y \sqrt{-g} R - m \int dt \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}} \quad (3.5.1)$$

En cambio en el modelo Delta Gravity tenemos un nuevo término:

$$\frac{1}{2\kappa} \int d^d y \sqrt{-g} R - m \int dt \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}} + \kappa_2 \int d^d y \sqrt{-g} (G_{\mu\nu} + \kappa T_{\mu\nu}) \tilde{g}^{\mu\nu} \quad (3.5.2)$$

con:

$$T_{\mu\nu}(y) = \frac{m}{\sqrt{-g}} \int dt \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu}{\sqrt{-g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}} \delta(y - x)$$

esta última según la definición de [1]. De aquí obtenemos la acción para una partícula en un campo gravitatorio [4], esta es:

$$S_p = m \int dt \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu}{\sqrt{-g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}} (g^{\mu\nu} + \kappa'_2 \tilde{g}^{\mu\nu}) = m \int dt \frac{\mathfrak{g}_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}{\sqrt{-g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}} \quad (3.5.3)$$

Donde $\kappa'_2 = \kappa_2 \kappa$ sin dimensiones. Sin embargo, en este modelo, con la idea de incluir las partículas sin masas, ocuparemos la siguiente acción:

$$\mathcal{L} = \int dt \frac{1}{2} \left\{ v m^2 \frac{\mathfrak{g}_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} - \frac{1}{v} \mathfrak{g}_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right\} \quad (3.5.4)$$

con:

$$K = \mathfrak{g}_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

notar que si obtenemos la ecuación para v , y la reemplazamos se reduce a (3.5.3). Una cosa importante de esta nueva acción es que es invariante bajo reparametrización [4]. Usamos la libertad de Gauge y fijamos $v = 1$. Ocupando la ecuación para v , obtenemos:

$$m^2 \frac{K}{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} + v^{-2} K = 0 \quad (3.5.5)$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} = v^{-2}, \quad (K \neq 0)$$

$$v = -\frac{\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}}{m}, \quad m \neq 0$$

Para partículas con masa elegimos $mdt = d\tau$ y así el lagrangiano se convierte en:

$$\mathcal{L}_1 = m \int d\tau \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mathfrak{g}_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} - \mathfrak{g}_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \right\} \quad (3.5.6)$$

con:

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -1 \quad (3.5.7)$$

En cambio, para partículas sin masa el lagrangiano es:

$$\mathcal{L}_0 = - \int dt \frac{1}{2} \left\{ \mathfrak{g}_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \right\} \quad (3.5.8)$$

con:

$$K = \mathfrak{g}_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0 \quad (3.5.9)$$

Ahora veamos las ecuaciones de movimiento. Si variamos (3.5.6) con respecto a x^μ obtendremos la ecuación de movimiento para partículas con masa:

$$\frac{d \left(\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \mathfrak{g}_{\mu\nu} \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta} + 2\dot{x}^\beta \mathfrak{g}_{\alpha\beta} \right)}{d\tau} - \frac{1}{2} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \mathfrak{g}_{\mu\nu} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma g_{\beta\gamma,\alpha} - \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \mathfrak{g}_{\mu\nu,\alpha} = 0 \quad (3.5.10)$$

Podemos reagrupar la ecuación (3.5.7) y dejarla de una manera más simple, que es la siguiente:

$$M_{\nu\mu}\ddot{x}^\mu + \mathfrak{G}_{\alpha\beta\nu}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + N_{\alpha\beta\mu\lambda\nu}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\dot{x}^\mu\dot{x}^\lambda = 0 \quad (3.5.11)$$

donde:

$$M_{\nu\mu} = \mathfrak{g}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}\mathfrak{g}_{\alpha\beta} + g_{\beta\nu}\mathfrak{g}_{\alpha\mu} + g_{\alpha\nu}\mathfrak{g}_{\beta\mu}\right)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta \quad (3.5.12)$$

$$N_{\alpha\beta\mu\lambda\nu} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu,\lambda}\mathfrak{g}_{\alpha\beta} + g_{\mu\nu}\mathfrak{g}_{\alpha\beta,\lambda} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\nu}\mathfrak{g}_{\mu\lambda}\right) \quad (3.5.13)$$

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta\nu} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{g}_{\alpha\nu,\beta} + \mathfrak{g}_{\beta\nu,\alpha} - \mathfrak{g}_{\alpha\beta,\nu}\right) \quad (3.5.14)$$

Con este mismo espíritu buscaremos la ecuación de movimiento para las partículas sin masa, para ello debemos variar la ecuación (3.5.6) con respecto a x^μ y obtendremos:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\mathfrak{g}_{\mu\nu} + \tilde{\mathfrak{G}}_{\lambda\sigma\nu}\dot{x}^\lambda\dot{x}^\sigma = 0 \quad (3.5.15)$$

Como vemos esta última ecuación (3.5.10) es similar a la geodésica que se obtiene en la Teoría de Relatividad de Einstein. Sin embargo, la ecuación de movimiento para partículas con masa (3.5.9) no es una geodésica.

Algo muy importante de destacar es que si nos fijamos en (3.5.5) con el Gauge fijado podemos obtener directamente las condiciones para K que se han usado en ambos lagrangiano.

Capítulo 4

Test de Delta Gravity

En el presente capítulo desarrollaremos los problemas de Relatividad General pero con el modelo Delta Gravity, la idea de hacer esto es encontrar algún tipo de cotas para las constantes b y κ'_2 para el modelo. En primer lugar comenzaremos estudiando la deflexión de la luz al pasar por un cuerpo masivo, no sin antes presentar el tensor métrico auxiliar $\tilde{g}_{\mu\nu}$.

4.1 Métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$

Debemos hallar los valores de la métrica de $\tilde{g}_{\mu\nu}$, que la plantearemos como:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -C(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E(r)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E(r)r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Así utilizando la ecuación de movimiento para $\tilde{g}_{\mu\nu}$ (3.4.19) vemos que solo hay tres que son linealmente independientes [11], estas son para las coordenadas t , r , y las de ϕ y θ se repiten convirtiéndose en una sola.

Para resolver estas ecuaciones consideraremos que estamos fuera de la fuente y que tenemos rho constante. También podemos considerar $E(r) = 1$ para poder recuperar la simetría esférica cuando queramos recuperar la asintoticidad de Minkowski en $r \rightarrow \infty$.

Para resolver estas ecuaciones utilizamos Maxima [archivo maxima] y sus resultados se muestran a continuación:

$$C(r) = 1 - \frac{a}{r} + \frac{ab}{r}$$

$$D(r) = \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} - \frac{ab}{r \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2}$$

Donde b es una constante a determinar (en esta tesis la acotaremos). De esta forma la métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ nos quedará:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{a}{r} + \frac{ab}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} - \frac{ab}{r \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.1.1)$$

4.2 Deflexión de la luz al pasar por un cuerpo masivo con modelo Delta Gravity.

Para resolver este problema seguiremos la misma idea del Capítulo 2 para la Deflexión de la luz al pasar por un cuerpo masivo (Cap. 2.3). Pero primero buscaremos las cuatro ecuaciones de movimiento para una partícula sin masa, que se deducen de (3.5.10), para cada coordenada. Estas son:

$$0 = \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{(\kappa'_2 C(r), r + B(r), r)}{B(r) + \kappa'_2 C(r)} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \quad (4.2.1)$$

$$0 = \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{(\kappa'_2 C(r), r + B(r), r)}{(A(r) + \kappa'_2 D(r))} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{(\kappa'_2 D(r), r + A(r), r)}{(A(r) + \kappa'_2 D(r))} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{r(\kappa'_2 + 1)}{A(r) + \kappa'_2 D(r)} \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - \frac{r \sin^2(\theta)(\kappa'_2 + 1)}{A(r) + \kappa'_2 D(r)} \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \quad (4.2.2)$$

$$0 = \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \quad (4.2.3)$$

$$0 = \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + 2 \cot(\theta) \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (4.2.4)$$

Como vemos estas ecuaciones se parecen mucho a (2.2.4), (2.2.5), (2.2.6) y (2.2.7) y si consideramos $b \rightarrow 0$ estas ((4.2.1), (4.2.2), (4.2.3) y (4.2.4)) vuelven a las anteriores, por ende el modelo funciona.

En este punto cabe destacar varias cosas, a lo largo de esta tesis siempre iremos verificando que cuando $b \rightarrow 0$ nos devuelvo los términos clásico, ya que es una de las características importantes de este modelo. Otra acotación que consideraremos es que de aquí en adelante, los términos $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$ y $D(r)$ los

consideraremos como A , B , C y D . También definiremos, por comodidad y en consideración que las ecuaciones se entiendan, las derivadas sobre estas variables como:

$$\frac{dV(r)}{dr} = V_{,r}$$

Donde $V(r)$ y V se refieren a las variables A , B , C y D . De esta forma estamos listos para proceder con la resolución del problema (Cap. 4.2).

Al igual que en la teoría clásica consideraremos que el movimiento se realizará en un plano, con ello $\theta = \frac{\pi}{2}$ y así las ecuaciones se reducen a tres:

$$0 = \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{(\kappa'_{,2} C_{,r} + B_{,r})}{B + \kappa'_{,2} C} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \quad (4.2.5)$$

$$0 = \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{(\kappa'_{,2} C_{,r} + B_{,r})}{(A + \kappa'_{,2} D)} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{(\kappa'_{,2} D_{,r} + A_{,r})}{(A + \kappa'_{,2} D)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{r(\kappa'_{,2} + 1)}{A + \kappa'_{,2} D} \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \quad (4.2.6)$$

$$0 = \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \quad (4.2.7)$$

En esta formulación también podemos encontrar constantes de movimiento. Si nos damos cuenta de (4.2.7) obtenemos la misma constante de movimiento que para el caso clásico, es decir:

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = J \quad (4.2.8)$$

Ahora usaremos (4.2.5) para encontrar la otra constante de movimiento. Si dividimos (4.2.5) por $dt/d\tau$ podemos obtener:

$$0 = \frac{\ddot{x}^t}{\dot{x}^t} + \frac{(\kappa'_2 C_{,r} + B_{,r})}{(B + \kappa'_2 C)} \dot{x}^r$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{d\tau} (\ln(\dot{x}^t) + \ln(B + \kappa'_2 C))$$

Así que obtenemos nuestra constante de movimiento como:

$$C' = \dot{x}^t (B + \kappa'_2 C)$$

Para determinar C' consideramos $r \rightarrow \infty$ y $b \rightarrow 0$, estos ya que en ambos extremos debe comportarse clásicamente. De esta forma obtenemos que nuestra constante es:

$$C' = (\kappa'_2 + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{\kappa'_2 + 1}{B + \kappa'_2 C} = \frac{dt}{d\tau} \quad (4.2.9)$$

Ahora que tenemos estas dos ecuaciones de movimiento (4.2.8) y (4.2.9) las podemos reemplazar en (4.2.6) y obtener una ecuación de φ en función de r , al igual que se hizo en Cap. 2.3; de esta forma nos queda:

$$0 = \ddot{x}^r + \frac{1}{2} \frac{(\kappa'_2 C_{,r} + B_{,r})}{(A + \kappa'_2 D)} \frac{(\kappa'_2 + 1)^2}{(B + \kappa'_2 C)^2} + \frac{1}{2} \frac{(\kappa'_2 D_{,r} + A_{,r})}{(A + \kappa'_2 D)} (\dot{x}^r)^2 - \frac{(\kappa'_2 + 1) J^2}{A + \kappa'_2 D r^3}$$

$$(4.2.10)$$

Ahora si multiplicamos (4.2.10) por $2(A + \kappa'_2 D)\dot{x}^r$ y reagrupamos los términos obtenemos una nueva constante de movimiento al igual que en (2.2.15):

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left\{ (A + \kappa'_2 D)(\dot{x}^r)^2 + \frac{(\kappa'_2 + 1) J^2}{r^2} - \frac{(\kappa'_2 + 1)^2}{(B + \kappa'_2 C)} \right\}$$

$$\Rightarrow -Q = (A + \kappa'_2 D)(\dot{x}^r)^2 + \frac{(\kappa'_2 + 1)}{r^2} J^2 - \frac{(\kappa'_2 + 1)^2}{(B + \kappa'_2 C)} \quad (4.2.11)$$

Con Q nuestra nueva constante. Con $b \rightarrow 0$ recobramos la ecuación (2.2.15), pero ahora $Q = 1/(\kappa'_2 + 1)$. También debemos usar (3.5.9) para ver los valores de Q ; en el caso de partículas sin masa, que es nuestro caso $Q = 0$.

De esta forma podemos obtener φ en función de r como:

$$\int d\varphi = \pm \int \frac{(A + \kappa'_2 D)^{1/2} dr}{r^2 \left[\frac{(\kappa'_2 + 1)^2}{J^2(B + \kappa'_2 C)} - \frac{(\kappa'_2 + 1)}{r^2} \right]^{1/2}} \quad (4.2.12)$$

Si consideramos la Figura 2.3.1 y usamos r_0 es la distancia más próxima al Sol, por lo mismo motivos que en Cap. 2.3, así obtenemos J en función de r_0 .

$$J^2 = \frac{r_0^2 (\kappa'_2 + 1)}{(B_0 + \kappa'_2 C_0)}$$

Donde B_0 y C_0 son $B(r_0)$ y $C(r_0)$. Podemos verificar que si $b \rightarrow 0$ nos devuelve el valor clásico, solo que tomamos el resguardo de hacer $E = 0$. Siguiendo el procedimiento donde reemplazamos J^2 obtenemos:

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = \int_r^\infty \frac{(A + \kappa'_2 D)^{1/2} dr}{r \left[(\kappa'_2 + 1) \left(\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \frac{(B_0 + \kappa'_2 C_0)}{(B + \kappa'_2 C)} - 1 \right) \right]^{1/2}} \quad (4.2.13)$$

Al igual que antes ocuparemos los valores para $A(r)$, $B(r)$ y $C(r)$:

$$A(r) = 1 + \frac{2MG}{r}$$

$$B(r) = 1 - \frac{2MG}{r}$$

$$C(r) = 1 - \frac{a}{r} + \frac{ab}{r}$$

De esta forma si consideramos que $b\kappa'_2/(\kappa'_2 + 1)$ el argumento de la raíz queda de la siguiente forma:

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \left(\frac{B_0 + \kappa'_2 C_0}{B + \kappa'_2 C}\right) - 1 = \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1\right] \left[1 - 2MG \left(1 - \frac{b\kappa'_2}{\kappa'_2 + 1}\right) \frac{r}{r_0(r + r_0)}\right]$$

(4.2.14)

Ahora veamos $A + \kappa'_2 D$ usando las aproximaciones este nos queda:

$$A + \kappa'_2 D = (\kappa'_2 + 1) \left(1 + \frac{2MG}{r} \left(1 - \frac{b\kappa'_2}{\kappa'_2 + 1}\right)\right)$$

(4.2.15)

Así la ecuación (4.2.13) nos queda:

$$\begin{aligned} \varphi(r) - \varphi_\infty = & \int_r^\infty \frac{dr}{r \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1\right]^{1/2}} \left(1 + \frac{MG}{r} \left(1 - \frac{b\kappa'_2}{\kappa'_2 + 1}\right)\right) \\ & + \frac{MGr}{r_0(r + r_0)} \left(1 - \frac{b\kappa'_2}{\kappa'_2 + 1}\right) \end{aligned}$$

(4.2.16)

Si en (4.2.16) $b \rightarrow 0$ nos devuelve la ecuación clásica, con lo que sigue estando correcto el modelo. Ahora solo queda integrar (4.2.16):

$$\begin{aligned}\varphi(r) - \varphi_\infty = \sin^{-1}\left(\frac{r_0}{r}\right) + MG \left(1 - \frac{b\kappa'_2}{\kappa'_2 + 1}\right) \left(\frac{r_0^2 - r^2}{r_0 r \sqrt{r^2 - r_0^2}} + \frac{1}{r_0}\right) \\ + MG \left(1 - \frac{b\kappa'_2}{\kappa'_2 + 1}\right) \left(\frac{r_0 - r}{r_0 \sqrt{r^2 - r_0^2}} + \frac{1}{r_0}\right)\end{aligned}\quad (4.2.17)$$

Si reordenamos esta última expresión podemos obtener:

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = \sin^{-1}\left(\frac{r_0}{r}\right) + \frac{MG}{r_0} \left(1 - \frac{b\kappa'_2}{\kappa'_2 + 1}\right) \left[2 - \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2} - \sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}}\right]\quad (4.2.18)$$

En este punto ocupamos el mismo argumento que en el capítulo 2.3 para obtener (2.3.10) ya que la partícula describirá el mismo movimiento. Entonces tenemos:

$$\Delta\varphi = 2|\varphi(r_0) - \varphi_\infty| - \pi\quad (4.2.19)$$

Así obtenemos:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{DG} = 2 \left| \frac{\pi}{2} + \frac{2MG}{r_0} \left(1 - \frac{b\kappa'_2}{\kappa'_2 + 1}\right) \right| - \pi \\ \Rightarrow \Delta\varphi_{DG} = \frac{4MG}{r_0} \left(1 - \frac{b\kappa'_2}{\kappa'_2 + 1}\right)\end{aligned}\quad (4.2.20)$$

De esta última ecuación (4.2.20) vemos que si $b \rightarrow 0$ volvemos a la ecuación (2.3.11) con ello recuperamos la ecuación clásica para este problema. Como podemos apreciar este modelo es consistente en todo momento y en este punto podemos ocupar (4.2.20) para poder acotar b . Considerando todos los valores de las constantes [ver anexo] obtenemos un valor para $\Delta\varphi_{DG}$:

$$\Delta\varphi_{DG} = 1.753'' \left(1 - \frac{b\kappa'_2}{\kappa'_2 + 1} \right) \quad (4.2.21)$$

Consideraremos como valor experimental $\Delta\varphi_E = 1.761'' \pm 0.016''$ [13] de esta forma podemos pensar que $|1.753'' b\kappa'_2/(\kappa'_2 + 1)|$ no puede superar la incerteza, pues si lo hace le está restando o aumentando al valor teórico, así que usamos esto para acotar las constantes:

$$\Rightarrow \left| 1.753'' \frac{b\kappa'_2}{\kappa'_2 + 1} \right| < 0.016''$$

Con ello obtenemos que:

$$|b\kappa'_2| < 0.009127$$

Así la cota representa 0.5206 % del valor teórico

4.3 Precesión del perihelio de Mercurio con el modelo Delta Gravity.

En el caso de este problema si vemos la ecuación de movimiento para partículas con masa, vemos – y como dijimos anteriormente – que no es una geodésica, por ende no obtendremos tan fácil las ecuaciones de movimiento como en el caso anterior. Sin embargo, podemos manipular la expresión (3.5.11) para dejarla en algo más fácil de trabajar, ya que si hacemos un pequeño análisis, nos damos cuenta que lo que acompaña a \ddot{x}^μ no es diagonal ($M_{\nu\mu}$), así que trabajaremos en esta ecuación para que nos quede diagonal.

En primer lugar si tomamos el término (3.5.12) lo podemos manipular y dejar como:

$$\frac{1}{2} \left(g_{\beta\nu} \mathfrak{g}_{\alpha\mu} + g_{\alpha\nu} \mathfrak{g}_{\beta\mu} \right) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \ddot{x}^\mu + \left(\mathfrak{g}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathfrak{g}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right) \ddot{x}^\mu \quad (4.3.1)$$

De esta misma forma podemos tomar el término (3.5.13) y dejarlo como:

$$\frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\beta\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \mathfrak{g}_{\mu\lambda} \dot{x}^\mu \dot{x}^\lambda + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathfrak{g}_{\alpha\beta,\lambda} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\mu \dot{x}^\lambda \quad (4.3.2)$$

donde hemos tomado el primer término de (3.5.13) y usado que es simétrico, sumándole el último término de (3.5.13) nos da la primera expresión de (4.3.2). Así que nuestra nueva ecuación para partículas es:

$$\begin{aligned} & \left(\mathfrak{g}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathfrak{g}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right) \ddot{x}^\mu + \mathfrak{G}_{\alpha\beta\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\beta\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \mathfrak{g}_{\mu\lambda} \dot{x}^\mu \dot{x}^\lambda \\ & + \frac{1}{2} g_{\beta\nu} \mathfrak{g}_{\alpha\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \ddot{x}^\mu + \frac{1}{2} g_{\alpha\nu} \mathfrak{g}_{\beta\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \ddot{x}^\mu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathfrak{g}_{\alpha\beta,\lambda} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\mu \dot{x}^\lambda = 0 \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Los tres últimos términos los podemos resumir en:

$$\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \frac{d}{d\tau} \left(\mathfrak{g}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right)$$

donde también hemos usado la propiedad simétrica de los índices. De esta forma si llamamos $\bar{K} = \mathfrak{g}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$ (es lo mismo que en (3.5.4), la diferencia es que en este último más adelante ya habremos usado que $\theta = \pi/2$) nuestra ecuación para partículas con masa nos queda:

$$\left(\mathfrak{g}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\bar{K}\right)\dot{x}^\mu + \mathfrak{G}_{\alpha\beta\nu}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + \frac{1}{2}\Gamma_{\alpha\beta\nu}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\bar{K} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\frac{d}{d\tau}(\bar{K}) = 0 \quad (4.3.4)$$

Con esta última expresión podemos también encontrar constantes de movimiento al igual que la teoría clásica. Para ello veremos las ecuaciones para las coordenadas t y ϕ . En primer lugar veremos para t :

$$\left(\mathfrak{g}_{00} + \frac{1}{2}g_{00}\bar{K}\right)\dot{x}^0 + \mathfrak{G}_{\alpha\beta 0}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + \frac{1}{2}\Gamma_{\alpha\beta 0}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\bar{K} + \frac{1}{2}g_{00}\dot{x}^0\bar{K}_{,\tau} = 0 \quad (4.3.5)$$

Ocupando los valores para $\mathfrak{G}_{\alpha\beta 0}$ y $\Gamma_{\alpha\beta 0}$ podemos obtener

$$-\left((B + \kappa'_2 C) + \frac{1}{2}B\bar{K}\right)\dot{x}^0 - \left((B_{,r} + \kappa'_2 C_{,r}) + \frac{1}{2}B_{,r}\bar{K}\right)\dot{x}^1\dot{x}^0 - \frac{1}{2}B\dot{x}^0\bar{K}_{,\tau} = 0 \quad (4.3.6)$$

Ahora dividimos por \dot{x}^0 , nos queda:

$$\frac{\dot{x}^0}{\dot{x}^0} + \frac{\left((B_{,r} + \kappa'_2 C_{,r}) + B_{,r}\frac{\bar{K}}{2}\right)\dot{x}^1 + \frac{1}{2}B\bar{K}_{,\tau}}{\left((B + \kappa'_2 C) + \frac{1}{2}B\bar{K}\right)} = 0$$

De esta última ecuación la podemos escribir como:

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\ln\left(\dot{x}^0\left((B + \kappa'_2 C) + \frac{1}{2}B\bar{K}\right)\right)\right\} = 0$$

Así que de esta última expresión obtenemos nuestra constante de movimiento:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\tilde{C}}{(B + \kappa'_2 C) + \frac{1}{2} B \bar{K}} \quad (4.3.7)$$

Para poder obtener \tilde{C} consideraremos el extremo $r \rightarrow \infty$, obtenemos que:

$$\tilde{C} = \frac{\kappa'_2 + 1}{2}$$

Entonces ahora buscamos la otra constante de movimiento, para la coordenada φ , para ello buscamos la ecuación de movimiento:

$$\left(\mathfrak{g}_{33} + \frac{1}{2} g_{33} \bar{K} \right) \dot{x}^3 + \mathfrak{G}_{\alpha\beta 3} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\beta 3} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \bar{K} + \frac{1}{2} g_{33} \dot{x}^3 \bar{K}_{,\tau} = 0 \quad (4.3.8)$$

Si ocupamos lo valores de $\mathfrak{G}_{\alpha\beta 3}$ y $\Gamma_{\alpha\beta 3}$ y reagrupando los términos obtenemos la ecuación:

$$\left(r^2(1 + \kappa'_2) + \frac{1}{2} r^2 \bar{K} \right) \dot{x}^3 + \left(2r(1 + \kappa'_2) + \frac{1}{2} 2r \bar{K} \right) \dot{x}^1 \dot{x}^3 + \frac{1}{2} r^2 \dot{x}^3 \bar{K}_{,\tau} = 0 \quad (4.3.9)$$

Si dividimos por \dot{x}^3 y reagrupamos la ecuación (4.3.8) al igual que se hizo con la constante de movimiento anterior, obtenemos que:

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \ln \left(\dot{x}^3 \left(r^2(\kappa'_2 + 1) + \frac{1}{2} r^2 \bar{K} \right) \right) \right\} = 0$$

Así podemos obtener la ecuación de movimiento, que será:

$$\left(r^2(\kappa'_2 + 1) + \frac{1}{2}r^2\bar{K} \right) \frac{d\varphi}{d\tau} = \tilde{D}$$

Esta constante la definiremos como:

$$\tilde{D} = J \frac{(\kappa'_2 + 1)}{2} \quad (4.3.10)$$

Si hacemos $b \rightarrow 0$ recuperamos la ecuación clásica para el momento angular por unidad de masa (2.2.11). Además definiremos como $\bar{B} = (B + \kappa'_2 C)$ y $\bar{A} = (A + \kappa'_2 D)$.

Es necesario ahora encontrar \bar{K} , para ello usaremos una relación de auto consistencia. Usaremos (4.3.7) y (4.3.10) en (3.5.7) y también los valores de A , B , \bar{B} y \bar{A} , de esta forma obtendremos en función de \bar{K} y r , así de es esta forma usando la definición de \bar{K} podemos encontrarla en función de r (documento WxMaxima). La solución de esta está hecha con k'_2 a primer orden:

$$\begin{aligned} \bar{K} = & [(-abkr^2 + 2a^2bkr - a^3bk)J^2 + kr^5 - (3a - ab)kr^4 + 3a^2kr^3 - (a^3b \\ & + a^3)kr^2] \\ & / [(2abkr^2 - 4a^2bkr + 2a^3bk)J^2 + (-12k - 1)r^5 + ((36a \\ & - 4ab)k + 3a)r^4 + ((4a^2b - 36a^2)k - 3a^2)r^3 + (12a^3k \\ & + a^3)r^2] - 1 \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Ahora que ya hemos conseguido el valor para \bar{K} podemos seguir con nuestro cálculo, para ello buscaremos φ en función de r :

$$\frac{\dot{x}^\varphi}{\dot{x}^t}$$

de donde conseguimos que:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r^2 \left((\kappa'_2 + 1) + \frac{\bar{K}}{2} \right)} \left[\frac{A}{\frac{B}{J^2 \left(\bar{B} + \frac{B\bar{K}}{2} \right)^2} - \frac{1}{r^2 \left((\kappa'_2 + 1) + \frac{\bar{K}}{2} \right)^2} - \frac{4}{J^2 (\kappa'_2 + 1)^2}} \right]^{1/2} \quad (4.3.12)$$

Para acortar los cálculos y que se logren entender definiremos dos variables:

$$N = \bar{B} + \frac{B\bar{K}}{2} \quad (4.3.13)$$

$$M = (\kappa'_2 + 1) + \frac{\bar{K}}{2} \quad (4.3.14)$$

Seguiremos la misma dinámica que en el problema clásico (Cap. 2.4), ya que nos resultará mucho más directo ver que en cada proceso nos devuelve las ecuaciones clásicas. Entonces en (4.3.12) fijamos r_+ y r_- que son el afelio de la órbita. En el perihelio y el afelio la derivada de r con respecto a φ se anula ya que son los puntos máximos y mínimos respectivamente, de esta forma podremos definir dos de las constantes que aparecen en (4.3.12), estas son:

$$j^2 = \frac{\frac{B_+}{N_+^2} - \frac{B_-}{N_-^2}}{\frac{1}{r_+^2 M_+^2} - \frac{1}{r_-^2 M_-^2}} \quad (4.3.15)$$

$$\frac{4}{(\kappa'_2 + 1)^2} = \frac{\frac{r_+^2 M_+^2 B_+}{N_+^2} - \frac{r_-^2 M_-^2 B_-}{N_-^2}}{r_+^2 M_+^2 - r_-^2 M_-^2} \quad (4.3.16)$$

Así lo que debemos integrar será:

$$\int d\varphi = \int \frac{dr}{r^2 \left((\kappa'_2 + 1) + \frac{\bar{K}}{2} \right)} \times \left[\frac{A}{\frac{r_-^2 M_-^2 N_+^2 \left(\frac{B N_-^2}{N^2} - B_- \right) - r_+^2 M_+^2 N_-^2 \left(\frac{B N_+^2}{N^2} - B_+ \right)}{r_-^2 M_-^2 r_+^2 M_+^2 (N_-^2 B_+ - N_+^2 B_-)} - \frac{1}{r^2 M^2} \right]^{1/2} \quad (4.3.17)$$

El argumento de la raíz lo podemos manipular y dejar como:

$$\frac{r_-^2 M_-^2 N_+^2 \left(\frac{B N_-^2}{N^2} - B_- \right) - r_+^2 M_+^2 N_-^2 \left(\frac{B N_+^2}{N^2} - B_+ \right)}{r_-^2 M_-^2 r_+^2 M_+^2 (N_-^2 B_+ - N_+^2 B_-)} - \frac{1}{r^2 M^2} = C' \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \quad (4.3.18)$$

Para encontrar C' hace $r \rightarrow \infty$, de esta forma C' es:

$$\frac{\frac{r_+^2}{M_-^2} \left(\frac{4}{(\kappa'_2 + 1)^2} - \frac{B_+}{N_+^2} \right) - \frac{r_-^2}{M_+^2} \left(\frac{4}{(\kappa'_2 + 1)^2} - \frac{B_-}{N_-^2} \right)}{r_+ r_- \left(\frac{B_+}{N_+^2} - \frac{B_-}{N_-^2} \right)} = C' \quad (4.3.18)$$

Usaremos \bar{K} a segundo orden en r :

$$\bar{K}(r) = -\frac{11\kappa'_2 + 1}{10\kappa'_2 + 1} - \frac{abk}{r(22\kappa'_2 + 1)} - \frac{3a^2bk}{(34\kappa'_2 + 1)r^2} \quad (4.3.19)$$

Entonces ahora podemos encontrar N^{-2} y M^{-2} :

$$N^{-2} \simeq \frac{1}{H^2} \left(1 + \frac{2a}{r} \left(1 - \frac{bk'_2}{2H(22\kappa'_2 + 1)} \right) + \frac{a^2}{r^2} \left(3 - \frac{bk'_2}{H(110\kappa'_2 + 1)} \right) \right)$$

$$M^{-2} \simeq \frac{1}{H^2} \left(1 + \frac{abk'_2}{2Hr(22\kappa'_2 + 1)} + \frac{3a^2bk'_2}{r^2H(78\kappa'_2 + 1)} \right)$$

Donde $H = 11\kappa'_2 + 1/2(10\kappa'_2 + 1)$.

Utilizando todo esto podemos obtener C' como:

$$C' = \frac{1}{H^2} \left[1 - \frac{a}{l} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) + \frac{abk'_2}{H(22\kappa'_2 + 1)} \left(\frac{l(r_- + r_+) + ar_+r_-}{a(r_- + r_+) + lr_+r_-} \right) + \frac{2a^2bk'_2}{H(78\kappa'_2 + 1)} \left(\frac{l(r_-^3 - r_+^3) + a(r_-^2 - r_+^2)}{a(r_-^2 - r_+^2)r_+r_- + l(r_- - r_+)r_+^2r_-^2} \right) \right] \quad (4.3.20)$$

Consideraremos solo los dos primero términos de (4.3.20) ya que consideraremos en el denominador r a primer orden. Ahora que tenemos esto podemos concentrarnos en la integral (4.3.17) y utilizando \bar{K} encontramos que:

$$\varphi(r) - \varphi(r_-) = \frac{1}{C'^{1/2}H} \int \frac{dr}{r^2} \frac{\left(1 + \frac{z}{r} \right)}{\left[\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \right]^{1/2}} \quad (4.3.21)$$

donde $z = a/2 + (abk'_2)/(2H(22\kappa'_2 + 1))$. Si nos fijamos en (4.3.21) podemos resolver esta integral de la misma forma que en (2.4.10). Así obtenemos:

$$\varphi(\theta) - \varphi(r_-) = \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right) \left(\frac{a}{l} + z\right)\right) \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{z}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \cos(\theta) \quad (4.3.22)$$

De la misma forma que en el problema clásico para la precesión del perihelio de Mercurio aquí el cambio de ángulo vendrá dado por:

$$\Delta\varphi = 2|\varphi(r_+) - \varphi(r_-)| - 2\pi$$

donde r_+ significa que está en el afelio y por ende $\theta = \pi/2$ así que nos quedará:

$$\Delta\varphi = \frac{3a\pi}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right) \left(1 + \frac{bk'_2}{H(22k'_2 + 1)}\right)$$

Finalmente obtenemos que:

$$\Delta\varphi = \frac{6MG\pi}{L} \left(1 + \frac{2bk'_2}{(33k'_2 + 1)}\right)$$

Donde hemos ocupado la definición de *semi-latus rectum* (2.4.15). Como vemos si hacemos $b \rightarrow 0$ volvemos al resultado clásico (2.4.16).

El segundo término es el que nos ayudará a acotar bk'_2 . Para acotar estas constantes usaremos el valor observado de $43.11'' \pm 0.45''$ [14] [1], al igual que en el caso de la deflexión de luz obtendremos:

$$\Delta\varphi = 43.042'' \left(1 + \frac{2bk'_2}{(33k'_2 + 1)}\right)$$

$$\left| 43.042'' \frac{2bk'_2}{(33k'_2 + 1)} \right| < 0.45''$$

La cota no puede superar la incerteza, por ende la acotamos de la siguiente forma:

$$|bk'_2| < 0.00523$$

y representa un 0.012% del valor teórico.

Como comentario sobre este resultado y el de la deflexión de la luz usando el modelo Delta Gravity, podemos intuir que esta cota podría ser interpretada como una masa extra que ve el cuerpo masivo, en este caso el Sol, o sea, podemos interpretar que esta masa adicional que ve el cuerpo masivo podría ser materia oscura, es una de las interpretaciones que podemos intuir de estos resultados.

Lo más interesante es que ambos casos el orden de las cotas son consistentes una con otra, lo que realmente a mi parecer es un buen resultado y muy interesante a seguir un estudio mayor.

Capítulo 5

Conclusiones

Primero que todo debo decir que podemos sentirnos bastante conforme con los resultados obtenidos en general, ya que pudimos verificar claramente que el modelo Delta Gravity nos devuelve en cada momento las ecuaciones clásicas de la Relatividad General, este principio es la piedra angular del modelo y por ende muy importante su verificación, situación que está claramente demostrada.

Con respecto a los resultados de los dos test podemos decir en primer lugar que las cotas obtenidas $|bk'_2| < 0.00523$ y $|bk'_2| < 0.009127$ son del mismo orden de magnitud y consistentes entre sí, así que los consideramos como buenos resultados.

En según lugar, tratando de darle una interpretación a estas cotas y sobre todo a las constantes bk'_2 , podemos intuir personalmente que pudiese representar algún tipo de materia extra que el cuerpo siente, y de esta forma interpretarlo, posiblemente, como materia oscura.

Para finalizar, quiero expresar mi satisfacción con los resultados obtenidos y dejar el tema abierto a cualquier posible interpretación de estos.

Anexo 1

Masa solar:

$$M_{\odot} = 1.9891 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Radio solar:

$$r_{\odot} = 6.96 \cdot 10^5 \text{ km}$$

Constante gravitacional:

$$G = 6.693 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

Excentricidad de Mercurio:

$$e = 0.20563$$

Semieje Mayor Mercurio:

$$a = 57.9 \cdot 10^9 \text{ m}$$

Bibliografía

- [1] Steven Weinberg: *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, 1972.
- [2] Clifford M. Will: *Theory and Experiment in gravitational Physics*, 1993.
- [3] Charles W. Misner, Kips S. Thorne, John Archibald Wheeler: *Gravitation*, 1970.
- [4] J. Alfaro 2010: *Delta-gravity and Dark Energy*, arXiv:1006.5765 .
- [5] J. Alfaro 2008: *BV Gauge Theory*, arXiv:hep-th/9702060
- [6] J. Alfaro, P. Labraña: *Semi Classical Gauge Theory*, arXiv:hep-th/0104137v4
- [7] Helbert Goldstein: *Mecánica Clásica*, 1996 (Traducción por Cayetano E. De Salamanca)
- [8] J. Alfaro, P. Gonzales, R. Ávila 2011: *A Finite Quantum Gravity Field Theory Model*, arXiv:1009.2800
- [9] Robert M. Wald: *General Relativity*, 1984.
- [10] Bernard F. Schutz: *A first course in General Relativity, Second Edition*, 2009.

- [11] Camilo Miguel, 2010: *Delta Gravity Clásica Esféricamente Simétrica*. Tesis presentada para grado de Licenciatura en Física, P. Universida Católica de Chile.
- [12] Antonio Machado, *Proverbios y Cantares, extracto XXIX*.
- [13] E.B. Formalont and R.A. Sramek, *Measurements of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves in Agreement with General Relativity*, Physical Review Letter, **36**, 1475, (1976).
- [14] G.M. Clemence, *Review of Modern Physics*, **19**, (1947)

