

Pontificia Universidad Católica de Chile  
Facultad de Física

# RELACIÓN DE DISPERSIÓN NO COVARIANTE Y SUS EFECTOS EN COSMOLOGÍA

por

PABLO EMILIO GONZÁLEZ VILLARROEL.

Informe de Práctica de Licenciatura presentado  
a la Facultad de Física de la Pontificia Universidad Católica de Chile,  
para optar al grado académico de Licenciado en Astronomía

Profesor Guía : Dr. Jorge Alfaro Solis.  
Comisión Informante : Dr. Máximo Bañados Lira  
Dr. Jaime Hoyos Barrios

Santiago Chile  
Agosto, 2007

# Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi profesor guía, Jorge Alfaro, por su constante apoyo del cuál estaré eternamente agradecido, por todo el conocimiento que me entregó durante el desarrollo de este trabajo, pero sobre todo por la agradable acogida que recibí de él desde el principio.

Por supuesto, quiero agradecer a mi familia que ha estado conmigo todo este tiempo, sobre todo a mi madre que se ha esforzado en facilitarme mi trabajo. También quiero hacer un agradecimiento especial a mi pareja, Alexie Aracena, por lo paciente que ha sido conmigo y a mi pequeña hija, Catalina González, que, desde su nacimiento, me ha dado una gran felicidad.

También agradezco a la Pontificia Universidad Católica por darme todas las facilidades y el material para terminar mis estudios y para lo que viene más adelante.

Finalmente quería hacer una mención especial por el aporte de mis profesores evaluadores, Máximo Bañados y Jaime Hoyos, por ser una parte importante en la finalización de este trabajo. Gracias a Todos.

# Resumen

El origen del universo es una de las fuentes de estudio más importante de la física por sus características extremas y los misterios que la componen. En el último tiempo se han hecho muchos estudios que consideran la posibilidad de una violación a la Invarianza de Lorentz la que traería considerables efectos a altas energías. De ser así, este hecho podría abrir grandes posibilidades para explicar varias incógnitas en la cosmología. En este informe en particular, analizaremos a los neutrinos primordiales del **CNB** y la bariogénesis.

En el caso de los neutrinos, veremos que una violación de Lorentz no produce grandes modificaciones a su evolución en comparación al caso usual, pero por el contrario al agregarles masa, donde sus valores empezaron a determinarse hace pocos años, se produce una modificación para nada despreciable. Mostraremos que sus velocidades actuales, con respecto al sistema comóvil a la expansión del universo, son muy inferiores a la de la luz, las que tendrían si no tuviesen masa. Las velocidades obtenidas son  $90,6 \left[ \frac{Km}{s} \right]$ ,  $1,21 \left[ \frac{m}{s} \right]$  y  $1,74 \left[ \frac{Km}{s} \right]$  para el neutrino Electrónico, Muónico y Tauónico respectivamente. También veremos que la distribución de los neutrinos con respecto a la tierra se vuelve extremadamente compleja debido al movimiento planetario. Esto se debe a que la velocidad peculiar de la tierra supera por mucho a la velocidad de los neutrinos actualmente, dificultando aún más su detección y estudio. Esta predicción difiere totalmente del caso que si no tuviera masa, ya que, de ser así, daría un efecto mínimo igual al Momento Dipolar de los fotones del **CMB**.

En el caso de la bariogénesis, a diferencia de los neutrinos, se obtiene un efecto

importante que aparece por la violación de Lorentz. Este efecto depende de la temperatura directamente, la cual es muy alta en esta época. Con mediciones futuras, es posible utilizar este resultado como método de prueba a una violación de Lorentz y ver la posibilidad que el bosón que origina la bariogénesis explique, en parte, la materia oscura.

# Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	II
Índice general	IV
Introducción	VI
<b>1. Energía y Velocidad de los Neutrinos Primordiales.</b>	<b>1</b>
1.1. Función Distribución Fuera del Equilibrio . . . . .	2
1.2. Desacoplo Relativista . . . . .	3
1.2.1. Neutrinos aún Relativistas . . . . .	5
1.2.2. Neutrinos ya No-Relativistas . . . . .	6
1.3. Desacoplo No-Relativista . . . . .	7
1.4. Resultados Numéricos y Análisis . . . . .	8
<b>2. Distribución del CNB.</b>	<b>17</b>
2.1. Fotones . . . . .	22
2.2. Neutrinos . . . . .	23
2.2.1. Desacoplo No-Relativista . . . . .	24
2.2.2. Desacoplo Relativista . . . . .	25
2.3. Análisis . . . . .	26
<b>3. Bariogénesis Primordial.</b>	<b>30</b>
3.1. Zonas Permitidas de las Reacciones . . . . .	34

3.1.1.	$X \longrightarrow b_1 + b_2$	34
3.1.2.	$b_1 + b_2 \longrightarrow X$	35
3.2.	Factor de Colisión y Condición Fuera del Equilibrio	37
3.2.1.	Decaimiento de $X$	41
3.2.2.	Decaimiento Inverso de $X$	42
3.2.3.	Ecuación Diferencial	43
<b>Conclusiones</b>		<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>		<b>51</b>

# Introducción

Una de las grandes incógnitas de la humanidad es: ¿De donde venimos?, ¿Cuál es nuestro origen? La humanidad ha tratado de responder estas preguntas de muchas formas como, por ejemplo, el misticismo, la religión y la filosofía. Pero es en los últimos siglos en que el método científico ha predominado sobre el resto de las maneras de pensar para explicar el por qué de las cosas.

Desde este punto de vista, la respuesta a nuestras preguntas es el Big Bang<sup>1</sup>, que está compuesto de una infinidad de fenómenos que dieron origen al universo tal cual lo conocemos hoy y que ocurrieron en tan sólo unos pocos segundos, los primeros segundos, hace unos 13 mil millones de años, volviendo al Big- Bang tan atractivo como complejo. Dos de los fenómenos que la componen son el desacople de los neutrinos y la Bariogénesis, pero la incertidumbre que existe en ellos, como todo lo que sucede en esta época, es enorme.

Los neutrinos son partículas subatómicas de tipo fermiónico, sin carga y espín  $\frac{1}{2}$ . Algunos estudios recientes confirman que los neutrinos tienen masa<sup>2</sup> que, a pesar de ser pequeñas y una precisión muy baja, influye mucho en lo que es el Modelo

---

<sup>1</sup>Modelo que describe el desarrollo del Universo temprano y su forma.

<sup>2</sup>Lo que realmente es posible determinar son las diferencias de masa al cuadrado entre los tipos de neutrinos por no ser estados estables (oscilación de neutrinos)

Estándar de Física de Partículas (SM)<sup>3</sup>. Uno de los efectos más importantes sobre SM es la posibilidad de transmutaciones entre los tres tipos de neutrinos existentes (Electrónico, Muónico y Tauónico). Este fenómeno es conocido como **oscilación de neutrinos**. Además, el hecho de que tengan masa los distingue de los fotones en características, como la evolución de su velocidad y energía, a medida que se expande el universo. Otra característica importante de los neutrinos es su mínima interacción con el resto de la materia. Esto hace que pasen a través de la materia ordinaria casi sin perturbarla. Su baja interacción con la materia es tal que se necesitaría un bloque de plomo de 1 año luz de espesor para detener la mitad de los neutrinos que lo atraviesan. Es por esto que pasaron más de 25 años desde su proposición por Wolfgang Pauli hasta su verificación experimental<sup>4</sup>.

Los neutrinos tienen varios orígenes: El Sol, Supernovas, centrales nucleares, etc. Pero, en este caso, nos importan los que se originan del Big-Bang. Estos neutrinos son conocidos como el Fondo de Radiación Cósmica de Neutrinos (**CNB**) y corresponden a los neutrinos que se desacoplaron del plasma primordial. Por su baja interacción, aún no han sido detectados, pero, de existir, habrían empezado a evolucionar de forma independiente al resto de la materia del plasma desde entonces. Este desacoplo se produjo mucho antes que el de los fotones del **CMB**<sup>5</sup> [1], pero de manera muy similar, lo que hace que su importancia sea igual o más relevante para la cosmología.

Por su lado, el **CMB** ha entregado valiosa información sobre el universo como, por ejemplo, las fluctuaciones de materia que existían en un comienzo que, luego, formarían las galaxias y también algunas estimaciones de parámetros cosmológicos. Esto se debe a que el **CMB** es una verdadera huella de como era el universo en aquel entonces. La información que se ha recibido ha alcanzado niveles de precisión

---

<sup>3</sup>Modelo más utilizado para describir todo lo que se refiere a las partículas fundamentales y a sus interacciones.

<sup>4</sup>Descubiertos por Clyde Cowman y Frederick Reines en 1956 al bombardear agua pura con  $10^8$  neutrinos por segundo, y observando la emisión de fotones producida.

<sup>5</sup>Cosmic Microwave Background, Radiación electromagnética isotrópica descubierta en 1965 que llena el Universo totalmente. Tiene forma de un cuerpo negro a temperatura de 2,7 [K] y es una de las pruebas principales del Big Bang. Se produjo al desacoplarse los fotones del plasma primordial a un  $z \simeq 1100$ .

de  $\sim 10^{-5}$  que corresponden a desviaciones de  $\simeq 20$  [ $\mu\text{K}$ ] al espectro de cuerpo negro. Los últimos datos obtenidos del **CMB** fueron gracias al satélite de la NASA, **WMAP**. Para entender la precisión y la importancia del **WMAP**, indicaremos algunas de las predicciones hechas con la información obtenida [15]:

1. La edad del Universo es de  $13,700 \pm 200$  millones de años
2. El universo tiene un 4 % de materia ordinaria, 23 % de materia oscura<sup>6</sup> y 73 % de energía oscura<sup>7</sup>.
3. Verificación de los modelos inflacionarios, pero con ciertas anomalías a escalas angulares grandes.
4. La constante de Hubble es de  $71 \pm 4$  [ $\frac{\text{Km}}{\text{sMpc}}$ ]
5. El universo se expande indefinidamente y, al parecer, tiene una especie de curvatura cónica.

Para mejorar los datos del **WMAP**, se lanzará el satélite **Planck Surveyor**, de la ESA, el 2008 que entregará datos más precisos, en especial a escalas angulares grandes donde se encuentra el mayor problema de las verificaciones de los modelos cosmológicos [16].

De la misma forma, el **CNB** sería una especie de fotografía del universo hace miles de millones de años, verificando o refutando los modelos cosmológicos de fenómenos, como la inflación, que ocurrieron en épocas muy tempranas del universo, de las cuales se sabe muy poco. Por este motivo, y con la esperanza de que, algún día, se desarrolle la tecnología para detectar estos escurridizos neutrinos, es importante estudiarlos y obtener ciertas predicciones de su comportamiento.

---

<sup>6</sup>Materia de composición y origen desconocido que no emite ni refleja la luz haciéndola no visible.

<sup>7</sup>Forma de energía que cubre todo el universo que genera una especie de presión negativa de tal forma que el universo se expanda aceleradamente.

Una manera de hacerlo, es comparándolos ambos Fondos de Radiación Cómica por todo lo que ya se sabe del **CMB**. Esto lo podemos hacer porque el desacoplo de ambos fue muy similar, por lo que la diferencia en su comportamiento, además de las condiciones en el momento del desacoplo, se deberán a que los neutrinos son fermiones y tienen masa, a diferencia de los fotones que son bosones y no tienen masa.

En 1928 Paul Dirac, en su famosa ecuación, predijo la existencia de las antipartículas lo cuál era impensado en aquel entonces. Ahora ya se ha verificado su existencia experimentalmente asociándosele una antipartícula a cada partícula conocida donde ambas tienen igual masa y vida media y carga opuesta. Esto se debe a la simetría *CPT*. Esta simetría nos dice que un proceso físico que se cumple para una partícula se cumplirá para su anti-partícula si se invierte el sentido del espacio-tiempo. Se han encontrado casos donde se violan las simetrías *C*, *P* y *T* por separado e incluso casos donde se viola *CP*<sup>8</sup>, pero se ha demostrado teóricamente que la simetría *CPT* se conserva, dándosele la denominación de propiedad axiomática de la física.

El descubrimiento de la antimateria dio origen a distintas hipótesis de como se originó en conjunto con la materia. Por la relación que existe entre partículas y antipartículas, resulta natural pensar que debe existir la misma cantidad de materia que de antimateria en el universo, pero de ser así, se verían planetas, sistemas solares y galaxias enteras de antimateria que, al entrar en contacto con la materia se aniquilarían produciendo fotones que serían observados desde la tierra isotrópicamente. Claramente, ninguno de estos fenómenos es observado, lo que sugiere una asimetría barión-antibarión. La producción de ambas y el origen de esta asimetría es llamada *bariogénesis*. Pero, a pesar de que existen muchos modelos que la describen, es un total misterio.

Algo en común que tienen las teorías de la bariogénesis son las violaciones de *B*, *C* y *CP* y encontrarse fuera del equilibrio<sup>9</sup>. Todo esto, preservando *CPT* por lo

---

<sup>8</sup>Interacción  $K^0$ - $\bar{K}^0$

<sup>9</sup>Estas condiciones fueron propuestas por primera vez por Sakharov [17].

mencionado anteriormente. Una de las teorías preferidas para explicar la bariogénesis consiste en introducir una nueva partícula bosónica denominada *Bosón X* que, al igual que los bosones *Z* y *W*, estarían relacionados a una nueva fuerza que es necesaria para la *Teoría de la Gran Unificación* [13].

Ambos fenómenos descritos anteriormente serán estudiados utilizando los métodos usuales de descripción como la mecánica estadística y la cosmología. Pero al hacerlo, introduciremos además una Violación a la Invarianza de Lorentz (*VL*) [5]-[11] [21] [22] que se traducirá en una pequeña modificación a la relación de dispersión usual de la energía.

La Invarianza de Lorentz es un concepto muy utilizado en la física y es uno de los mayores logros del siglo *XX*. Pero, como dijimos al principio, la forma de entender el mundo en el presente es utilizando el método científico, el cual consiste en la verificación constante de las hipótesis científicas. Naturalmente, la invarianza de Lorentz ha sido verificada con mucho éxito, pero, debido a las limitaciones tecnológicas en las que nos encontramos, no es posible hacerlo a altas energías. Por lo bella de la simetría, no es raro pensar que debe ser una característica de la naturaleza<sup>10</sup> que deba ser válida en cualquier circunstancia. Es por eso que se requiere de algo más para poder justificar una ruptura a esta simetría. Una forma de hacerlo es buscar algún fenómeno donde se observe una anomalía que se puede explicar con alguna *VL*. Uno de estos fenómenos, y tal vez el más interesante, es la existencia de rayos cósmicos altamente energéticos.

Los rayos cósmicos son partículas (desde electrones a núcleos pesados) muy energéticas originadas en algún punto del espacio. Sus energías son desde unos pocos *MeV* hasta algunos *ZeV* ( $10^{15}$  *MeV*). Algunos de ellos son los *Rayos Cósmicos Solares*, *Rayos Cósmicos Anómalos* y *Rayos Cósmicos Galácticos*. Son observados con detectores tanto en tierra como en el aire. Su descubrimiento fue fundamental para la investigación de las propiedades de muchas partículas como, por ejemplo, la

---

<sup>10</sup>Siempre se ha buscado una manera de describir el universo de la manera más simple posible por lo que se buscan simetrías y cantidades conservadas

existencia del positrón (la primera antipartícula detectada), el muón y la medición de la masa de neutrinos solares.

A pesar de haber pasado casi un siglo desde su descubrimiento, su naturaleza y origen aún es algo misterioso. A pesar de eso, existen ciertos modelos teóricos que indican que la detección de rayos cósmicos con energías  $\gtrsim 10^{20}$  [eV] está prácticamente prohibida, los cuales no deberían tener un origen superior a los 100 [Mpc]<sup>11</sup> lo que corresponde a la vecindad galáctica. Eso significa que las fuentes (supernovas, quasares, AGN, etc) de estos rayos cósmicos energéticos deben encontrarse en galaxias cercanas a la nuestra, pero no se tiene conocimiento de ninguna que los genere dentro de esta región. El encontrar alguna fuente explicaría el fenómeno, pero la detección de estos rayos cósmicos sugiere que se trata de una distribución isotrópica lo que nos llevaría a un origen mucho más lejano al de la vecindad galáctica. Este hecho se conoce como la Violación del Límite **GZK**.

Para solucionar este problema, se han propuestos una gran cantidad de modelos como, por ejemplo, que su origen se deba a los *Monopolos Magnéticos*<sup>12</sup> o a alguna *Super Partículas* que generarían estas partículas altamente energéticas en nuestra vecindad. Otra explicación es la de una posible Violación a la Invarianza de Lorentz (*VL*) que se puede interpretar como una corrección a la relación de dispersión usual que sólo se hace importante a energías altas<sup>13</sup>. La forma en que un rompimiento en la invarianza de Lorentz explicaría el origen de estos Rayos Cósmicos se origina en la posibilidad de que afecte la interacción que ellos tienen con el Fondo de Radiación Cósmica de fotones. Cuando uno las estudia de la forma usual, se puede observar

---

<sup>11</sup>Límite determinado por Kenneth Greisen, Vadim Kuzmin y Georgiy Zatsepin llamado *Límite GZK*

<sup>12</sup>Partícula que, a diferencia de un imán, tendría sólo un polo magnético (Norte o Sur) y fueron propuestos por primera vez por Paul Dirac para darle cierta simetría al campo electromagnético. No existe un impedimento teórico para su existencia y algunos modelos para el origen del universo la requieren, pero, hasta ahora, no se han detectado.

<sup>13</sup>La forma general de definir la corrección es  $E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 + f(E, p)$  donde  $f(E, p)$  es una función arbitraria de la energía y el momentum. Los rangos de energía donde  $f(E, p)$  debe tomar importancia debe incluir los rangos de  $10^{20}$  [eV] donde se encuentran los rayos cósmicos altamente energéticos.

que las partículas de los Rayos Cósmicos disminuyen su energía con cada interacción. éste es el motivo principal de por qué los rayos cósmicos no pueden recorrer grandes distancias sin disminuir su energía considerablemente (Límite **GZK**). Sin embargo, si uno introduce una violación a Lorentz, se pueden encontrar zonas de energía en las cuales esta interacción queda totalmente prohibida, desapareciendo el Límite **GZK**, permitiendo que estos rayos cósmicos puedan tener un origen mucho mayor a la vecindad galáctica.

Aún cuando una Violación a la Invarianza de Lorentz pareciera solucionar el problema de los rayos cósmicos, aparecen ciertos problemas más fundamentales. La invarianza de Lorentz viene de imponer que no existe ningún sistema de referencia privilegiado tal que todas las leyes física se apliquen de igual forma en cualquiera de ellos. Por lo tanto, al introducir una violación a esta simetría, inevitablemente surgirá un sistema de referencia absoluto. Un buen candidato para considerar, tanto global como localmente, es el sistema de referencia donde el **CMB** es isotrópico [10]. En nuestro caso particular, existe un problema al escoger éste como nuestro sistema preferencial ya que trabajaremos con fenómenos que ocurren antes de que se desacoplaran los fotones. Esto puede justificarse al recordar la posible existencia del **CNB**. Antes de que se desacoplaran los neutrinos y los fotones, ambos evolucionaban juntos durante la expansión como un único plasma. Si uno imagina esta expansión como una explosión (Big-Bang), el desacoplo de cada elemento sería equivalente al alcance máximo que tiene éste elemento en la explosión. Al hacer esta relación, podemos decir que ambos sistemas de referencia, el del **CMB** y del **CNB**, son el mismo. Eso significa que corresponde al sistema de referencia del Big-Bang mismo y, por lo tanto, es válido para cualquier época.

Otro problema que surge es la falta de teorías que permiten una violación a Lorentz. Una forma de evitar este problema es asumiendo un rompimiento espontáneo. Esto, básicamente, significa que las ecuaciones de movimiento son invariante de Lorentz a pesar de que las soluciones no lo sean. Aún así, es necesaria alguna teoría que permita esta ruptura espontánea. Algunas de ellas son *Super-Cuerdas*

y *D-Branas* [18] donde existen dimensiones extras. Como sea, esta teoría debe ser fundamental como lo es la aún inexistente **Teoría de Gravedad Cuántica** [8] [9]. Esta teoría busca unificar la Física Cuántica y la Relatividad. Dos posibles teorías que cumplen con esto, pero a la vez son muy distintas, son la **Teoría de Cuerdas**, que desarrolla la teoría de campos, y **Loop Quantum Gravity**, que tiene una visión más relativista.

Bajo estos fundamentos, resulta natural el analizar los efectos que tendría una *VL* donde las altas energías son naturales como lo es en la época cercana al Big-Bang. En el **Capítulo 1** estudiaremos los efectos de esta Violación a Lorentz en la velocidad y energía de los neutrinos del **CNB** después del desacoplo y en el **Capítulo 2** trataremos de hacer algunas predicciones de la distribución de los neutrinos. En los cálculos obviaremos la propiedad oscilatoria de los neutrinos por simplicidad. Una justificación para esta aproximación es que esta característica parece ser mucho mayor en medios materiales que en el vacío del espacio. Es por esto que consideraremos las cotas superiores aceptadas de las masas para estimar algunos resultados numéricos. Además supondremos que, desde su desacoplo hasta la época actual, prácticamente no interactúan con el resto de la materia lo que es aceptable por ser fermiones débilmente interactuantes con la materia. En el **Capítulo 3** reelaboraremos la teoría que involucra al *Bosón X* que origina la bariogénesis, pero integrándole una *VL* que, al igual que en los rayos cósmicos, traerá zonas prohibidas de energías para el decaimiento del bosón. Un efecto extra que trae la violación a Lorentz, en este caso, es una posible ruptura de la simetría *CPT*. Obviaremos esta posibilidad porque las modificaciones que representan esta asimetría son extremadamente pequeñas para ser consideradas.

Basado en los textos utilizados como referencia, el tipo de ruptura que, al parecer, corresponde a la más importante a niveles energéticos altos, y la que utilizaremos, es de la forma [8] [9] [11] [21] [22]:

$$E^2 = v_{max}^2 p^2 + m^2 c^4$$

Donde  $v_{max}$  corresponde a la velocidad máxima de la partícula en estudio. Este factor se puede expresar de la forma  $v_{max} = c(1 - \alpha)$  donde  $\alpha$  es un valor muy pequeño para que sólo sea notorio a valores de  $p$  muy altos. Ciertas estimaciones de este factor correctivo  $\alpha$ , dadas por el análisis teórico de la física de cada partícula y cotas experimentales de ciertos parámetros, indican que es del orden de  $10^{-22}$  en el caso del neutrino. Este valor siempre será pequeño, pero dependerá exclusivamente de cada partícula [9].

# Capítulo 1

## Energía y Velocidad de los Neutrinos Primordiales.

Desde un principio los fotones y todas las partículas estaban acopladas entre sí formando un único plasma que evolucionaba bajo la influencia de la expansión del universo. En cierto momento, cuando los fotones dominaban esta expansión, los neutrinos se desacoplaron de este plasma, y desde entonces, los neutrinos evolucionaron de manera independiente.

Uno de los últimos descubrimientos sobre los neutrinos, es la determinación de sus masas por los efectos que esto tiene en el Modelo Estándar. Además, al introducirle masa a los neutrinos, algunas de sus características se distinguen de los fotones. Una de ellas, que es la que estudiaremos, es la velocidad. Para eso, analizaremos la evolución de la energía de los neutrinos desde su desacople hasta la actualidad. Con esto trataremos de determinar como evoluciona la velocidad de los tres tipos de neutrinos conocidos (Electrónico, Muónico y Tauónico), comparándola con la de los fotones que siempre será la velocidad de la luz  $c$ . Esto nos dará una idea de como los neutrinos se retrasan con respecto a los fotones del plasma primordial.

También incluiremos una violación a Lorentz. La violación, en nuestro caso, se representa con una corrección a la relación de dispersión de la forma:

$$E^2 = v_{max}^2 p^2 + m^2 c^4$$

Donde  $v_{max} = c(1-\alpha)$  es la velocidad máxima de la partícula en estudio. También consideraremos que la nueva velocidad de expansión de los neutrinos está dada exclusivamente por su energía y su masa que, a pesar de ser pequeña, será un factor fundamental en nuestros cálculos. Trabajaremos en el sistema comóvil a la expansión del universo para que exista una simetría esférica tal que la velocidad de los neutrinos sea netamente radial. Además éste es el sistema referencial privilegiado que asumimos con la violación de Lorentz.

## 1.1. Función Distribución Fuera del Equilibrio

Inicialmente los neutrinos se encuentran en equilibrio térmico con el resto de la materia. Para que esto suceda, se debe cumplir que  $\Gamma_i \gg H$ , donde  $\Gamma_i$  es la tasa de interacciones de la especie  $i$  y  $H \propto T^2$  es la constante de Hubble y  $T$  la temperatura. Mientras las especies de neutrinos se mantengan en equilibrio, su distribución, y la de cualquier especie fermiónica, estará dada por la estadística de Fermi-Dirac:

$$f_{eq}(E, T) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} + 1}$$

A medida que sucede la expansión, la temperatura va disminuyendo hasta un punto donde  $\Gamma_\nu \lesssim H$  mientras que  $\Gamma_{i \neq \nu} \gg H$ . Esto quiere decir que los neutrinos dejan de estar en equilibrio y se desacoplan del resto de la materia. Llamaremos  $T_{\nu,D}$  a la temperatura de desacoplo de los neutrinos que se obtiene al imponer  $\Gamma_\nu \simeq H(T)$ . Para ver que sucede con su distribución haremos el siguiente análisis [4]. A un tiempo  $t_0$ , un observador ve en cierta dirección una cantidad  $dN = f d^3 r d^3 p$  de neutrinos en un volumen propio  $d^3 r$  y con momentum entre  $\vec{p}$  y  $\vec{p} + d\vec{p}$ . Pasado un tiempo  $dt$ , los neutrinos no han interactuado por lo que  $dN$  permanece constante, pero el volumen propio en que se encuentran a aumentado en un factor  $\left(\frac{R(t_0+dt)}{R(t_0)}\right)^3$  y el momentum a disminuido en  $\frac{R(t_0)}{R(t_0+dt)}$ . Esto significa que  $f(E, T_\nu)$  se conserva en el tiempo. O sea, para  $t > t_D$  (o  $T_\nu < T_{\nu,D}$ ) con  $t_D$  momento en que se produce el Desacoplo, la

función de distribución está dada por:

$$f[E(p(t)), T_\nu(t)] = f_{eq}[E(p_D), T_{\nu,D}] = f_{eq} \left[ E \left( p(t) \frac{R(t)}{R_D} \right), T_{\nu,D} \right] \quad (1.1)$$

Donde el subíndice  $D$  se refiere a la época del desacoplo. Además sabemos que el número de neutrinos, la energía total y la energía por neutrino están dadas por:

$$N_\nu = \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} \int f(p, T_\nu) d^3p \quad (1.2)$$

$$E_\nu = \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} \int E(p) f(p, T_\nu) d^3p \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_\nu = \frac{E_\nu}{N_\nu} \quad (1.4)$$

Donde:

$$E^2(p) = v_{max}^2 p^2 + m^2 c^4$$

Ahora se puede determinar la Función Distribución que seguirán después de desacoplarse, pero eso dependiera de si el desacoplo se produjo cuando el neutrino era relativista o cuando ya no lo era.

## 1.2. Desacoplo Relativista

En este caso, la energía de los neutrinos se puede expresar como  $E(t) = v_{max,\nu} p(t)$  (Usamos una expansión con cero orden en la masa ya que  $f$  depende exponencialmente de  $E$  lo que reduce aun más su efecto) y como  $p_D = p(t) \frac{R(t)}{R_D}$ , obtenemos al usar (1.1):

$$f[p, T_\nu] = \frac{1}{e^{\frac{v_{max,\nu} p}{k_B T_\nu}} + 1} \quad (1.5)$$

Con  $T_\nu = T_{\nu,D} \frac{R_D}{R(t)}$  y  $\mu_\nu = 0$  por la baja interacción que tienen con la materia. Esto significa que la distribución de los neutrinos, que se desacoplan mientras son

relativistas, es de Fermi con temperatura  $T_\nu$ , o sea  $RT_\nu = cte$ . Evaluando en (1.2) y (1.3):

$$N_\nu = \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{1}{e^{\frac{v_{max,\nu}p}{k_B T_\nu}} + 1} d^3p$$

$$E_\nu = \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{E(p)}{e^{\frac{v_{max,\nu}p}{k_B T_\nu}} + 1} d^3p$$

Naturalmente, la expresión de  $N_\nu$  será igual para cualquier instante de tiempo. Usando el cambio de variable  $x = \frac{v_{max,\nu}p}{k_B T_\nu}$ , obtenemos:

$$N_\nu = \frac{3gV\zeta(3)(k_B T_\nu)^3}{4\pi^2\hbar^3 v_{max,\nu}^3} \quad (1.6)$$

Donde  $\zeta(3) = 1,2021$  es la función Zeta de Riemann. Podemos ver que, efectivamente, se mantiene constante en el tiempo ya que  $V \propto R^3(t)$  y  $T_\nu \propto R^{-1}(t)$ . Para determinar  $E_\nu$ , se debe tener una expresión para  $E(p)$ . En general, esta expresión es nuestra relación de dispersión, pero como la integral se vuelve muy complicada, analizaremos los casos extremos donde los neutrinos siguen siendo relativista y cuando dejan de serlo. Por la simetría esférica, la velocidad es radial, por lo tanto sólo debemos determinar su módulo. El módulo de la velocidad de una partícula está dada por:

$$v = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p}$$

siendo  $\varepsilon$  y  $p$  la energía y el momentum de una partícula relacionados por nuestra relación de dispersión:

$$\varepsilon^2 = v_{max}^2 p^2 + m^2 c^4$$

Mientras la partícula siga siendo relativista, al desarrollar la derivada hasta segundo orden en la masa ( $\varepsilon \gg mc^2$ ), obtenemos que:

$$v_\nu \simeq v_{max,\nu} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{mc^2}{\varepsilon} \right)^2 \right) \quad (1.7)$$

Donde podemos ver que sólo el orden cero en la masa de  $\varepsilon$  mantiene el segundo orden en la velocidad. Por lo tanto debemos usar  $E(p) = v_{max}p$  al desarrollar  $E_\nu$ .

Ahora, si la partícula pasa a ser NO-Relativista, tenemos que la energía y la velocidad de una partícula a segundo orden en el momentum ( $pv_{max,\nu} \ll mc^2$ ) son:

$$\varepsilon_\nu \simeq mc^2 + \left(\frac{v_{max,\nu}}{c}\right)^2 \frac{p^2}{2m}$$

$$v_\nu = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \simeq \left(\frac{v_{max,\nu}}{c}\right)^2 \frac{p}{m} = v_{max,\nu} \sqrt{2 \left(\frac{\varepsilon}{mc^2} - 1\right)} \quad (1.8)$$

Donde vemos que, para mantener el orden en el momentum, los cálculos deben ser hasta segundo orden en la expresión de  $E(p)$ , o sea  $E(p) = mc^2 + \left(\frac{v_{max,\nu}}{c}\right)^2 \frac{p^2}{2m}$ . Esta última expresión para la velocidad nos servirá también para el caso de desacople No-Relativista.

### 1.2.1. Neutrinos aún Relativistas

Como dijimos, para determinar  $E_\nu$  debemos usar  $E(p) = v_{max}p$ . Con esto, obtenemos la expresión:

$$E_\nu = \frac{7\pi^2 gV (k_B T_\nu)^4}{240 \hbar^3 v_{max,\nu}^3} \quad (1.9)$$

Usando (1.6) y (1.9) en (1.4) y (1.7), obtenemos:

$$\varepsilon_\nu = \frac{7\pi^4}{180\zeta(3)} k_B T_\nu \quad (1.10)$$

$$v_\nu = v_{max,\nu} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{180\zeta(3)m_\nu c^2}{7\pi^4 k_B T_\nu} \right)^2 \right) \quad (1.11)$$

Si definimos la velocidad relativa entre los neutrinos y los fotones del plasma como  $\Delta v = v_\gamma - v_\nu$ , nos queda:

$$\Delta v = \Delta v_{max} + \frac{v_{max,\nu}}{2} \left( \frac{180\zeta(3)m_\nu c^2}{7\pi^4 k_B T_\nu} \right)^2$$

Donde  $\Delta v_{max} = v_{max,\gamma} - v_{max,\nu} = c\alpha_\nu$  lo que significa que este factor se anula si no existe la violación. Evaluando numéricamente y dejándolo en función de  $M_\nu = m_\nu c^2$ ,  $k_B T_\nu$  y  $\alpha_\nu$ , nos queda:

$$\frac{\Delta v}{c} = \alpha_\nu \left( 1 - 5,04 \times 10^{-2} \left( \frac{M_\nu}{k_B T_\nu} \right)^2 \right) + 5,04 \times 10^{-2} \left( \frac{M_\nu}{k_B T_\nu} \right)^2 \quad (1.12)$$

Donde hemos separado la parte dependiente e independiente de la violación de Lorentz impuesta.

### 1.2.2. Neutrinos ya No-Relativistas

En este caso tenemos que  $E(p) = m_\nu c^2 + \left( \frac{v_{max,\nu}}{c} \right)^2 \frac{p^2}{2m_\nu}$ , por lo tanto, al evaluar en  $E_\nu$  usando (1.6), obtenemos:

$$E_\nu = N_\nu m_\nu c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{k_B T_\nu}{m_\nu c^2} \right)^2 \frac{I_4}{I_2} \right) \quad (1.13)$$

Con  $I_n = \int_0^\infty \frac{x^n}{e^x + 1} dx = \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) n! \zeta(n+1)$ . Entonces, evaluando en (1.4) y (1.8), se tiene que:

$$\varepsilon_\nu = m_\nu c^2 \left( 1 + 15 \frac{\zeta(5)}{2\zeta(3)} \left( \frac{k_B T_\nu}{m_\nu c^2} \right)^2 \right) \quad (1.14)$$

$$v_\nu = v_{max,\nu} \sqrt{15 \frac{\zeta(5)}{\zeta(3)} \frac{k_B T_\nu}{M_\nu}} \quad (1.15)$$

Dando una velocidad relativa:

$$\frac{\Delta v}{c} = \alpha_\nu \sqrt{15 \frac{\zeta(5)}{\zeta(3)} \frac{k_B T_\nu}{M_\nu}} + \left( 1 - \sqrt{15 \frac{\zeta(5)}{\zeta(3)} \frac{k_B T_\nu}{M_\nu}} \right) \quad (1.16)$$

Donde hemos separado la parte dependiente de la violación de Lorentz de la independiente y  $\zeta(5) = 1,0369$ . Como debe ser a una temperatura baja y la velocidad no puede ser mayor que su velocidad máxima, debemos acotar para qué temperaturas esta aproximación es válida. Se tiene que  $v_\nu > v_{max,\nu}$  si  $k_B T_\nu > \sqrt{\frac{\zeta(3)}{15\zeta(5)}} M_\nu$ . Eso significa que la aproximación es válida si  $k_B T_\nu \ll \sqrt{\frac{\zeta(3)}{15\zeta(5)}} M_\nu \sim 0,28 M_\nu$ .

### 1.3. Desacoplo No-Relativista

En el caso en que los neutrinos son No-Relativistas cuando se desacoplan, su energía es, simplemente,  $E(t) = mc^2 + \left(\frac{v_{max}}{c}\right)^2 \frac{p^2(t)}{2m}$  y la distribución de Fermi se aproxima a la de Boltzmann. Por lo tanto, al usar (1.1), se tiene que la función distribución despues del desacoplo es:

$$f(p(t), T_\nu(t)) = e^{\frac{-m_\nu c^2}{k_B T_{D,\nu}}} e^{\frac{-v_{max,\nu}^2 p^2(t)}{2m_\nu c^2 k_B T_\nu(t)}} \quad (1.17)$$

Con  $T_\nu(t) = T_{\nu,D} \left(\frac{R_D}{R(t)}\right)^2$ . Esto significa que la distribución de los neutrino que se desacoplan mientras son No-Relativistas, es proporcional a Boltzmann con  $R^2 T_\nu = cte$ . Como los neutrinos ya no son relativistas, la unica opción es que  $E(p) = mc^2 + \left(\frac{v_{max}}{c}\right)^2 \frac{p^2}{2m}$ . Al usar nuestra función de distribución y relacionando  $E_\nu$  con  $N_\nu$ , obtenemos:

$$E_\nu = N_\nu m_\nu c^2 \left( 1 + \frac{k_B T_\nu J_4(1)}{m_\nu c^2 J_2(1)} \right)$$

Con  $J_n(\lambda > 0) = \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x^2} dx$ . No es difícil demostrar que  $\frac{J_{n+2}(\lambda)}{J_n(\lambda)} = \frac{n+1}{2\lambda}$ . Entonces, al evaluar en (1.4) y (1.8):

$$\varepsilon_\nu = m_\nu c^2 + \frac{3}{2} k_B T_\nu \quad (1.18)$$

Tipo	$M_\nu$ [eV]
Electrónico	$\lesssim 2$
Muónico	$\lesssim 1,5 \times 10^5$
Tauónico	$\lesssim 1,5 \times 10^7$

Cuadro 1.1: Masa de Neutrinos.

Las masas dadas en esta tabla son sólo estimaciones ya que realmente se conocen las diferencias de las masas al cuadrado [15].

$$v_\nu = v_{max,\nu} \sqrt{3 \frac{k_B T_\nu}{M_\nu}} \quad (1.19)$$

Vemos que  $\varepsilon_\nu$  es el resultado conocido de la energía de una partícula No-Relativista. La velocidad relativa, en este caso es:

$$\frac{\Delta v}{c} = \alpha_\nu \sqrt{3 \frac{k_B T_\nu}{M_\nu}} + \left( 1 - \sqrt{3 \frac{k_B T_\nu}{M_\nu}} \right) \quad (1.20)$$

Donde también hemos separado la parte dependiente de la violación de Lorentz de la independiente. Al ver (1.19), encontramos que, desde cierta temperatura, se supera la velocidad máxima. Esto sucede para  $k_B T_\nu > \frac{M_\nu}{3}$ . Esto nos puede servir como una cota para ver si los neutrinos se desacoplaron siendo relativistas o no. Si los neutrinos se desacoplaron siendo relativistas, deben cumplir, obviamente, con  $k_B T_{\nu,D} \gg M_\nu$ , y si no, deben cumplir con  $k_B T_{\nu,D} \ll \frac{M_\nu}{3}$ .

## 1.4. Resultados Numéricos y Análisis

Ahora veamos en cual de los casos se encuentran los tres tipos de neutrinos conocidos. En la época del desacoplo se sabe que  $k_B T_{\nu,D} = 2,4$  [MeV] para el neutrino Electrónico y  $k_B T_{\nu,D} = 3,7$  [MeV] para el Muónico y el Tauónico [2]. Si comparamos estas temperaturas con sus masas (Ver Tabla 1.1), vemos que el neutrino Electrónico y el muónico cumplen con  $k_B T_{\nu,D} \gg M_\nu$ , así que son claramente relativistas cuando se desacoplan. En el caso del Tauónico se tiene, más bien, el caso de desacoplo

Tipo neutrino	$\varepsilon_\nu$ [MeV]	$\frac{v_\nu}{c}$	$\frac{\Delta v}{c}$	Desacoplo
Electrónico	7,56	$\sim 1$	$3,50 \times 10^{-14}$	Relativista
Muónico	11,66	$\sim 1$	$8,28 \times 10^{-5}$	Relativista
Tauónico	20,55	0,86	0,14	No-Relativista

Cuadro 1.2: Energía y Velocidad de Neutrinos en  $z_D$  con Violación a Lorentz. Estos resultados numéricos fueron calculados con una violación a Lorentz de  $\alpha = 10^{-22}$ .

Tipo neutrino	$\varepsilon_\nu$ [MeV]	$\frac{v_\nu}{c}$	$\frac{\Delta v}{c}$	Desacoplo
Electrónico	7,56	$\sim 1$	$3,50 \times 10^{-14}$	Relativista
Muónico	11,66	$\sim 1$	$8,28 \times 10^{-5}$	Relativista
Tauónico	20,55	0,86	0,14	No-Relativista

Cuadro 1.3: Energía y Velocidad de Neutrinos en  $z_D$  sin Violación a Lorentz. Estos resultados numéricos fueron calculados sin violación a Lorentz.

No-Relativista ya que  $k_B T_{\nu,D} \ll \frac{M_\nu}{3}$ , pero  $k_B T_{\nu,D}$  y  $\frac{M_\nu}{3}$  son muy parecidos para cumplirse estrictamente. Como el valor que tenemos de  $M_\nu$  para el Tauónico es una cota superior, podemos decir que se encuentra en un caso intermedio. De todas formas, en todos nuestros cálculos, lo veremos como No-Relativista ya que parece ser la mejor aproximación.

A modo de prueba, evaluamos nuestras expresiones en la época de desacoplo ( $z_D$ ) de los neutrinos con y sin violación de Lorentz, donde  $T_\nu = T_{\nu,D}$  (Ver Tablas 1.2 y 1.3 respectivamente) siempre usando  $\alpha_\nu = 10^{-22}$  para los neutrinos. Podemos ver que los resultados son iguales en ambos casos. Esto se debe a que la parte que depende de  $\alpha_\nu$  es muy pequeña en comparación al resto.

Si ahora evaluamos en la época actual, a un redshift  $z = 0$ , todos los neutrinos son No-Relativistas ya que su temperatura es  $k_B T_{\nu,0} = 1,68 \times 10^{-4}$  [eV]. Los resultados muestran, nuevamente, que la violación de Lorentz no afecta en nada los resultados (Ver Tablas 1.4 y 1.5). Si observamos todas nuestras expresiones de la velocidad, podemos ver que son proporcionales a  $v_{max,\nu}$  que es lo único que depende de  $\alpha_\nu$ . Eso significa que el porcentaje de diferencia entre el caso con violación de Lorentz y el

Tipo neutrino	$\varepsilon_\nu$ [MeV]	$\frac{v_\nu}{c}$	$\frac{\Delta v}{c}$	Desacoplo
Electrónico	$2,00 \times 10^{-6}$	$3,02 \times 10^{-4}$	$\sim 1$	Relativista
Muónico	0,15	$4,03 \times 10^{-9}$	$\sim 1$	Relativista
Tauónico	15,00	$5,80 \times 10^{-6}$	$\sim 1$	No-Relativista

Cuadro 1.4: Energía y Velocidad de Neutrinos en  $z = 0$  con Violación a Lorentz. Estos resultados numéricos fueron calculados con una violación a Lorentz de  $\alpha = 10^{-22}$ .

Tipo neutrino	$\varepsilon_\nu$ [MeV]	$\frac{v_\nu}{c}$	$\frac{\Delta v}{c}$	Desacoplo
Electrónico	$2,00 \times 10^{-6}$	$3,02 \times 10^{-4}$	$\sim 1$	Relativista
Muónico	0,15	$4,03 \times 10^{-9}$	$\sim 1$	Relativista
Tauónico	15,00	$5,80 \times 10^{-6}$	$\sim 1$	No-Relativista

Cuadro 1.5: Energía y Velocidad de Neutrinos en  $z = 0$  sin Violación a Lorentz. Estos resultados numéricos fueron calculados sin violación a Lorentz.

caso sin ella es:

$$\frac{v_\nu(0) - v_\nu(\alpha_\nu)}{v_\nu(0)} 100\% = \alpha_\nu 100\% = 1 \times 10^{-20}\%$$

Eso significa que, para que sea perceptible la violación a Lorentz, se necesitan temperaturas de 44,90 [GeV] y 3,37 [PeV] para el neutrino Electrónico y Muónico, las que son extremadamente altas y superan por mucho las temperaturas de desacoplo de los neutrinos. Por lo tanto, no es posible que esta violación de Lorentz tenga un efecto importante en los neutrinos conocidos. Considerando las temperaturas de desacoplo de los neutrinos conocidas, deberían tener una masa promedio de  $M_\nu \sim 1,36 \times 10^{-4}$  [eV]. Comparando con las diferencias de masa entre los neutrinos al cuadrado conocidas [2], que son  $\Delta m_\nu^2 \sim (8 \times 10^{-5} - 2,5 \times 10^{-3}) [eV^2]$ , vemos que se trataría de un neutrino extremadamente poco masivo.

Las velocidades obtenidas para el neutrino Electrónico y muónico son aceptables para el punto de aproximación. En el momento del desacoplo tenían una velocidad muy cercana a la de la luz lo que es natural por estar moviéndose en conjunto a los fotones un momento antes. Al evaluar en la época actual, se obtienen velocidades

Época	$\frac{v_\nu}{c}$	$\frac{\Delta v}{c}$
Desacoplo	0,72	0,28
Actual	$5,80 \times 10^{-6}$	$\sim 1$

Cuadro 1.6: Corrección a Velocidad de Neutrinos Tauónico en  $z_D$  y  $z = 0$ .

Estos resultados numéricos muestran una corrección a la velocidad de los neutrinos Tauónico obtenidos en las Tablas anteriores.

adecuadas para una aproximación No-Relativista. Las velocidades  $v_\nu$  son  $9,06 \times 10^4$   $[\frac{m}{s}]$  y  $1,21$   $[\frac{m}{s}]$  para el neutrino electrónico y Muónico respectivamente. Para tener una idea de la magnitud de estas velocidades, las podemos comparar con la velocidad peculiar del Sol y la caminata de una persona.

En el caso del neutrino Tauónico, la velocidad obtenida en el momento del desacoplo no es adecuada para la aproximación No-Relativista utilizada. Como dijimos antes, esto se debe a que se encuentra entre las dos aproximaciones mencionadas cuando se desacopla. De todas formas, la aproximación que más se adecúa es la No-Relativista. Eso significa que, si queremos mejorar nuestra aproximación, debemos trabajar hasta un orden mayor en el momentum en la expresión de  $E(p)$ . El siguiente orden válido sería el cuarto el que agregaría un término en la energía por neutrino y daría una velocidad (Ver ec. 1.8) de la forma:

$$\Delta\epsilon_\nu = -\frac{15m_\nu c^2}{8} \left( \frac{k_B T_\nu}{m_\nu c^2} \right)^2$$

$$v_\nu = c \sqrt{3 \frac{k_B T_\nu}{M_\nu} - \frac{15}{4} \left( \frac{k_B T_\nu}{M_\nu} \right)^2} \quad (1.21)$$

Donde hemos eliminado el factor  $\alpha$  de violación a Lorentz por ser totalmente despreciable. Los resultados de esta corrección están en la Tabla 1.6 los que mejoraron considerablemente. Es importante comentar que, en esta corrección, debimos modificar la expresión (1.8) ya que también cambia al aumentar el orden en el momentum. Pero al hacer esto, se tiene una expresión algo más complicada. Como sólo era para mostrar un resultado algo más correcto, no se hizo.

Con respecto a las energías por neutrino obtenidas en las tablas, en la época del desacoplo no se obtuvieron energías mucho mayores que la temperatura  $k_B T_{\nu,D}$ . En el caso del neutrino Tauónico podemos ver que  $\varepsilon_\nu > M_\nu > k_B T_{\nu,D}$  lo que nos verifica que éste se encuentra en un caso intermedio entre Relativista y No-Relativista. Por último, verificamos también que, en la época actual, la masa de los neutrinos domina fuertemente sobre su energía ya que se encuentran a velocidades muy bajas.

En las Figuras (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4) se representan gráficamente la velocidad de los neutrinos y la energía por neutrino. Para ello se definieron las cantidades adimensionales  $x = \frac{m_\nu c^2}{k_B T_\nu}$ ,  $y = \frac{v_\nu}{c}$  y  $z = \frac{\varepsilon_\nu}{m_\nu c^2}$ . Estas funciones son válidas desde  $k_B T_{\nu,D}$  lo que, en el caso del desacoplo relativista equivale a un  $x_D = \frac{m_\nu c^2}{k_B T_{\nu,D}}$  muy pequeño, y en el caso No-Relativista es grande. Sólo para tener una idea en éste último, se usó  $x_D \simeq 10$ . También se indica en el gráfico que el tiempo crece hacia valores mayores en  $x$ .

En la Figura (1.1) se ve que los neutrinos sufren una desaceleración que va en rápido aumento en un principio. Luego esta desaceleración empieza a disminuir poco a poco acercándose a una velocidad nula.

En la Figura (1.2) se ve que, en el caso No-Relativista, los neutrinos sufren una desaceleración en constante descenso hasta detenerse casi por completo. En este gráfico se representan tanto la aproximación a segundo orden en el momentum como la de cuarto orden, donde esta última mejora un poco el resultado obtenido al comienzo de la época fuera del equilibrio.

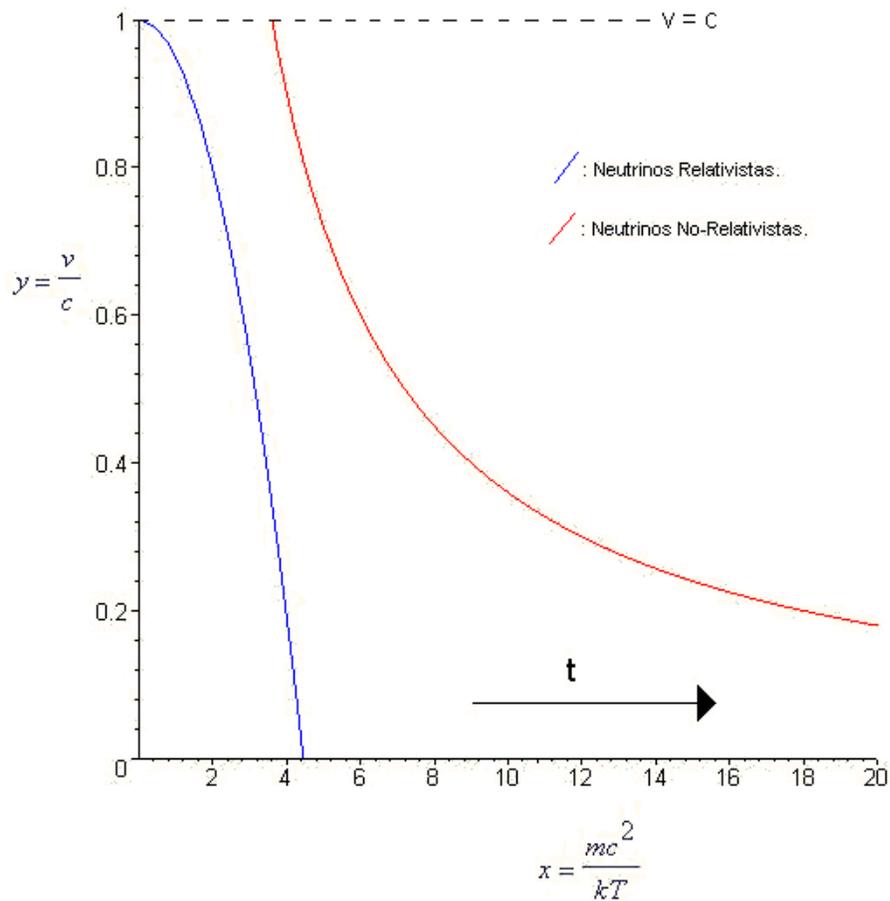


Figura 1.1: Representación de la velocidad de los neutrinos que se desacoplaron siendo Relativistas (Ecs. 1.11 y 1.15). Empiezan siendo dominadas por la expresión relativista (Azul) y luego por la No-Relativista a  $x$  grandes (Rojo). La expresión general sería una composición de ambas.

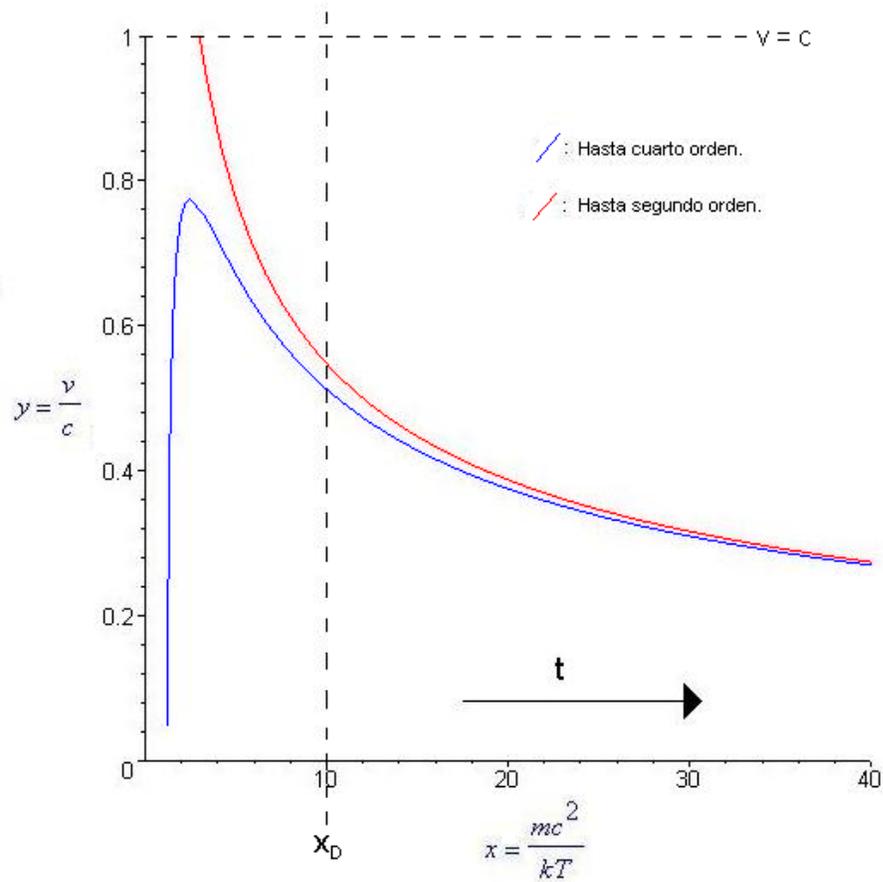


Figura 1.2: Representación de la velocidad de los neutrinos que se desacoplaron siendo No-Relativistas (Ecs. 1.19 y 1.21). Primero se muestra una aproximación a segundo orden en el momentum (Rojo) y luego una a cuarto orden (Azul).

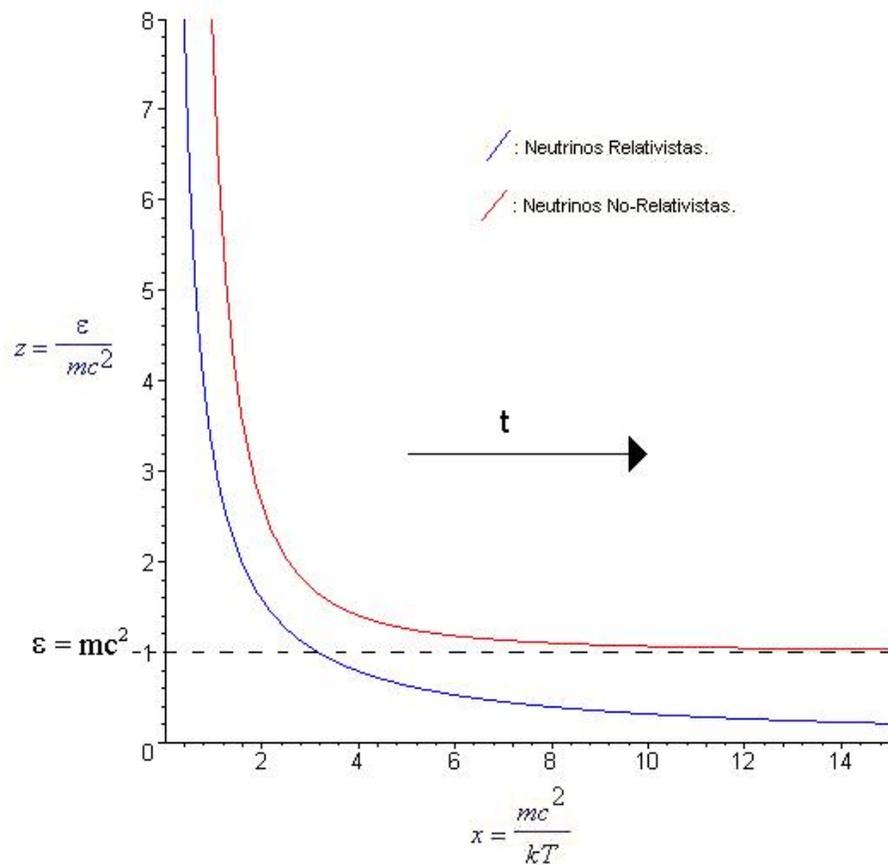


Figura 1.3: Representación de la energía por neutrino cuando se desacoplan siendo Relativistas (Ecs. 1.10 y 1.14). Empieza siendo dominada por la expresión relativistas (Azul) y luego por la No-Relativista a  $x$  grandes (Rojo). La expresión general sería una composición de ambas.

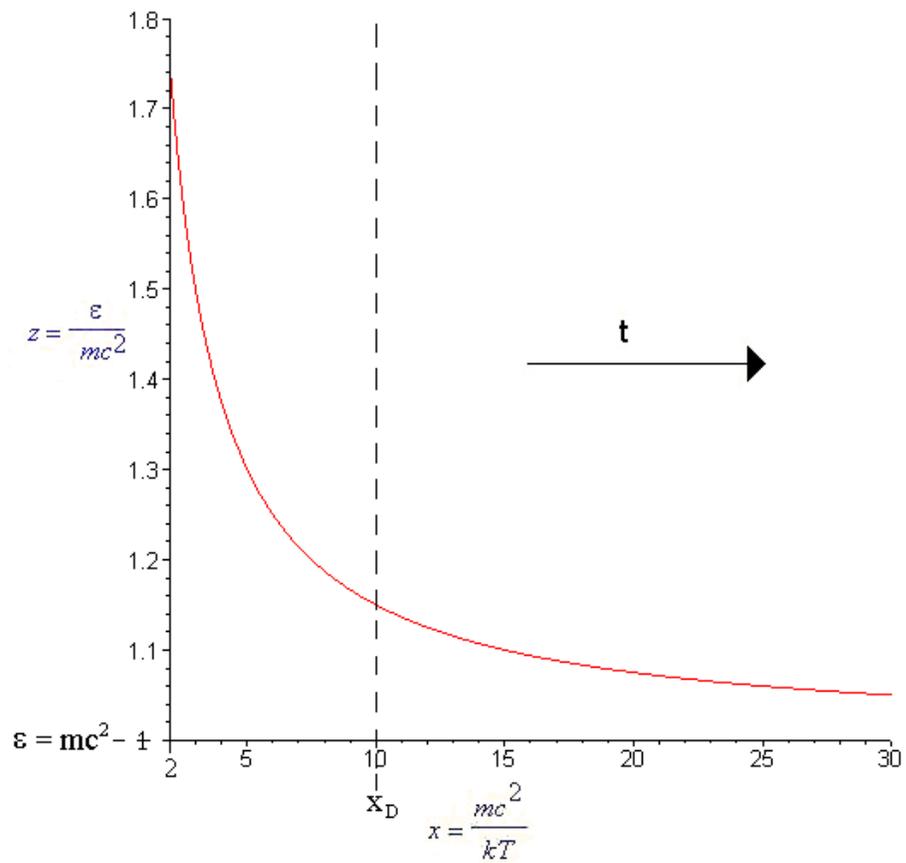


Figura 1.4: Representación de la energía por neutrino cuando se desacoplan siendo No-Relativistas (Ec. 1.18).

## Capítulo 2

# Distribución del CNB.

La detección del Fondo de Radiación Cósmica es la mayor prueba del modelo del Big-Bang del Universo. Es por esto que resulta importante determinar la forma que tiene la Función Distribución del **CNB** detectada desde la tierra para ver los efectos que tiene la velocidad peculiar del planeta en ella, que se conoce como Momento Dipolar en el **CMB**. Es por eso que, en este capítulo, analizaremos la distribución de los neutrinos en conjunto con la de los fotones por ser un desarrollo ya conocido.

Para los cálculos, es necesario utilizar las distribuciones de los neutrinos después del desacoplo dadas por (1.5) y (1.17) y la distribución de los fotones cuando se desacoplan que es:

$$f(p, T) = \frac{1}{e^{\frac{pc}{kT}} - 1}$$

que corresponde a una distribución de Bose-Einstein ultrarelativista con  $RT = cte$  que, actualmente, corresponde a una temperatura de 2,73 [K]. Además, vimos en el capítulo anterior que una violación de Lorentz de la forma

$$E^2 = v_{max}^2 p^2 + m^2 c^4$$

no diferenciaba, de forma notoria, la energía y la velocidad de los neutrinos primordiales en comparación a la relación de dispersión usual ( $v_{max} = c$ ). Es por

esto que las reglas usuales de relatividad especial son válidas como, por ejemplo, las transformadas de Lorentz tanto para las coordenadas espacio-temporales y la energía-momentum. Sabemos que estas transformadas son:

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= \vec{x}_\perp + \gamma(\vec{x}_\parallel - \vec{v}t) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{c^2}\right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\vec{p}' &= \vec{p}_\perp + \gamma\left(\vec{p}_\parallel - \frac{\vec{v}}{c^2}E\right) \\ E' &= \gamma(E - \vec{v} \cdot \vec{p})\end{aligned}$$

Donde el sistema de referencia primados se mueve a una velocidad  $\vec{v}$  del no primado. Los términos con los subíndices  $\parallel$  y  $\perp$  corresponden a las componentes vectoriales paralelas y perpendiculares a la velocidad  $\vec{v}$  respectivamente. Como estamos considerando una partícula que se mueve en el universo, nuestros sistemas de referencia primados y no primados serán, respectivamente, el de la tierra y el sistema comóvil a la expansión del universo, por lo tanto  $\vec{v}$  es la velocidad propia del planeta tierra. Por esto, desde ahora, la llamaremos  $\vec{v}_t$ .

Al definir de esta forma nuestros sistemas inerciales, resulta conveniente utilizar las transformadas de Lorentz inversas, o sea:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{x}'_\perp + \gamma(\vec{x}'_\parallel + \vec{v}_t t') \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{\vec{v}_t \cdot \vec{x}'}{c^2}\right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{p}'_\perp + \gamma\left(\vec{p}'_\parallel + \frac{\vec{v}_t}{c^2}E'\right) \\ E &= \gamma(E' + \vec{v}_t \cdot \vec{p}')\end{aligned}$$

Considerando que las partículas se mueven hacia la tierra a lo largo de la línea de visión (Ver Figura (2.1)), las transformadas de Lorentz pueden escribirse como:

$$x_{\perp,i} = x'_{\perp,i} \quad x_{\parallel} = \gamma(x'_{\parallel} + v_t t') \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v_t x'_{\parallel}}{c^2}\right) \quad (2.1)$$

$$p_{\perp,i} = p'_{\perp,i} \quad p_{\parallel} = \gamma\left(p'_{\parallel} - \frac{v_t}{c^2} E'\right) \quad E = \gamma(E' - v_t p'_{\parallel}) \quad (2.2)$$

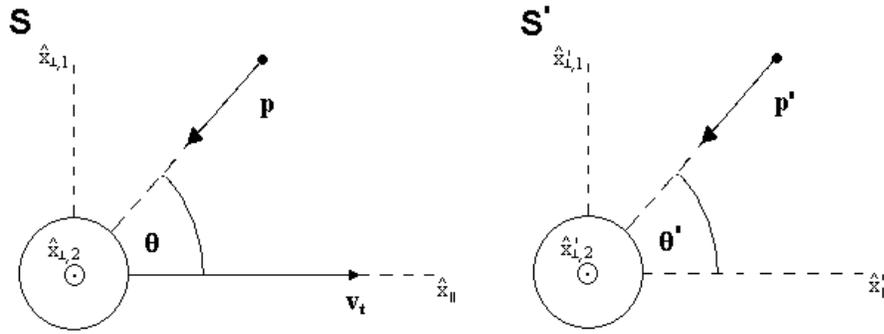


Figura 2.1: Descripción de ambos sistemas de referencia.  $S$ : Sistema de referencia comóvil a la expansión del Universo. La tierra tiene una velocidad  $v_t$  y el neutrino tiene momentum  $p$ . Entre ambos se encuentra el ángulo de visión  $\theta$ .  $S'$ : Sistema de referencia de la tierra. La tierra se encuentra en reposo y el neutrino tiene momentum  $p'$ . Se muestra el ángulo de visión  $\theta'$  medido desde la tierra. El sistema de coordenadas de  $S$  y  $S'$  se relacionan por las transformadas de Lorentz.

Donde  $i = 1,2$  rotulan las dos coordenadas que se pueden obtener de la parte perpendicular a  $\vec{v}_t$ . Será útil dejar las transformadas en forma diferencial considerando una medición instantánea desde la tierra, o sea a  $t' = cte$  o  $dt' = 0$ , resultando:

$$dx_{\perp,i} = dx'_{\perp,i} \quad dx_{\parallel} = \gamma dx'_{\parallel} \quad dt = \gamma \frac{v_t dx'_{\parallel}}{c^2} \quad (2.3)$$

$$dp_{\perp,i} = dp'_{\perp,i} \quad dp_{\parallel} = \gamma \left( dp'_{\parallel} - \frac{v_t}{c^2} dE' \right) \quad dE = \gamma (dE' - v_t dp'_{\parallel}) \quad (2.4)$$

Ahora, cuando contamos el número de partículas desde la tierra en una dirección específica instantáneamente ( $dt' = 0$ ), observaremos que, dentro de un volumen

$d^3r'$ , se encuentran  $dN$  partículas con valores de momentum en un rango  $[\vec{p}', d^3p']$ . Sabemos, por lo visto en el capítulo anterior, que este número de partículas está dado por:

$$dN = f'(p', T')d^3p'd^3r' \quad (2.5)$$

Donde  $f'$  es la función de distribución de las partículas observadas desde la tierra. Estas mismas partículas, en el sistema de referencia comóvil, se encuentran en un volumen  $d^3r$  y con valores de momentum en  $[\vec{p}, d^3p]$ , pero en el tiempo  $dt$  dado por (2.3) (distinta de cero ya que  $dt' = 0$ ) algunas partículas salen de  $d^3r$  (Las que entran no se consideran ya que no pertenecen a nuestro grupo de partículas). Es por eso que el número de partículas, en este sistema está dado por:

$$dN = f(p, T)d^3pd^3r + f(p, T)d^3pd\vec{S} \cdot \vec{u}dt \quad (2.6)$$

Donde  $\vec{u} = c^2 \frac{\vec{p}}{E}$  es la velocidad de la partícula y  $d\vec{S}$  es el diferencial de área, con dirección normal, por donde sale la partícula. Ambas expresiones para  $dN$  son, simplemente, una variación de la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

Con  $\rho = f(p, T)d^3p$ . Una explicación más detallada del término extra que se refiere a las partículas que salen de  $d^3r$  es la siguiente. Las partículas que alcanzan a salir por la superficie  $dS$  en un tiempo  $dt$  son aquellas que están dentro del volumen  $dV = udt dS$ , con  $u$  la velocidad de las partículas, ya que el resto no alcanza a salir. La cantidad de partículas que están dentro de  $dV$ , y por lo tanto las que salen, son  $\rho dV = f(p, T)d^3p u dt dS$ . Ampliando esta expresión a las tres dimensiones, se obtiene lo mencionado anteriormente. Como  $dN$  debe ser el mismo en ambos sistemas, debemos igualar (2.5) y (2.6) obteniendo:

$$f'(p', T')d^3p'd^3r' = f(p, T)d^3p \left( d^3r + c^2 dt \frac{\vec{p} \cdot d\vec{S}}{E} \right)$$

El elemento  $d^3r$ , el vector  $d\vec{S}$  y  $\vec{p}$  son (Ver Figura (2.2)):

$$d^3r = dx_{\parallel} * dx_{\perp,1} * dx_{\perp,2}$$

$$d\vec{S} = -(dx_{\parallel} * dx_{\perp,1} \hat{x}_{\perp,2} + dx_{\parallel} * dx_{\perp,2} \hat{x}_{\perp,1} + dx_{\perp,1} * dx_{\perp,2} \hat{x}_{\parallel})$$

$$\vec{p} = -(p_{\parallel} \hat{x}_{\parallel} + p_{\perp,1} \hat{x}_{\perp,1} + p_{\perp,2} \hat{x}_{\perp,2})$$

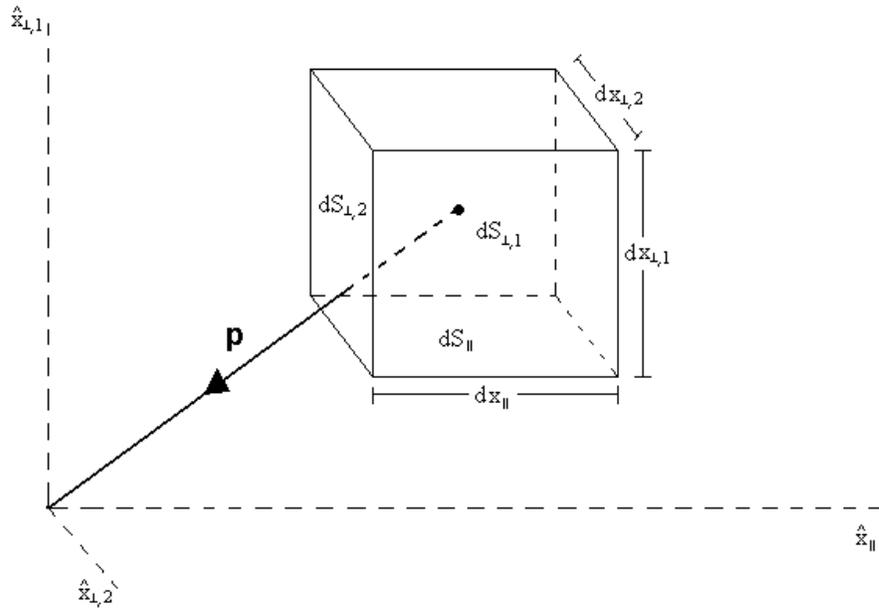


Figura 2.2: Representación del elemento de volumen  $d^3r$  donde se representa cada elemento de superficie. Se puede ver claramente el sentido vectorial de  $\vec{p}$  y  $d\vec{S}$ .

Donde el  $*$  representa el producto entre diferenciales que es anti-conmutativo. Evaluando en nuestra relación, usando la anti-conmutatividad del producto en conjunto con (2.3) y (2.2), se obtiene:

$$f'(p', T') d^3p' d^3r' = f(p, T) d^3p d^3r' \frac{E'}{E} \quad (2.7)$$

Reemplazando en  $d^3p = dp_{\perp,1} * dp_{\perp,2} * dp_{\parallel}$  las expresiones de (2.4), obtenemos:

$$d^3p = dp'_{\perp,1} * dp'_{\perp,2} * \gamma \left( dp'_{\parallel} - \frac{v_t}{c^2} dE' \right)$$

Pero sabemos que  $E'^2 = c^2(p'_{\perp,1}{}^2 + p'_{\perp,2}{}^2 + p'_{\parallel}{}^2) + m^2c^4$ . Derivando llegamos a la relación  $E'dE' = c^2(p'_{\perp,1}dp'_{\perp,1} + p'_{\perp,2}dp'_{\perp,2} + p'_{\parallel}dp'_{\parallel})$ . Evaluando:

$$d^3p = dp'_{\perp,1} * dp'_{\perp,2} * dp'_{\parallel} \gamma \left( 1 - \frac{p'_{\parallel}}{E'} v_t \right)$$

Donde hemos usado que los términos  $dp'_{\perp,i} * dp'_{\perp,i} = 0$  por ser un producto anti-conmutativo. Usando (2.2),  $d^3p$  se reduce a:

$$d^3p = d^3p' \frac{E}{E'}$$

Que en conjunto con (2.7), nos da la relación:

$$f'(p', T') = f(p, T) \quad (2.8)$$

Lo que significa que la función distribución es un invariante bajo Lorentz, lo cual es válido para cualquier tipo de partícula<sup>1</sup>. Ahora analizaremos algunos casos. En primer lugar, al fotón del CMB y, en segundo lugar, a los neutrinos que es lo que concierne a este informe. Para esto, nos será útil la relación

$$E = \gamma(E' - v_t p' \cos(\theta')) \quad (2.9)$$

Que es la expresión de  $E$  de (2.2) donde se usó que  $p'_{\parallel} = p' \cos(\theta')$ . Esta expresión será útil para relacionar  $p$  con  $p'$ .

## 2.1. Fotones

En el caso de los fotones del CMB, tenemos que  $E = cp$ , por lo tanto, la expresión (2.9) se reduce a:

$$p = \frac{1 - \frac{v_t}{c} \cos(\theta')}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_t}{c}\right)^2}} p'$$

---

<sup>1</sup>Esté hecho ha sido discutido y refutado en algunas publicaciones [20], lo cuál, por lo recién presentado, pensamos que es erróneo.

Reemplazando en (2.8), obtenemos:

$$f'(p', T'_\gamma) = f \left( \frac{1 - \frac{v_t}{c} \cos(\theta')}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_t}{c}\right)^2}} p', T_\gamma \right)$$

Como los fotones, después de desacoplarse siguen una distribución de la forma:

$$f_\gamma = \frac{1}{e^{\frac{pc}{k_B T_\gamma}} - 1}$$

podemos dejar nuestra expresión como:

$$f'(p', T'_\gamma) = f \left( p', T_\gamma \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_t}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v_t}{c} \cos(\theta')} \right)$$

Por lo tanto, la distribución de los fotones detectada desde la tierra  $f'$  en una dirección específica, será de la misma forma que la detectada en el sistema comóvil al universo, pero con una temperatura distinta dada por:

$$T'_\gamma = T_\gamma \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_t}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v_t}{c} \cos(\theta')}$$

Si consideramos que  $v_t \ll c$ , nos queda:

$$T'_\gamma \simeq T_\gamma \left( 1 + \frac{v_t}{c} \cos(\theta') \right)$$

$$\frac{\Delta T_\gamma}{T_\gamma} \simeq \frac{v_t}{c} \cos(\theta') \quad (2.10)$$

Donde lo último se conoce como el momento dipolar y es del orden de  $10^{-4}$ .

## 2.2. Neutrinos

En el caso de los neutrinos, tenemos partículas con masa. En el tiempo actual, los neutrinos son No-Relativistas, por lo tanto  $E = m_\nu c^2 + \frac{p^2}{2m_\nu}$  para ambos sistemas.

Evaluando en (2.9) y usando la aproximación  $v_t \ll c$  dejando hasta segundo orden en  $p'$  y  $v_t$ , queda:

$$p^2 = p'^2 - 2m_\nu v_t p' \cos(\theta') + m_\nu^2 v_t^2$$

Evaluando en (2.8) se obtiene:

$$f'(p', T'_\nu) = f\left(\sqrt{p'^2 - 2m_\nu v_t p' \cos(\theta') + m_\nu^2 v_t^2}, T_\nu\right) \quad (2.11)$$

A diferencia de los fotones, en este caso resulta difícil obtener una relación entre  $T'_\nu$  y  $T_\nu$  como en (2.10). Para analizarlos de mejor manera, debemos distinguir entre las diferentes funciones de distribución, vistas en el capítulo anterior, que tienen los neutrinos.

### 2.2.1. Desacoplo No-Relativista

En este caso, la distribución de los neutrinos está dada por (1.17), por lo tanto tenemos que:

$$f'(p', T'_\nu) = e^{\frac{-m_\nu c^2}{k_B T_{\nu,D}}} e^{-\frac{m_\nu v_t^2 \sin^2(\theta')}{2k_B T_\nu}} e^{-\frac{(p' - m_\nu v_t \cos(\theta'))^2}{2m_\nu k_B T_\nu}}$$

$$f'(p', T'_\nu) = e^{-\frac{m_\nu v_t^2 \sin^2(\theta')}{2k_B T_\nu}} f(p' - m_\nu v_t \cos(\theta'), T'_\nu)$$

Esta distribución se podría ver como si  $T'_\nu = T_\nu$  y, simplemente, se tiene la misma distribución de Boltzmann donde el máximo sufre un corrimiento dado por el ángulo de observación  $\theta'$ . Se ve claramente que, en dirección perpendicular al movimiento de la tierra, la función distribución es proporcional al del sistema comóvil del universo.

Podemos definir el número de neutrinos por ángulo sólido  $d\Omega'$  de momentum como:

$$\frac{dN}{d\Omega'} = \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} f'(p', T'_\nu) p'^2 dp$$

De aquí obtenemos la distribución de partículas dada por:

$$F'(p', T'_\nu) = \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} f'(p', T'_\nu) p'^2 \quad (2.12)$$

En el caso del desacoplo No-Relativista, tenemos que:

$$F'(p', T'_\nu) \propto e^{-\frac{m_\nu v_t^2 \sin^2(\theta')}{2k_B T'_\nu}} e^{-\frac{(p' - m_\nu v_t \cos(\theta'))^2}{2m_\nu k_B T'_\nu}} p'^2 \quad (2.13)$$

En la Figura (2.3) se muestra un gráfico de  $F'$  definiendo las variables adimensionales  $x = \frac{p'}{\sqrt{2m_\nu k_B T'_\nu}}$ ,  $a(\theta') = \frac{m_\nu v_t \cos(\theta')}{\sqrt{2m_\nu k_B T'_\nu}}$  y  $b = a(0)$  que representan la dependencia en el módulo y la dirección del momentum  $p'$  respectivamente. El valor máximo de  $a$  y  $b = a_{\text{máx}}$ , para el neutrino Tauónico en la época actual, es de  $b \sim 20$ . El gráfico fue amplificado por  $e^{b^2}$  para eliminar la dependencia de este parámetro y se puedan observar, claramente, como cambia la distribución con el ángulo.  $a$  determina el corrimiento de la función por ser lo único que depende de  $\theta'$ . Esto se puede interpretar como una desviación del punto máximo, y no es difícil demostrar que el máximo de  $F'$  se produce en:

$$x_{\text{máx}} = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} \quad (2.14)$$

### 2.2.2. Desacoplo Relativista

Ahora la distribución está dada por (1.5). En este caso no parece haber una forma algebraica de reducir la expresión. Gráficamente podemos ver que también se trata de un corrimiento, pero más complejo. Al igual que en el caso No-Relativista, se puede introducir un  $F'$  que, en este caso, sería:

$$F'(p', T'_\nu) \propto \frac{p'^2}{e^{\frac{\sqrt{p'^2 - 2m_\nu v_t p' \cos(\theta') + m_\nu^2 v_t^2 c}}{k_B T'_\nu}} + 1}$$

En la Figura (2.4) se muestra un gráfico de  $F'$  donde se introducen las variables adimensionales  $x = \frac{p'c}{k_B T'_\nu}$ ,  $a(\theta') = \frac{m_\nu v_t c}{k_B T'_\nu} \cos(\theta')$  y  $b = a(0)$ , que cumplen la misma función que en el caso anterior. En este caso, los valores máximos de  $a$ ,  $b = a_{\text{máx}}$ , pueden variar desde  $a_{\text{max}} \sim 1$  para el neutrino Electrónico y  $a_{\text{max}} \sim 9 \times 10^4$  para el

Muónico en la época actual.

## 2.3. Análisis

La variación de la distribución de los neutrinos está dominada, sin ninguna duda, por los parámetros  $a(\theta')$  y  $b$ . En el caso No-Relativista, se tiene que:

$$F' \propto e^{a^2-b^2} e^{-(x-a)^2} x^2 \quad (2.15)$$

Vimos que el valor de  $b \simeq 20$  y los de  $a(\theta')$  pueden ser  $-b \leq a \leq b$ . Para valores de  $a \simeq b$ , o sea observando en el sentido del movimiento de la tierra, se tiene un corrimiento de la distribución favoreciéndose valores de momentum mucho mayores ya que el máximo se produce a  $x_{\text{máx}} \simeq b$  (Ver (2.14)) y amplificado. Si ahora  $a \simeq 0$ , cercano a la dirección perpendicular al movimiento de la tierra, la distribución se empieza a parecer a la del sistema comóvil (los máximos se ubican al mismo  $x_{\text{máx}} \simeq 1$ ), pero existe un factor  $\exp(-b^2) \simeq \exp(-400) \simeq 1,9 \times 10^{-174}$  lo que significa que su detección es muchísimo menor. Y para valores de  $a \simeq -b$ , o sea observando en el sentido contrario al movimiento terrestre, la distribución sufre un corrimiento favoreciendo a valores de momentum pequeños ya que  $x_{\text{máx}} \simeq 0$  y éste se ve aún más minimizado.

En el caso Relativista, se tiene que:

$$F' \propto \frac{x^2}{e^{\sqrt{x^2-2ax+b^2}} + 1} \quad (2.16)$$

En el caso del neutrino electrónico, que corresponde al de la Figura (2.4),  $b = 1$  por lo que el efecto de este parámetro no es muy grande, permitiendo observar todo el rango posible de variaciones de su distribución. Los efectos de la variación de  $a(\theta)$  son parecidos al caso No-Relativista, pero algo más complejos por tener una dependencia exponencial dada por  $x$  y no por  $x^2$ . En el caso del neutrino muónico, el factor  $b \gg 1$ . Eso significa que podemos hacer la aproximación:

$$F' \simeq x^2 e^{-\sqrt{x^2 - 2ax + b^2}}$$

Entonces, si  $a \simeq b$ , la raíz se reduce a  $|x - b|$  haciendo que la exponencial no supere la unidad, y decaiga muy rápido cuando  $x$  se aleja de  $b$ , lo que forma una especie de **delta de Dirac**,  $\delta(x - b)$ . A medida que  $a$  disminuye, empieza a ensancharse hasta estar ampliamente dominada por  $b$ , cuando  $a \simeq 0$ , desapareciendo su distribución casi por completo. Por último, si  $a$  toma valores negativos, la distribución se vuelve aún menor ya que se aproxima a una delta de dirac como  $\delta(x + b)$  y  $x \geq 0$ .

Recordemos que la distribución  $F$  representa la cantidad de partículas que vienen de cierta dirección con cierto momentum. Esto nos muestra la pérdida de homogeneidad y de claridad de la distribución. En general, vamos a captar muchos más neutrinos si observamos hacia donde se dirige la tierra, pero la función de distribución se altera mucho más con respecto a la del sistema comóvil. En particular, en el caso relativista se recibirán una gran cantidad de neutrinos con igual momentum en esta dirección por tener una distribución parecida a una delta. A medida que nos alejemos de esta dirección, la distribución empieza a recuperar su forma original, pero se reciben muchas menos partículas desapareciendo casi totalmente cuando se observa en contra del movimiento terrestre.

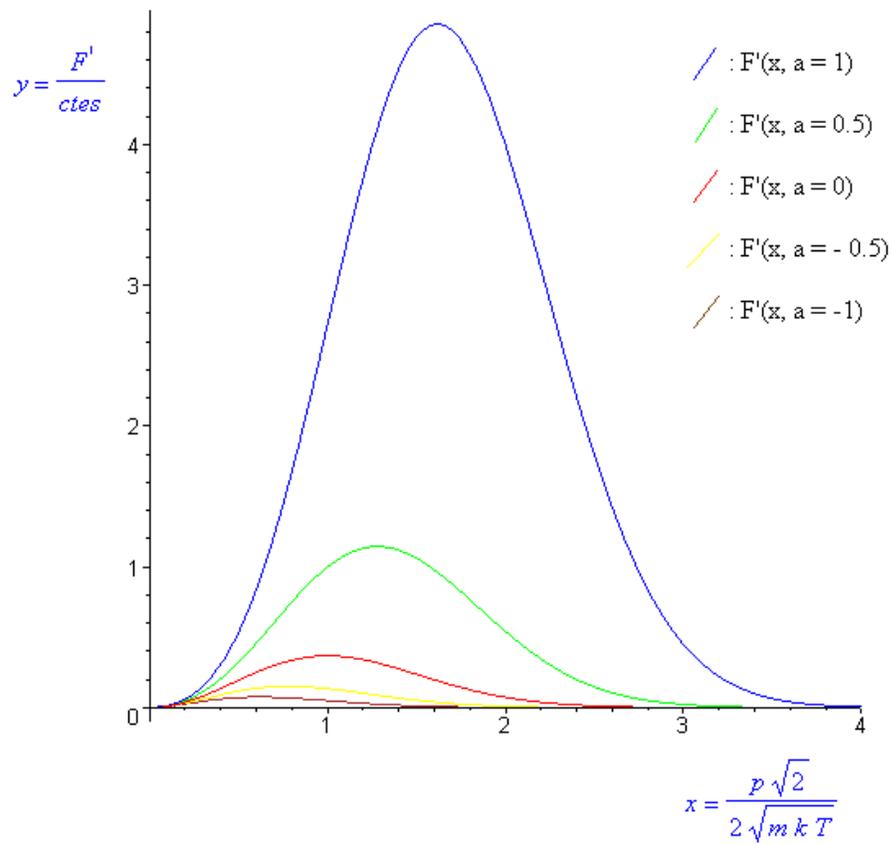


Figura 2.3: Distribución de los neutrinos desacoplados siendo No-Relativistas (Ec 2.15) para distintos valores de  $a$ .  $F$  también está escalada por el parámetro  $b$ . A modo de ejemplo, la distribución de los neutrinos en el sistema comóvil corresponde a  $a = 0$  (Rojo), pero magnificado en un factor de  $\exp(b^2) \simeq \exp(400)$ . Por lo tanto, la función distribución se reduce considerablemente por el movimiento terrestre.

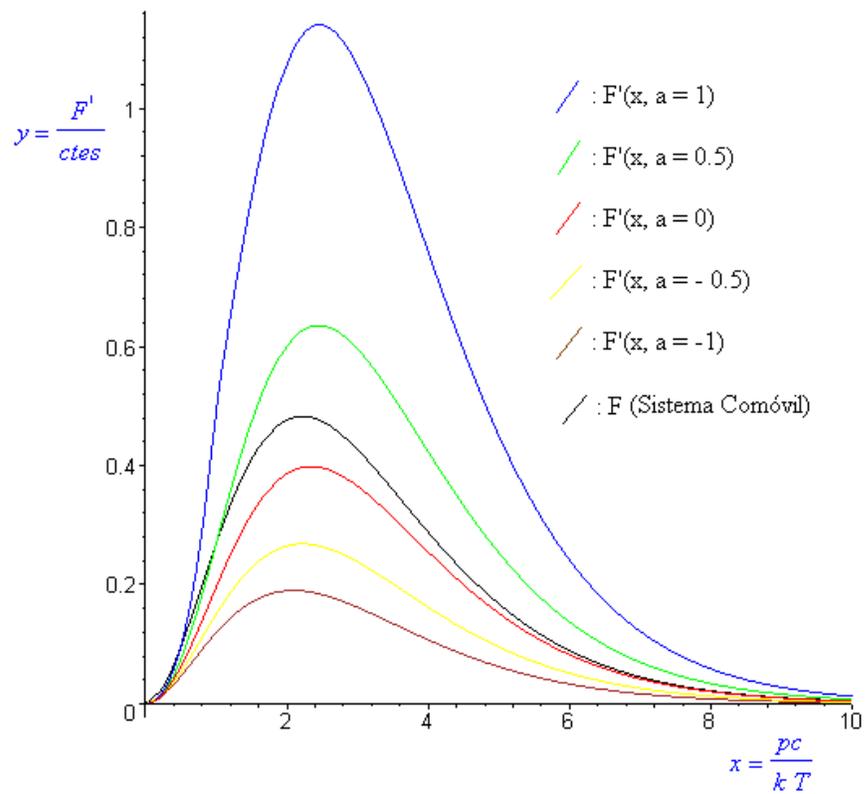


Figura 2.4: Distribución de los neutrinos desacoplados siendo Relativistas (Ec 2.16) para distintos valores de  $a$  y  $b \sim 1$  que corresponde al neutrino electrónico. La curva negra representa a la distribución en el sistema comóvil. Para el neutrino Muónico el efecto del parámetro  $b$  es mucho más grande ya que, al igual que en el caso relativista, se produce una atenuación de la distribución.

# Capítulo 3

## Bariogénesis Primordial.

Vimos que en el caso de los neutrinos del **CNB**, una violación de Lorentz no afectaba notoriamente los resultados usuales. Es por eso que se necesita de un fenómeno que ocurra a épocas más tempranas ya que las energías involucradas son mucho mayores. El fenómeno que estudiaremos es la Bariogénesis, cuando los bariones y anti-bariones aparecieron para que luego se formara el universo que conocemos.

Para que la bariogénesis sea posible, se necesita de un bosón  $X$  que origine los bariones y antibariones al decaer. Además se deben cumplir tres condiciones que permiten la asimetría bariónica actual. Estas son [13] [17]:

**a)** Violación al número de bariones. Eso significa que, a medida que ocurre la expansión del universo, el factor:

$$B = \frac{n_b - n_{\bar{b}}}{s}$$

donde  $n_b$ ,  $n_{\bar{b}}$  y  $s$  son el número de bariones y antibariones y la entropía por volumen comóvil, debe variar. Si no existiera una violación de  $B$ , la asimetría estaría dada solamente por las condiciones iniciales ya que  $B = cte$ . Para que exista una violación al número de bariones y considerando un modelo donde  $X = \bar{X}$ , debe haber reacciones del tipo:

$$X \longleftrightarrow b + b$$

$$X \longleftrightarrow \bar{b} + \bar{b}$$

**b)** Violación de las simetrías C y CP (o violación de T y simetría de P al mantener simetría CPT). Esto hace que los bariones y antibariones cumplan con la misma física (igual masa, igual corrección de violación de Lorentz, etc) y que la tasa de decaimiento del bosón sea distinta (en un pequeño factor) a la del decaimiento inverso. Si no existen estas violaciones, se producirán tantos bariones como antibariones sin haber una preferencia por la materia sobre la antimateria. La violación de CP (o de T) se puede interpretar, en términos de la amplitud de probabilidad, como:

$$| M(X \rightarrow b + b) |^2 - | M(b + b \rightarrow X) |^2 = \epsilon_1$$

$$| M(\bar{b} + \bar{b} \rightarrow X) |^2 - | M(X \rightarrow \bar{b} + \bar{b}) |^2 = \epsilon_2$$

Donde  $1 \gg \epsilon_i > 0$  permite una inclinación a favor de la materia. Como también queremos mantener CPT (que una reacción sea igual a la inversa de la misma reacción con las cargas conjugadas), se debe cumplir que:

$$| M(X \rightarrow b + b) |^2 = | M(\bar{b} + \bar{b} \rightarrow X) |^2$$

$$| M(X \rightarrow \bar{b} + \bar{b}) |^2 = | M(b + b \rightarrow X) |^2$$

De todo esto, podemos deducir el modelo más simple, que sería:

$$\begin{aligned} | M(X \rightarrow b + b) |^2 &= | M(\bar{b} + \bar{b} \rightarrow X) |^2 = \frac{1}{2}(1 + \epsilon) | M_0 |^2 \\ | M(X \rightarrow \bar{b} + \bar{b}) |^2 &= | M(b + b \rightarrow X) |^2 = \frac{1}{2}(1 - \epsilon) | M_0 |^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Donde  $| M_0 |^2$  es constante.

c) Condición fuera del equilibrio. Si existe equilibrio, se tiene que  $n_b = n_{\bar{b}}$  permanentemente, y la cantidad de materia y antimateria sería siempre la misma. Un proceso fuera del equilibrio está descrito por la ecuación de Boltzmann [13]:

$$\hat{\mathbf{L}}[f] = \hat{\mathbf{C}}[f]$$

Donde  $\hat{\mathbf{L}}$  es el operador de Liouville,  $\hat{\mathbf{C}}$  es el operador de colisión y  $f$  es la función de distribución. El operador de Liouville corresponde a:

$$\hat{\mathbf{L}} = p^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^\mu p^\nu p^\rho \frac{\partial}{\partial p^\mu}$$

y el operador de colisión debe considerar todas las combinaciones del proceso posibles. Evaluando:

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^\mu p^\nu p^\rho \frac{\partial f}{\partial p^\mu} = \hat{\mathbf{C}}[f]$$

Usando la métrica de *FRW* y considerando que  $p^\mu = [E, v_{max}\vec{p}]$  y  $x^\mu = [v_{max}t, \vec{x}]$ , se reduce a:

$$\frac{E}{v_{max}} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{R}}{R} v_{max} |\vec{p}|^2 \frac{\partial f}{\partial E} = \hat{\mathbf{C}}[f]$$

Aplicando  $\frac{gv_{max}}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3p}{E}$ , se obtiene:

$$\frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\partial f}{\partial t} d^3p - H(t) \frac{gv_{max}^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{p^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E} d^3p = \frac{gv_{max}}{(2\pi\hbar)^3} \int \hat{\mathbf{C}}[f] \frac{d^3p}{E}$$

Donde  $H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$  es la constante de Hubble. Integrando por partes el segundo término de la izquierda y usando la definición de la densidad del número de partículas  $n(t) = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \int f d^3p$ , nos queda:

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} + 3H(t)n(t) = \frac{gv_{max}}{(2\pi\hbar)^3} \int \hat{\mathbf{C}}[f] \frac{d^3p}{E}$$

Donde el término de la derecha representa al estado fuera del equilibrio. Si éste se anula, se obtiene  $n(t) = n_0 R^{-3}(t)$  que es el caso de una evolución en equilibrio.

Como en este trabajo tratamos efectos que traen una corrección a la invarianza de Lorentz, pueden existir rangos de energía donde la reacción esté prohibida. Un método que nos da estos rangos es la *Energía Umbral* [11] [19] [21] [22], que consiste en lo siguiente:

La energía total de un sistema de muchas partículas es:

$$E = \sum_i E_i(|p_i|) + \xi_j \left( p_0^j - \sum_i p_i^j \right)$$

donde  $\xi_j$  son multiplicadores de Lagrange que imponen la conservación del momentum,  $i$  rotula a cada partícula y  $j$  representa las componentes vectoriales. Derivando con respecto a  $p_i^j$ , para obtener la condición para minimizar  $E$ , obtenemos:

$$\frac{\partial E_i}{\partial p_i^j} \equiv v_i^j = \xi_j$$

Por lo tanto,  $E$  es mínimo cuando la magnitud y sentido de la velocidad es igual para todas las partículas. Llamaremos a esta energía  $E_{min} = \sum_i E_i$  donde todas las partículas  $i$  van a la misma velocidad. Ahora, pensando en dos partículas que colisionan para formar otras, podemos expresar la energía como:

$$E = E_1(\vec{p} - |p_2|\hat{n}) + E_2(|p_2|) + \chi(\hat{n} - 1)$$

donde  $\hat{n}$  es el vector normalizado de  $\vec{p}_2$ ,  $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$  es el momentum total y  $\chi$  es otro multiplicador de Lagrange que impone la normalización de  $\hat{n}$ . Maximizando  $E$  con respecto a  $\hat{n}$ , obtenemos:

$$\hat{n} = \frac{\vec{v}_1 |p_2|}{2\chi}$$

Como  $|\hat{n}| = 1$ , se tiene que  $\chi = \pm \frac{\vec{v}_1 |p_2|}{2}$ , por lo tanto:

$$\hat{n} = \pm \frac{\vec{v}_1}{v_1}$$

Evaluando en la expresión de  $E$ , se puede ver que la maximización ocurre cuando  $\hat{n} = -\frac{\vec{v}_1}{v_1}$ , o sea cuando ocurre una colisión frontal. Este caso se representará por  $E_{max} = E_a + E_b$  donde  $a$  y  $b$  son partículas que colisionan frente a frente.

Finalmente, la condición de Umbral está dada por:

$$E_{max} \geq E_{min}$$

Como  $a$  y  $b$  van uno hacia el otro y las partículas  $i$  van en la misma dirección, nos queda:

$$E_a + E_b \geq \sum_i E_i \quad p_a - p_b = \sum_i p_i \quad (3.2)$$

### 3.1. Zonas Permitidas de las Reacciones

#### 3.1.1. $X \longrightarrow b_1 + b_2$

$b_i$  puede ser un barión o antibarión. Usando (3.2):

$$E_X \geq E_{b_1} + E_{b_2} = 2E_b$$

$$p_X = p_{b_1} + p_{b_2} = 2p_b$$

ya que al ser el mismo tipo de partícula y tener la misma velocidad, se tiene que  $p_{b_1} = p_{b_2} = p_b$  y  $E_{b_1} = E_{b_2} = E_b$ . Como se cumple una relación de dispersión de la forma  $E^2 = v_{max}^2 p^2 + m^2 c^4$ , tenemos::

$$(v_b^2 - v_X^2) p_X^2 \leq (m_X^2 - 4m_b^2) c^4$$

Si  $v_b > v_X$  se tiene que:

$$p_X \leq \sqrt{\frac{m_X^2 - 4m_b^2}{(v_b^2 - v_X^2)}} c^2 \quad p_b \leq \sqrt{\frac{m_X^2 - 4m_b^2}{4(v_b^2 - v_X^2)}} c^2 \quad (3.3)$$

Dando una restricción superior importante al momentum la que estudiaremos con

más detalle más adelante. Si usamos  $m_X \gg m_b$  y  $v_b^2 - v_X^2 = (v_b + v_X)(v_b - v_X) \simeq 2c^2 \partial\alpha$  con  $\partial\alpha = \alpha_X - \alpha_b$ , se reduce a:

$$p_X \leq \frac{m_X c}{\sqrt{2\partial\alpha}} \quad p_b \leq \frac{m_X c}{2\sqrt{2\partial\alpha}} \quad (3.4)$$

Pero si  $v_b \leq v_X$  no se tiene ninguna cota, ya que  $p_X^2, p_b^2 \geq 0$ .

### 3.1.2. $b_1 + b_2 \longrightarrow X$

Haciendo el mismo desarrollo usando (3.2), se llega a:

$$E_{b_1} + E_{b_2} \geq E_X$$

$$p_{b_1} - p_{b_2} = p_X$$

$$4v_b^2 p_{b_1}^2 - 4v_b^2 p_X p_{b_1} + p_X^2 (v_b^2 - v_X^2) - m_X^2 c^4 \geq 0$$

Donde se usó la aproximación  $m_X \gg m_b$ . La solución corresponde, en  $p_{b_1}$ , a una parábola con un mínimo. Eso significa que los ceros nos darán las cotas de la reacción. Si definimos  $f(p_{b_1}) = ap_{b_1}^2 + bp_{b_1} + c$ , nos damos cuenta que  $a = 4v_b^2$ ,  $b = -4v_b^2 p_X$  y  $c = p_X^2 (v_b^2 - v_X^2) - m_X^2 c^4$  donde los ceros están dados por:

$$p_{b_1,0} = \frac{-b \pm \Delta}{2a} \quad \Delta^2 = b^2 - 4ac \quad (3.5)$$

Si  $\Delta^2 < 0$ , no hay ceros y  $f(p_b) \geq 0$  se cumple siempre y no habrían cotas. En cambio, si  $\Delta^2 \geq 0$  existe una región donde la reacción está prohibida. Evaluando, se ve que  $\Delta^2 = 16v_b^2 E_X^2 > 0$ , o sea existe una cota. Los ceros son:

$$p_{b_1,0} = \frac{v_b p_X \pm E_X}{2v_b}$$

Por lo tanto, las cotas para esta reacción son:

$$p_{b_1} \geq \frac{v_b p_X + \sqrt{v_X^2 p_X^2 + m_X^2 c^4}}{2v_b} \quad \vee \quad p_{b_1} \leq \frac{v_b p_X - \sqrt{v_X^2 p_X^2 + m_X^2 c^4}}{2v_b} \quad (3.6)$$

Como  $p_{b_1}$  y  $p_{b_2}$  se relacionan por  $p_{b_1} - p_{b_2} = p_X$ , que representan las dos partículas cuando colisionan directamente de frente, ambos valores deben tener el mismo signo. Comparando:

Para la primera cota:

$$p_{b_1} \geq \frac{v_b p_X + \sqrt{v_X^2 p_X^2 + m_X^2 c^4}}{2v_b} \quad p_{b_2} \geq \frac{-v_b p_X + \sqrt{v_X^2 p_X^2 + m_X^2 c^4}}{2v_b} \quad (3.7)$$

Si  $p_X \geq 0$ , claramente  $p_{b_1} \geq 0$  siempre, pero  $p_{b_2}$  sólo lo será para todo  $p_X$  si  $(v_b^2 - v_X^2)p_X^2 \leq m_X^2 c^4$ . Si  $p_X \leq 0$ ,  $p_{b_2} \geq 0$  y  $p_{b_1}$  lo será si  $(v_b^2 - v_X^2)p_X^2 \leq m_X^2 c^4$ .

Para la segunda cota:

$$p_{b_1} \leq \frac{v_b p_X - \sqrt{v_X^2 p_X^2 + m_X^2 c^4}}{2v_b} \quad p_{b_2} = p_{b_1} - p_X \leq \frac{-v_b p_X - \sqrt{v_X^2 p_X^2 + m_X^2 c^4}}{2v_b} \quad (3.8)$$

En este caso, si  $p_X \geq 0$ ,  $p_{b_2} \leq 0$ , pero  $p_{b_1}$  lo será sólo si  $(v_b^2 - v_X^2)p_X^2 \leq m_X^2 c^4$ . Lo mismo pasa si  $p_X < 0$ . Por lo tanto, la condición para que siempre se cumple que  $p_{b_1}$  y  $p_{b_2}$  tengan el mismo signo es que:

$$(v_b^2 - v_X^2)p_X^2 \leq m_X^2 c^4 \quad (3.9)$$

Que corresponde a la condición del decaimiento  $X \longrightarrow b_1 + b_2$ . Eso significa que los bosones  $X$  producidos cumplirán con las condiciones para volver a decaer. Analizando lo anterior, se puede simplificar (3.6), considerando  $|p_X| = |p_{b_{max}}| - |p_{b_{min}}|$ , en:

$$|p_{b_{max}}| \geq \frac{v_b |p_X| + E_X}{2v_b} \quad |p_{b_{min}}| \geq \frac{-v_b |p_X| + E_X}{2v_b} \quad (3.10)$$

Siempre que  $|p_{b_{max}}| \geq |p_{b_{min}}|$ , pero como esta condición siempre se cumple,  $p_{b_1}$  puede encontrarse en cualquiera de las dos regiones. Por lo tanto, la cota se puede

simplificar a:

$$p_{b_1} \geq \frac{-v_b |p_X| + E_X}{2v_b} \quad (3.11)$$

Que, en conjunto con (3.9), representa la zona permitida para la reacción. Ahora que tenemos nuestras cotas, podemos hacer nuestros cálculos.

## 3.2. Factor de Colisión y Condición Fuera del Equilibrio

El factor de colisión corresponde a:

$$\frac{g_{v_{max}}}{(2\pi\hbar)^3} \int \hat{C}[f] \frac{d^3p}{E} = - \int (2\pi\hbar)^4 \delta^4(p_X - p_{b_1} - p_{b_2}) \Upsilon_{X,b_1,b_2} d\Pi_1 d\Pi_2 d\Pi_X \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{X,b_1,b_2} = & f_X (|M(X \rightarrow b_1 + b_2)|^2 + |M(X \rightarrow \bar{b}_1 + \bar{b}_2)|^2) \\ & - f_{b_1} f_{b_2} |M(b_1 + b_2 \rightarrow X)|^2 - f_{\bar{b}_1} f_{\bar{b}_2} |M(\bar{b}_1 + \bar{b}_2 \rightarrow X)|^2 \end{aligned}$$

Donde  $f_X$ ,  $f_{b_i}$  y  $f_{\bar{b}_i}$  son la función distribución del Bosón, bariones y antibariones respectivamente, y  $d\Pi_i = \frac{g_{b_i} v_b}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3 p_{b_i}}{2E_{b_i}}$  y  $d\Pi_X = \frac{g_X v_X}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3 p_X}{2E_X}$ . Las amplitudes están dadas por el modelo mencionado anteriormente pero se anulan fuera del rango de las cotas calculadas. Esta expresión resulta de suponer que la distribución del bosón, los bariones y antibariones se aproximan a una distribución de Boltzmann del tipo:

$$\begin{aligned} f_X &= e^{-\frac{E_X - \mu_X}{k_B T}} \\ f_{b_i} &= e^{-\frac{E_{b_i} - \mu}{k_B T}} \\ f_{\bar{b}_i} &= e^{-\frac{E_{\bar{b}_i} + \mu}{k_B T}} \end{aligned}$$

Donde  $\mu_X$ ,  $\mu$  son el potencial químico del bosón y el barión. Utilizamos esta

aproximación para simplificar las expresiones del factor de colisión. Esto es aceptable si estamos en ausencia de condensados de Fermi o Bose ya que sólo produce un pequeño factor correctivo al estar en el régimen  $T \gtrsim \mu_i$  donde las tres funciones de distribución son muy parecidas. Además se aproxima  $1 \pm f \sim 1$  por ser muy pequeña.

Debemos mencionar que el bosón no está desacoplado, ya que si no es así, el efecto sobre la asimetría bariónica sería pequeño por ser prácticamente No-Relativista ( $T \lesssim m_X$ ). Es por esto que los bosones, bariones y antibariones aún están en equilibrio químico con el baño térmico. Por esto mismo se tiene que  $\mu_{b_i} = -\mu_{\bar{b}_i} = \mu$ .

Analizando el producto  $f_{b_1} f_{b_2}$ , podemos ver que:

$$f_{b_1} f_{b_2} = e^{-\frac{E_{b_1} + E_{b_2}}{k_B T}} e^{\frac{2\mu}{k_B T}} = e^{-\frac{E_X}{k_B T}} e^{\frac{2\mu}{k_B T}}$$

$$f_{b_1} f_{b_2} = f_X^{eq} e^{\frac{2\mu}{k_B T}}$$

Donde  $f_X^{eq}$  es la distribución del bosón con equilibrio químico ( $\mu_X = 0$ ). De la misma forma para el producto  $f_{\bar{b}_1} f_{\bar{b}_2}$ , se tiene:

$$f_{\bar{b}_1} f_{\bar{b}_2} = f_X^{eq} e^{-\frac{2\mu}{k_B T}}$$

Con estas relaciones y usando nuestras amplitudes de probabilidad, queda:

$$\frac{g_{v_{max}}}{(2\pi\hbar)^3} \int \hat{C}[f] \frac{d^3 p}{E} = - \int (2\pi\hbar)^4 |M_0|^2 \delta^4(p_X - p_{b_1} - p_{b_2}) \times [f_X - f_X^{eq}] d\Pi_1 d\Pi_2 d\Pi_X \quad (3.13)$$

Donde se consideró que  $\mu \ll k_B T$  y lo dejamos a primer orden en  $\mu$  y  $\epsilon$ . Como el término  $f_X$  viene del decaimiento del bosón y  $f_X^{eq}$  del decaimiento inverso, tienen rangos de integración distintos. Es por esto que debemos separarlos al integrar. Al hacer esto, resulta la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} + 3H(t)n(t) = \frac{g_b^2 g_X v_X}{4v_b (2\pi\hbar)^5} |M_0|^2 \left( I_{b_1, b_2, X}^{Neq} - I_{b_1, b_2, X}^{eq} \right) \quad (3.14)$$

$$I_{b_1, b_2, X}^a = \int \frac{f_X^a \delta^4(p_X - p_{b_1} - p_{b_2})}{2E_{b_1} E_{b_2} E_X} v_b^3 d^3 p_{b_1} d^3 p_{b_2} d^3 p_X$$

Donde  $I_{b_1, b_2, X}^{ea}$  y  $I_{b_1, b_2, X}^{Neq}$  contienen la distribución con y sin equilibrio respectivamente y  $p_i = [E_i; v_{max, i} \vec{p}_i]$ . Como las dos integrales sólo se diferencian por las regiones de energías permitidas, resolveremos ambas de forma general y luego las diferenciaremos. Para resolver las integrales, usamos la relación:

$$\frac{v_b^3 d^3 p_{b_2}}{2E_{b_2}} = d^4 p_{b_2} \delta(p_{b_2}^2 - m_{b_2}^2 c^4) \Theta(E_{b_2})$$

Luego integramos en  $d^4 p_{b_2}$  usando la  $\delta^4(p_X - p_{b_1} - p_{b_2})$  que, simplemente, es reemplazar  $p_{b_2} = p_X - p_{b_1}$  quedando:

$$I_{b_1, b_2, X}^a = \int \frac{f_X^a \delta((p_X - p_{b_1})^2 - m_{b_2}^2 c^4) \Theta(E_X - E_{b_1})}{E_{b_1} E_X} |\vec{p}_{b_1}|^2 \sin(\theta_1) dp_{b_1} d\theta_1 d\phi_1 d^3 p_X$$

Ahora usamos la segunda delta para integrar en  $\phi_1$ . Usamos la identidad:

$$\delta(F(\phi_1)) = \sum_{\phi_{1,i}} \frac{1}{|F'(\phi_{1,i})|} \delta(\phi_1 - \phi_{1,i})$$

Con:

$$F(\phi_1) = p_X^2 + p_{b_1}^2 - 2p_X p_{b_1} - m_{b_1}^2 c^4$$

$$F(\phi_1) = m_X^2 c^4 - 2E_X E_{b_1} + 2v_b v_X |\vec{p}_{b_1}| |\vec{p}_X| (\cos(\theta_X) \cos(\theta_1) + \sin(\theta_X) \sin(\theta_1) \cos(\phi_1))$$

$$F'(\phi_1) = -2v_b v_X |\vec{p}_{b_1}| |\vec{p}_X| \sin(\theta_X) \sin(\theta_1) \sin(\phi_1)$$

Se puede ver que existen 2 valores de  $\phi_{1,i}$ ; uno entre 0 y  $\pi$ , donde  $\sin(\phi_{1,i}) > 0$ , y otro entre  $\pi$  y  $2\pi$ , donde  $\sin(\phi_{1,i}) < 0$  igual en módulo al anterior. Como  $|F'(\phi_{1,i})|$  es simétrico, evaluamos en uno de ellos y multiplicamos por 2 quedando:

$$\delta(F(\phi_1)) = \frac{2}{|F'(\phi_{1,1})|} \delta(\phi_1 - \phi_{1,1}) \Theta(F'^2(\phi_{1,1}))$$

$$I_{b_1, b_2, X}^a = 2 \int \frac{f_X^a \Theta(E_X - E_{b_1}) \Theta(F'^2(\phi_{1,1}))}{E_{b_1} E_X |F'(\phi_{1,1})|} |\vec{p}_{b_1}|^2 |\vec{p}_X|^2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_X) dp_{b_1} d\theta_1 dp_X d\theta_X d\phi_X$$

Donde  $\Theta(F'^2(\phi_{1,1}))$  aparece para asegurar que  $\cos^2(\phi_1) \leq 1$ . Además, el valor de  $\phi_{1,1}$  cumple con:

$$2(E_X E_{b_1} - v_b v_X |\vec{p}_{b_1}| |\vec{p}_X| (\cos(\theta_X) \cos(\theta_1) + \sin(\theta_X) \sin(\theta_1) \cos(\phi_{1,1}))) = m_X^2 c^4$$

Por lo tanto:

$$|F'(\phi_{1,1})| = \sqrt{a \cos^2(\theta_1) + b \cos(\theta_1) + c}$$

Con:

$$a = -(2v_b v_X |\vec{p}_{b_1}| |\vec{p}_X|)^2$$

$$b = -4v_b v_X |\vec{p}_{b_1}| |\vec{p}_X| \cos(\theta_X) (-2E_X E_{b_1} + m_X^2 c^4)$$

$$c = (2v_b v_X |\vec{p}_{b_1}| |\vec{p}_X| \sin(\theta_X))^2 - m_X^4 c^8 - 4E_X^2 E_{b_1}^2 + 4E_X E_{b_1} m_X^2 c^4$$

Entonces, la integral en  $\theta_1$  se reduce a:

$$\int_{-1}^1 \frac{\Theta(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

Con  $x = \cos(\theta_1)$ . La parábola  $ax^2 + bx + c$  tiene un máximo ( $a < 0$ ) y sus ceros están dentro del intervalo  $[-1, 1]$  lo que significa que el intervalo de la integral anterior se puede extender a  $[-\infty, \infty]$  sin afectar en nada gracias al Heaviside. Usando la relación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Theta(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{\pi}{\sqrt{-a}} \Theta(b^2 - 4ac)$$

nuestra integral queda:

$$I_{b_1, b_2, X}^a = \frac{\pi}{v_b^3 v_X} \int \frac{f_X^a \Theta(E_X - E_{b_1}) \Theta(b^2 - 4ac)}{E_X p_X} dE_{b_1} d^3 p_X \quad (3.15)$$

Donde hemos usado que  $E_{b_1} = v_b p_{b_1}$  por tener masa despreciable. Analizando el segundo Heaviside, podemos ver que su argumento es positivo si:

$$\frac{E_X - v_X p_X}{2} \leq E_{b_1} \leq \frac{E_X + v_X p_X}{2}$$

Que siempre es válido para el argumento del primer Heaviside. Ahora debemos distinguir para cada proceso de la reacción.

### 3.2.1. Decaimiento de $X$

( $a = Neq$ ) Por (3.4), tenemos la cota:

$$E_{b_1} \leq \frac{m_X c v_b}{2\sqrt{2\partial\alpha}} \quad \vee \quad p_X \leq \frac{m_X c}{\sqrt{2\partial\alpha}} \quad \text{Si: } v_b > v_X \quad (3.16)$$

$$E_{b_1} < \infty \quad \vee \quad p_X < \infty \quad \text{Si: } v_b \leq v_X \quad (3.17)$$

Pero también debe cumplir con los límites impuestos por los Heaviside de la integral. Con algo de análisis, se puede ver que la cota dada por la **Energía Umbral** siempre es mayor que el límite inferior de los Heaviside. Por lo tanto, los límites de integración son:

$$\frac{E_X - v_X p_X}{2} \leq E_{b_1} \leq \frac{E_X + v_X p_X}{2} \quad (3.18)$$

Si:  $(v_b \leq v_X)$  o  $\left[ (v_b > v_X) \text{ y } \left( p_X \leq \frac{m_X c}{2\sqrt{2\partial\alpha}} \right) \right]$

$$\frac{E_X - v_X p_X}{2} \leq E_{b_1} \leq \frac{m_X c v_b}{2\sqrt{2\partial\alpha}} \quad (3.19)$$

Si:  $\left[ (v_b > v_X) \text{ y } \left( \frac{m_X c}{2\sqrt{2\partial\alpha}} < p_X < \frac{m_X c}{\sqrt{2\partial\alpha}} \right) \right]$

Donde hemos usado que  $\partial\alpha \ll 1$ . Por lo tanto, evaluando en (3.15) cuando  $v_b \leq v_X$ , nos queda:

$$I_{b_1, b_2, X}^{Neq}(v_b \leq v_X) = \frac{\pi}{v_b^3} \int \frac{f_X}{E_X} d^3 p_X \quad \text{Con: } 0 \leq p_X \leq \infty \quad (3.20)$$

Que casi no tiene diferencia con una relación de dispersión sin violación de Lorentz. En cambio, si  $v_b > v_X$  nos queda:

$$I_{b_1, b_2, X}^{Neq}(v_b > v_X) = \frac{\pi}{v_b^3 v_X} \times \left[ v_X \int_A \frac{f_X}{E_X} d^3 p_X + y v_b \int_B \frac{f_X}{E_X p_X} d^3 p_X - \frac{1}{2} \int_B \frac{f_X}{p_X} d^3 p_X + \frac{v_X}{2} \int_B \frac{f_X}{E_X} d^3 p_X \right]$$

Con  $A \rightarrow (p_X \leq y)$  y  $B \rightarrow (y \leq p_X \leq 2y)$  donde  $y = \frac{m_X c}{2\sqrt{2}\partial\alpha}$ . Podemos ver que surgen muchos factores extras debido a la violación de Lorentz y sus rangos de energía prohibidos. Si llamamos a  $C \rightarrow (p_X \geq 2y)$  y consideramos que en la región  $B$  y  $C$  se tiene que  $E_X = v_X p_X$  nos queda:

$$I_{b_1, b_2, X}^{Neq}(v_b > v_X) = \frac{\pi}{v_b^3} \times \left[ \int \frac{f_X}{E_X} d^3 p_X + \frac{4\pi y v_b}{v_X^3} \int_B f_X dE_X - \frac{4\pi}{v_X^3} \int_{B+C} E_X f_X dE_X \right] \quad (3.21)$$

Donde el rango de la primera integral es para todo momentum.

### 3.2.2. Decaimiento Inverso de $X$

( $a = eq$ ) En este caso, la cota está dada por (3.9) y (3.11). o sea:

$$E_{b_1} \geq \frac{-v_b p_X + E_X}{2}$$

Con:

$$p_X \leq \frac{m_X c}{\sqrt{2}\partial\alpha} \quad \text{Si: } v_b > v_X$$

$$p_X \leq \infty \quad \text{Si: } v_b \leq v_X$$

Entonces, los límites de  $E_{b_1}$ , considerando los Heaviside de la integral son:

$$\frac{E_X - v_X p_X}{2} \leq E_{b_1} \leq \frac{E_X + v_X p_X}{2} \quad \text{Si: } v_b > v_X \quad (3.22)$$

$$\frac{E_X - v_b p_X}{2} \leq E_{b_1} \leq \frac{E_X + v_X p_X}{2} \quad \text{Si: } v_b \leq v_X \quad (3.23)$$

Por lo tanto, para  $v_b > v_X$ , queda:

$$I_{b_1, b_2, X}^{eq}(v_b > v_X) = \frac{\pi}{v_b^3} \int_{A+B} \frac{f_X^{eq}}{E_X} d^3 p_X$$

$$I_{b_1, b_2, X}^{eq}(v_b > v_X) = \frac{\pi}{v_b^3} \left[ \int \frac{f_X^{eq}}{E_X} d^3 p_X - \frac{4\pi}{v_X^3} \int_C f_X^{eq} E_X dE_X \right] \quad (3.24)$$

Donde hemos usado que en la región  $C$  el bosón es relativista. Y para  $v_b \leq v_X$ :

$$I_{b_1, b_2, X}^{eq}(v_b \leq v_X) = \frac{\pi(v_b + v_X)}{2v_b^3 v_X} \int \frac{f_X^{eq}}{E_X} d^3 p_X$$

$$I_{b_1, b_2, X}^{eq}(v_b \leq v_X) = \frac{\pi}{v_b^3} \int \frac{f_X^{eq}}{E_X} d^3 p_X \quad (3.25)$$

Donde usamos que  $\frac{v_X - v_b}{v_X} \ll 1$ .

### 3.2.3. Ecuación Diferencial

Las funciones de distribución dentro y fuera del equilibrio se relacionan por  $f_X = f_X^{eq} e^{\frac{\mu_X}{k_B T}}$ . Ahora evaluaremos en (3.14).

a) Para  $v_b \leq v_X$  usamos (3.20) y (3.25):

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} + 3H(t)n(t) = \frac{g_b^2 g_X v_X \pi}{4v_b^4 (2\pi\hbar)^5} |M_0|^2 \left( e^{\frac{\mu_X}{k_B T}} - 1 \right) \int \frac{f_X^{eq}}{E_X} d^3 p_X$$

b) Para  $v_b > v_X$  usamos (3.21) y (3.24)::

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} + 3H(t)n(t) = \frac{g_b^2 g_X v_X \pi}{4v_b^4 (2\pi\hbar)^5} |M_0|^2 \times$$

$$\left[ \left( e^{\frac{\mu_X}{k_B T}} - 1 \right) \int \frac{f_X^{eq}}{E_X} d^3 p_X + e^{\frac{\mu_X}{k_B T}} \frac{4\pi}{v_X^3} \left( yv_b \int_B f_X^{eq} dE_X - \int_{B+C} E_X f_X^{eq} dE_X \right) + \frac{4\pi}{v_X^3} \int_C f_X^{eq} E_X dE_X \right]$$

Como la única parte que depende del tiempo en  $f_X^{eq}$  es la temperatura  $T$ , si la derivamos, se tiene  $\frac{\partial f_X^{eq}}{\partial t} = -\frac{\partial \beta}{\partial t} E_X f_X^{eq}$ , con  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ . Entonces, derivando la ecuación diferencial y recordando que  $n_X^{eq} = \frac{g_X}{(2\pi\hbar)^3} \int f_X^{eq} d^3 p_X$ , con  $n_X = e^{\beta\mu_X} n_X^{eq}$ , nos queda:

a) Para  $v_b \leq v_X$ :

$$\ddot{n}(t) + 3 \left[ \dot{H}(t)n(t) + H(t)\dot{n}(t) \right] = M(t) [n_X^{eq}(t) - n_X(t)] + \mu_X \frac{\partial \beta}{\partial t} \frac{e^{\beta\mu_X}}{e^{\beta\mu_X} - 1} [\dot{n}(t) + 3H(t)n(t)]$$

b) Para  $v_b > v_X$ :

$$\begin{aligned} \ddot{n}(t) + 3 \left[ \dot{H}(t)n(t) + H(t)\dot{n}(t) \right] &= M(t) \left[ n_X^{eq}(t) - n_X(t) + \frac{4\pi g_X}{v_X^3 (2\pi\hbar)^3} \frac{\partial J}{\partial \beta} \right] \\ &+ \mu_X \frac{\partial \beta}{\partial t} \frac{e^{\beta\mu_X}}{e^{\beta\mu_X} - 1} [\dot{n}(t) + 3H(t)n(t)] \end{aligned}$$

Con  $M(t) = \frac{g_b^2 v_X}{16\pi v_b^4 \hbar^2} |M_0|^2 \frac{\partial \beta}{\partial t}$  y

$$J = e^{\beta\mu_X} \left( yv_b \int_B f_X^{eq} dE_X - \int_{B+C} E_X f_X^{eq} dE_X \right) + \int_C E_X f_X^{eq} dE_X$$

Que es el factor que representa el efecto de una violación de Lorentz. Desarrollando:

$$J = \frac{1}{\beta^2} e^{-\beta y v_b} \left[ e^{-\beta y v_b} (2\beta y v_b + 1) - e^{\beta\mu_X} (\beta y v_b e^{-\beta y v_b} + 1) \right]$$

Sabemos que  $\beta^{-1} \sim yv_b$ , pero si las reacciones que producen la bariogénesis son suficientemente rápidas, se tiene que  $\mu_X \ll \beta^{-1}$ . Entonces:

$$J \simeq \frac{1}{\beta^2} e^{-2\beta y v_b} (2\beta y v_b + 1)$$

$$J \sim \frac{1}{\beta^2} = (k_B T)^2$$

$$\frac{\partial J}{\partial \beta} \sim -\frac{1}{\beta^3} = -(k_B T)^3$$

Como  $\frac{\partial \beta}{\partial t} = \beta H(t)$ , entonces  $M(t) = \frac{g_b^2 v_X}{16\pi v_b^4 \hbar^2} |M_0|^2 \beta H(t) \geq 0$ . Eso significa que:

$$F(\ddot{n}_X, \dot{n}_X, n_X, \mu_X) \propto -H(t)T^2 \propto -T^4$$

Donde  $F$  es la ecuación diferencial usual que representa la bariogénesis sin violación a Lorentz (o  $v_b \leq v_X$ ). Como la temperatura de la bariogénesis es muy alta (Escala de Gran Unificación), el efecto de la violación de Lorentz, a inicios de la bariogénesis, es muy importante; siempre que  $v_b > v_X$ . El efecto de este factor sobre la solución será parte de algún trabajo posterior. Por ahora, el resultado importante de este desarrollo es que es posible encontrar una huella de una posible violación de Lorentz en la bariogénesis.

Recordando la cota encontrada con la Energía de Umbral para el decaimiento del bosón:

$$p_X \leq \frac{m_X c}{\sqrt{2\partial\alpha}}$$

Nos indica los valores de momentum del bosón para que el decaimiento se produzca. Por lo tanto, podemos encontrar un límite para la temperatura en que las reacciones empiezan a producirse. Para eso, buscamos para que temperatura se cumple que:

$$\langle p_X \rangle = \frac{m_X c}{\sqrt{2\partial\alpha}}$$

Para que la mayoría de los bosones cumplan con el límite. Para eso, necesitamos la relación entre momentum promedio y temperatura. Considerando una estadística de Fermi, para mayor precisión, y que  $E_X = v_X p_X$  se tiene que:

$$\langle p_X \rangle = \frac{k_B T \pi^4}{30c\zeta(3)}$$

Entonces, la temperatura de inicio de la bariogénesis es:

$$k_B T_i = \frac{30\zeta(3)m_X c^2}{\pi^4 \sqrt{2\partial\alpha}}$$

$$\frac{k_B T_i}{m_X c^2} = 0,262 \times 10^{11}$$

Por ser un fenómeno que se produce en la escala de la gran Unificación, se requiere que  $k_B T_i, m_X c^2 \gtrsim 10^{16}$  [GeV]. Si le imponemos este límite a  $m_X$ , nos da una temperatura:

$$k_B T_i \gtrsim 0,262 \times 10^{27} [\text{GeV}]$$

Que corresponde a una época demasiado temprana en el universo (Época de Planck). En cambio, si se lo damos a la temperatura:

$$m_X c^2 \gtrsim 3,817 \times 10^5 [\text{GeV}]$$

Que, a pesar de tener una masa extremadamente alta ( $m_X \gg 5$  [GeV]  $\gtrsim m_b$ ), incluye valores que están muy por debajo de la escala de la gran unificación (Desierto).

En resumen, según este límite producido por una violación de Lorentz, se podría tener un inicio muy temprano de la bariogénesis o valores de masa menores a lo esperado. Pero como sea, para que el decaimiento se produzca de forma considerable, la temperatura debe ser mucho mayor que la masa del bosón.

# Conclusiones

Como era de esperarse, la aparición de la masa de los neutrinos trajo grandes modificaciones a su velocidad. Sin masa, los neutrinos habrían mantenido una velocidad constante, durante toda la vida del universo, e igual a la velocidad de la luz  $c$ . En cambio, al agregarles masa, su velocidad se ve afectada por una fuerte desaceleración (Ver Figuras 1.1 y 1.2). Tal es la desaceleración, que las velocidades de los neutrinos electrónicos y Muónico en la época actual son  $90,6 \left[ \frac{Km}{s} \right]$  (Casi del orden de la velocidad peculiar de la Tierra,  $\sim 200 \left[ \frac{Km}{s} \right]$  [12]) y  $1,21 \left[ \frac{m}{s} \right]$  (Comparable a la de una persona caminando) respectivamente. Claramente, estas velocidades son No-Relativistas de tal forma que, comparadas con la velocidad de la luz, son totalmente despreciables. Recordemos que estas velocidades fueron determinadas con respecto al sistema comóvil a la expansión del universo, por lo tanto es necesario usar la adición de velocidades para determinar la velocidad relativa a la tierra. Como las velocidades son pequeñas, estas se ven dominadas mayormente por nuestra velocidad peculiar.

Con respecto al neutrino Tauónico, vimos el problema que existe al tratar de determinar si el desacoplo se produjo cuando eran Relativistas o no. El desacoplo se produjo a una temperatura de  $k_B T_\nu = 3,7 [MeV]$  lo que nos dio, con nuestra aproximación No-Relativista, una energía por neutrino de  $\varepsilon = 20,55 [MeV]$ . Comparado con su masa,  $M_\nu \lesssim 15 [MeV]$ , vemos que  $\varepsilon \sim M_\nu$  que es lo que debe cumplirse para ser No-Relativista. Pero, para que nuestra aproximación a la velocidad tenga sentido, debemos tener  $k_B T_\nu \ll \frac{M_\nu}{3}$ , lo que, claramente, no se cumple. Este incumplimiento se ve reflejado en la velocidad obtenida durante el desacoplo,  $v_\nu \simeq 0,86c$ . Es por esto

que se estimó la velocidad con una aproximación de orden mayor en el momentum. A pesar de no ser totalmente correcta, esta nueva aproximación mejoró la velocidad a  $v_\nu \simeq 0,72c$ . Esta mejor aproximación nos permite acercarnos mejor a su velocidad en épocas cercanas al momento del desacoplo, pero, al pasar el tiempo, ambas aproximaciones se asemejan bastante (Ver Figura 1.2). O sea, nuestra aproximación es igualmente válida para determinar su velocidad actual. Eso queda claro al comparar los resultados del neutrino Tauónico de las Tablas 1.5 y 1.6. Esta velocidad es de  $v_\nu \simeq 1,74 \left[ \frac{Km}{s} \right]$  que es más de 5 veces mayor a la velocidad del sonido, pero mucho menor que la velocidad peculiar del Sol, por lo tanto también está dominada por esta última. En resumen, todos los tipos de neutrinos se verán casi a la misma velocidad desde la tierra. Esta velocidad está dada por el movimiento terrestre.

Con respecto a la violación de Lorentz, vimos que a estos niveles de energía del Big-Bang no se tiene un efecto importante. La diferencia que se produce en sus velocidades por esta ruptura es  $\sim 10^{-20} \%$ , lo que es totalmente despreciable. Este ínfimo efecto nos permite obviar esta ruptura para utilizar las transformadas de Lorentz con las que se demostró la invarianza de la función distribución y así poder determinar la de los neutrinos desde la tierra al relacionarla con las del sistema comóvil, la que es isotrópica.

Nuevamente, debido a la inserción de la masa de los neutrinos y a que son No-Relativistas, la forma de la función distribución de los neutrinos se complica enormemente. A diferencia de los fotones, no fue posible introducir un término parecido al Momento Dipolar ya que la temperatura dependería del módulo del momentum  $p'$  además del ángulo de visión  $\theta'$ . Además de la complejidad de la distribución, pudimos ver que la anisotropía producida por el movimiento de la tierra es enorme, lo que complica mucho más su detección y estudio. En general, sobre todo para el neutrino Muónico y Tauónico, la distribución se ve favorecida ampliamente en la dirección en la que se mueve la tierra. A medida que uno se aleja de esta dirección, la cantidad de neutrinos posibles de detectar, se reduce exponencialmente hasta ser prácticamente nula al observar en la dirección perpendicular al movimiento terrestre.

Más que eso, en el sentido opuesto de la velocidad peculiar, la cantidad disminuye aún más. Esto no es difícil de explicar gracias a las velocidades obtenidas de los neutrinos, ya que estarían casi en reposo en comparación a la velocidad de la tierra. Esto hace que “choquemos” con los neutrinos que están en el camino y dejemos atrás a los que están al otro lado. Es interesante mencionar que, en el caso del neutrino Muónico, observando a favor del movimiento terrestre, se detectan una gran cantidad de neutrinos con un momentum específico dado por el parámetro  $b$ . Este momentum corresponden a neutrinos con velocidad igual a la de la tierra. También es importante mencionar que el neutrino electrónico es el menos afectado por la velocidad peculiar. Esto lo podemos ver en la Figura 2.4 donde se muestra la máxima modificación posible que, en comparación a los otros casos, es mínima.

En resumen, vemos que la existencia de la masa de los neutrinos produce un efecto increíblemente relevante en su evolución, lo que se refleja en la percepción que tenemos de ellos, como lo es su distribución en el espacio. Bajo estas predicciones, para su detección es recomendable utilizar detectores de neutrinos dirigidos en la dirección de movimiento terrestre o, mejor aún, usar un satélite ubicado en alguno de los puntos de Lagrange del sistema solar de la misma forma que se hará con el satélite **Planck Surveyor** que, como ya mencionamos, trabajará con el **CMB**. Otro efecto, que ya hemos mencionado bastante, es como se desacoplan los neutrinos. Sin masa todos serían relativistas, pero en el caso del neutrino Tauónico ya no es así. Pero este hecho tiene la implicancia interesante que, en lugar de tener  $RT_\nu = T_{\nu,0}$ , se tiene  $R^2T_\nu = T_{\nu,0}$  produciendo un desacoplo a  $z_D \simeq 1,5 \times 10^5$  en lugar de  $z_D \simeq 2 \times 10^{10}$ , lo que es mucho después. Esto queda para análisis posteriores.

En el caso de la bariogénesis, nos encontramos a niveles de energía de la escala de la Gran Unificación lo que está por sobre los Rayos Cósmicos Ultra Energéticos. Esto nos da una mayor posibilidad de encontrar un efecto por la violación de Lorentz. Al desarrollar, vimos que realmente existe un efecto importante, pero se vuelve más interesante si las velocidades máximas del barión y el bosón se relacionan por  $v_b > v_X$ . Por nuestro desconocimiento del bosón  $X$  y la dificultad para estimar el parámetro

$\alpha$  de ruptura, es difícil saber si nos encontramos realmente en este caso. Pero de ser así, nos encontraríamos con una huella importante de una posible violación de Lorentz. A pesar que en este informe no fue desarrollado por problemas de tiempo, es posible que la modificación a la ecuación diferencial del decaimiento del bosón  $X$  entregue alguna información sobre la posibilidad de que el bosón  $X$  forme parte de la materia oscura del universo por su gran masa.

También estimamos una condición, dada por la violación a Lorentz, para el momento en que se inicia la bariogénesis. Esta condición nos dice que  $k_B T_i = 0,262 \times 10^{11} m_X c^2$  para que la mayoría de los bosones empiecen a decaer, lo que podría entregar una estimación de la masa o de la temperatura si se utiliza otro método para estimar alguna de las dos. Como sea, esta es una condición que aparece únicamente al imponer una violación a Lorentz.

Otro efecto implicado por una ruptura a Lorentz en la bariogénesis, que se deja propuesto, es el que ésta tiene en las amplitudes de probabilidad. Podría ser interesante si una violación de este tipo introdujera de forma directa un parámetro del estilo de  $\epsilon$  de (3.1). De ser así, la violación a Lorentz podría explicar la preferencia por la materia sobre la antimateria.

# Bibliografía

- [1] Alpher, R. A; Bethe, H; Gamow, G. *The Origin of Chemical Elements*. Physical Review, vol. 73, Issue 7, pp. 803-804.
- [2] Michney, R. J; Caldwell, R. R. *Anisotropy of the cosmic neutrino background*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, Issue 01, pp. 014 (2007).
- [3] Hannestad, S; Madsen, J. *Neutrino decoupling in the early Universe*. Physical Review D (Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology), Volume 52, Issue 4, 15 August 1995, pp.1764-1769.
- [4] Rota Font, F. *Extensiones del modelo estándar del universo primitivo*. Tesis de Doctorado en ciencias físicas, Universidad autónoma de Barcelona.
- [5] Jacobson, T; Liberati, S; Mattingly, D. *Lorentz violation at high energy: Concepts, phenomena, and astrophysical constraints*. Annals of Physics, Volume 321, Issue 1, p. 150-196.
- [6] Gonzalez-Mestres, L. *Lorentz Symmetry Violation and Very High-Energy Cross Sections*. eprint arXiv:physics/9706022.
- [7] Alfaro, J; Andrianov, A. A; Cambiaso, M; Giacconi, P; Soldati, R. *On the consistency of Lorentz invariance violation in QED induced by fermions in constant axial-vector background*. Physics Letters B, Volume 639, Issue 5, p. 586-590.
- [8] Alfaro, J. *Quantum gravity induced Lorentz invariance violation in the standard model: Hadrons*. Physical Review D, vol. 72, Issue 2, id. 024027.

- [9] Alfaro, J. *Quantum Gravity and Lorentz Invariance Violation in the Standard Model*. Physical Review Letters, vol. 94, Issue 22, id. 221302.
- [10] Vucetich, H. *Testing Lorentz Invariance Violation in Quantum Gravity Theories*. eprint arXiv:gr-qc/0502093.
- [11] Palma G. *Gravedad Cuántica de Lazos y Rayos Cósmicos Altamente Energéticos*. Tesis de Magister en Física Teórica, 2002.
- [12] Tomozawa, Y. *Cosmic microwave background dipole, peculiar velocity and Hubble flow*. eprint arXiv:0705.1317.
- [13] Kolb, E; Turner, M. *The Early Universe*. Frontiers in Physics Series, Vol. 69, Cap. 5 - 6.
- [14] Padmanabham, T. *Cosmology and Astrophysics. Through Problems*. Cambridge University Press.
- [15] <http://www.wikipedia.org>.
- [16] <http://www.rssd.esa.int/index.php?project=Planck>.
- [17] Sakharov, A. D. *Violation of CP Invariance, C Asymmetry, and Baryon Asymmetry of the Universe*. Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters, Vol. 5, p.24.
- [18] Karch, A; Randall, L. *Relaxing to Three Dimensions*. arXiv:hep-th/0506053 v2 31 Aug 2005.
- [19] Coleman, S; Glashow, S.L. *High-energy tests of Lorentz invariance*. Physical Review D, Vol. 59, 116008.
- [20] Debbasch, F; Rivet, J. P; van Leeuwen, W. A. *Invariance of the relativistic one-particle distribution function*. Physica A, Volume 301, Issue 1-4, p. 181-195.
- [21] Alfaro, J; Palma, G. *Loop quantum gravity corrections and cosmic ray decays*. Physical Review D, vol. 65, Issue 10, id. 103516.

- [22] Alfaro, J; Palma, G. *Loop quantum gravity and ultrahigh energy cosmic rays*.  
Physical Review D, vol. 67, Issue 8, id. 083003.