Facultad de Física, Universidad Católica de Chile
Vicuña Mackenna 4860, Macul, Santiago de Chile, Casilla 306, Chile

TESIS DE DOCTORADO
CUERDA HADRONICA, INVARIANCIA CONFORME
Y SIMETRIA QUIRAL

LEONARDO BALART VERGARA*

August 29, 2008

1 Conceptos Básicos de Teoría de Cuerdas

Como punto de partida para esta revisión, miraremos la teoría para una partícula con objeto de tener un punto de comparación para cuando introduzcamos la cuerda.

La teoría con la que partimos consiste de una partícula puntual de masa m que se mueve en un background de campo métrico $g_{\mu\nu}$ en D dimensiones. Podemos describir la cinemática de este punto material libre usando una acción que sea simplemente la longitud de su línea-mundo por su masa

$$S = -m \int ds \tag{1}$$

donde el intervalo $ds^2 = -g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$. Si Parametrizamos el movimiento de la partícula como $x^\mu(\tau)$ podemos reescribir la acción en la forma

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^2} \tag{2}$$

donde $\dot{x}^2 = g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}$. La correspondiente ecuación de movimiento para esta acción es

$$\frac{\delta S}{\delta \dot{x}^\mu} = m g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu = 0 \tag{3}$$

La acción es invariante bajo reparametrización $\tau \to \tau'(\tau)$.

$$S' = -m \int d\tau' \sqrt{-\dot{x}'^2} = -m \int d\tau' \frac{\partial \tau}{\partial \tau'} \sqrt{-\dot{x}^2} = S \tag{4}$$

*lbalart@bohr.fis.puc.cl

donde

$$-\dot{x}'^2 = \frac{dx^\mu}{d\tau'}\frac{dx_\mu}{d\tau'} = \frac{\partial\tau}{\partial\tau'}\frac{\partial\tau}{\partial\tau'}\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu \tag{5}$$

Sin embargo, esta expresión no se aplica para partículas sin masa, por lo que no podemos describir partículas como el fotón. Para sobreponerse a lo anterior podemos introducir una coordenada auxiliar $e(\tau)$ y expresar la acción de la siguiente forma

$$S = -\frac{1}{2}\int d\tau(e^{-1}\dot{x}^2 - em^2) \tag{6}$$

Calculando la ecuación de movimiento con respecto a la variable $e(\tau)$ se obtiene

$$\dot{x}^2 + \epsilon^2 m^2 = 0 \tag{7}$$

donde vemos que $e = \sqrt{-\frac{\dot{x}^2}{m^2}}$ y si sustituimos esta expresión en (6) recuperamos la acción de la ec.(2).

Notemos que en la acción (6) la métrica asociada es $g_{oo} = g_{\tau\tau} = e^2$, por lo que podemos reescribir

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2}\int d\tau\ e(\tau)[e^{-2}(\tau)\dot{x}^2 - m^2] \\ &= -\frac{1}{2}\int d\tau\sqrt{det\ g_{\tau\tau}}(g^{\tau\tau}\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu - m^2) \end{aligned} \tag{8}$$

Podemos ver que cada parte de esta última acción es invariante bajo reparametrización $\tau \rightarrow \tau'(\tau)$. Por una parte

$$\begin{aligned} g'^{\tau\tau} &= \frac{\partial\tau'}{\partial\tau}\frac{\partial\tau'}{\partial\tau}g^{\tau\tau} \\ \dot{x}'^\mu\dot{x}'_\mu &= \frac{\partial\tau}{\partial\tau'}\frac{\partial\tau}{\partial\tau'}\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu \end{aligned} \tag{9}$$

Por lo tanto

$$g'^{\tau\tau}\dot{x}'^\mu\dot{x}'_\mu = g^{\tau\tau}\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu \tag{10}$$

Por otro lado tenemos que la variación de una medida es $d^n\varepsilon = J^{-1}d^n\varepsilon$, donde $J = det\frac{\partial\varepsilon^\alpha}{\partial\varepsilon'^\beta}$ es el jacobiano. En nuestro caso, en particular, $d\tau' = J^{-1}d\tau$. Además

$$\sqrt{det\ g'^{\tau\tau}} = \sqrt{det\Big[\frac{\partial\tau}{\partial\tau'}\frac{\partial\tau}{\partial\tau'}g^{\tau\tau}\Big]} = det\ \frac{\partial\tau}{\partial\tau'}\sqrt{det\ g^{\tau\tau}} = J\sqrt{det\ g^{\tau\tau}} \tag{11}$$

Por lo tanto

$$d\tau'\sqrt{det\ g'^{\tau\tau}} = d\tau\sqrt{det\ g^{\tau\tau}} \tag{12}$$

Luego la acción para una partícula sin masa que se mueve en una línea-mundo es

$$S = -\frac{1}{2}\int d\tau\sqrt{det\ g_{\tau\tau}}(g^{\tau\tau}\partial_\tau x^\mu\partial_\tau x_\mu) \tag{13}$$

Si generalizamos desde el punto ($n = 0$) a un objeto de dimensión arbitraria n, obtenemos la siguiente acción

$$S = -\frac{T}{2}\int d^{n+1}\sigma\sqrt{det\ h_{\alpha\beta}}\ h^{\alpha\beta}(\sigma)g_{\mu\nu}(X)\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu \tag{14}$$

donde $\sigma^o = \tau$ es la coordenada temporal y σ^i ($i = 1, 2, \ldots, n$) describen el objeto n-dimensional. La matriz $h_{\alpha\beta}$ describe la geometría de la variedad $(n+1)$-dimensional y $g_{\mu\nu}$ la geometría del espacio-tiempo D-dimensional. Los índices α, β son referidos a la variedad, μ, ν son índices espacio-temporales, $h^{\alpha\beta}$ es la inversa de $h_{\alpha\beta}$ y $h = |det\ h_{\alpha\beta}|$. La variedad-mundo generada por el objeto n-dimensional debe estar contenida en el espacio-tiempo físico, por lo que es necesaria la condición que $D > n + 1$. La función $X^\mu(\sigma)$ es un mapeo de la variedadad-mundo (línea, lámina, tubo,...) al espacio tiempo-físico D-dimensional.

Ahora introduzcamos la cuerda bosónica clásica. Como su nombre lo indica la teoría de cuerda generaliza la teoría de una partícula puntual análoga a (8), para $m = 0$, para describir el movimiento de una cuerda o un objeto unidimensional en el espacio-tiempo físico de dimensión D. Podemos escribir esta acción como

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{h}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu \tag{15}$$

donde $T = 4\pi\alpha'$ es la tensión y $X^\mu(\sigma, \tau)$ representa la coordenada espacio-temporal de la cuerda parametrizada por dos variables. Las cuerdas pueden ser abiertas (que tiene los extremos libres) o cerradas (que forman un aro). A la acción escrita en (15), usualmente se le conoce como acción de Polyakov.

Si ahora calculamos la variación de la acción (15) con respecto a $h^{\alpha\beta}$

$$\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{h}\Big[\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\ h^{\alpha'\beta'}\ \partial_{\alpha'}X^\mu\ \partial_{\beta'}X_\mu\Big] \tag{16}$$

entonces de la ecuación de campo $\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} = 0$ obtenemos

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\ h^{\alpha'\beta'}G_{\alpha'\beta'} \tag{17}$$

donde $G_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu\,\partial_\beta X_\mu$.

$$G = |det\ G_{\alpha\beta}| = |det\ h_{\alpha\beta}|\Big(\frac{1}{2}\ h^{\alpha'\beta'}G_{\alpha'\beta'}\Big)^2 = \frac{1}{4}h(h^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta})^2 \tag{18}$$

Con esto podemos reescribir la acción (15) como

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d\sigma d\tau\sqrt{|detG_{\alpha\beta}|} \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d\sigma d\tau\sqrt{\dot{X}^2X'^2 - (\dot{X}\cdot X')^2} \end{aligned} \tag{19}$$

Esta acción es conocida como la acción de Nambu-Goto[] y representa el área barrida por una cuerda en el espacio-tiempo.

Revisemos las simetrías de la acción de la cuerda. Esta es invariante bajo reparametrizaciones locales de las coordenadas σ y τ

$$\begin{aligned} \sigma &\longrightarrow \sigma + \xi^1(\sigma,\tau) \\ \tau &\longrightarrow \tau + \xi^0(\sigma,\tau) \end{aligned} \tag{20}$$

Además es invariante bajo reescalamiento de Weyl.

$$\begin{aligned} \delta h_{\alpha\beta} &= \Lambda(\sigma,\tau) h_{\alpha\beta} \\ \delta X^\mu &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Por lo anterior, bajo una adecuada elección de funciones arbitrarias $\xi^1(\sigma,\tau)$ y $\xi^0(\sigma,\tau)$ podemos escribir localmente la métrica de la lámina-mundo de la siguiente forma

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}\, e^{\phi(\sigma,\tau)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\phi(\sigma,\tau)} \tag{22}$$

En una teoría clásica la función arbitraria $\phi(\sigma,\tau)$ puede ser eliminada por las transformaciones de Weyl, eligiendo $\Lambda'(\sigma,\tau) = \Lambda(\sigma,\tau) + \phi(\sigma,\tau)$.

$$h'_{\alpha\beta}(\sigma) = e^{\Lambda(\sigma)} h_{\alpha\beta}(\sigma) = e^{\Lambda(\sigma)} e^{\phi(\sigma)} \eta_{\alpha\beta}(\sigma) = e^{\Lambda'(\sigma)} \eta_{\alpha\beta}(\sigma) \tag{23}$$

En la teoría cuántica la simetría de Weyl es generalmente violada por una anomalía cuántica, excepto para valores especiales de la dimensión D de la teoría (la cuerda bosónica es únicamente invariante bajo transformaciones de Weyl si $D = 26$). De este modo, a causa de estas invariancias locales, en la teoría clásica de la cuerda bosónica podemos trabajar en el gauge $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. Esta elección es conocida como el gauge conforme. Con esto la acción de la cuerda (20) queda como

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \tag{24}$$

la solución derivada de esta acción es simplemente la ecuación de onda bidimensional

$$[] X^\mu = \left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \right) X^\mu = 0 \tag{25}$$

De la acción (24) podemos calcular el propagador

$$\langle X^\mu(\sigma) X_\mu(\sigma') \rangle = \Delta(\sigma - \sigma') \tag{26}$$

Este propagador satisface

$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} \Delta(\sigma - \sigma') = \delta(\sigma - \sigma') \tag{27}$$

También podemos representarlo en el espacio de momentum

$$\Delta(k) = \int d^2\sigma\ e^{-ik\cdot(\sigma-\sigma')} \Delta(\sigma - \sigma') = \frac{1}{k^2} \tag{28}$$

y tomando la transformada de Fourier

$$\begin{aligned}
\Delta(\sigma-\sigma') &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{ik\cdot(\sigma-\sigma')}\Delta(k) \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{ik\cdot(\sigma-\sigma')}\frac{1}{k^2+m^2}
\end{aligned} \tag{29}$$

donde m es la masa reguladora infraroja. Notemos que si aplicamos (27) en (29) se obtiene (28).

A causa de la invariancia de rotación y traslación, el propagador $\Delta(\sigma-\sigma')$ depende sólo de la distancia $r=|\sigma-\sigma'|$ que separa los dos puntos. Si escribimos $\Delta(\sigma-\sigma')=\Delta(r)$ e integramos sobre σ en (27) dentro de un disco de radio r centrado en σ'

$$\begin{aligned}
1 &= -2\pi \int_o^r d\rho \frac{\partial}{\partial\rho}\big(\rho\Delta'(\rho)\big) \\
1 &= -2\pi\, r \frac{d\Delta(r)}{dr}
\end{aligned} \tag{30}$$

Resolviendo esta expresión

$$\begin{aligned}
\Delta(r) &= -\frac{1}{2\pi} ln\ r \\
\Delta(\sigma-\sigma') &= -\frac{1}{2\pi} ln\,|\sigma-\sigma'|
\end{aligned} \tag{31}$$

Cuando $\sigma\to\sigma'$ decimos que tenemos una divergencia logarítmica.

El tensor de energía-momentum se define como $T_{\alpha\beta}=-\frac{4\pi\alpha'}{\sqrt{h}}\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}}$ (el factor numérico es convensional en teoría de cuerdas) y calculado de la ec.(15), debe anularse. Esto porque la variación de la acción con respecto a la métrica de la lámina-mundo es una ecuación de movimiento la cual es puesta igual a cero. Tenemos

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu\ \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\ h^{\alpha'\beta'}\ \partial_{\alpha'}X^\mu\ \partial_{\beta'}X_\mu \tag{32}$$

de lo cual se sigue que la traza es nula

$$T^\alpha_\alpha = h^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = 0 \tag{33}$$

Esto también lo podemos ver como consecuencia de la simetría de de Weyl, pue si usamos la relación (21) vemos que

$$\delta S = 0 = \delta h^{\alpha\beta}\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} = \Lambda(\sigma,\tau)h^{\alpha\beta}\frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} \tag{34}$$

Como $\Lambda(\sigma,\tau)$ es arbitrario y por la invariancia de la acción llegamos a la ec.(33).

Como es usual en dos dimensiones, la solución general a la ecuación de onda sin masa puede ser escrita como una suma de dos funciones arbitrarias

$$X^\mu(\sigma,\tau) = X^\mu_R(\sigma^-) + X^\mu_L(\sigma^+) \tag{35}$$

donde estamos haciendo uso de las coordenadas cono de luz: $\sigma^- = \tau - \sigma$ y $\sigma^+ = \tau + \sigma$. La función X_R^μ describe modos 'moviéndose a la derecha' de la cuerda y X_L^μ describe modos 'moviéndose a la izquierda de la cuerda'.

En estas coordenadas la métrica de Minkowski llega a ser $\eta_{+-} = \eta_{-+} = -1/2$ y $\eta_{++} = \eta_{--} = 0$. Entonces

$$T_{11} = T_{00} = \frac{1}{2}(\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu + \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu) = 0 \tag{36}$$

$$T_{01} = T_{10} = \partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X_\mu = 0 \tag{37}$$

finalmente obtenemos

$$T_{++} = \frac{1}{2}(T_{00} + T_{01}) = \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu \tag{38}$$

$$T_{--} = \frac{1}{2}(T_{00} - T_{01}) = \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu \tag{39}$$

De la ec.(32) también obtenemos $T_{++} = T_{--} = 0$

Finalmente podemos calcular y resolver las ecuaciones de movimiento que surgen de la acción (22). La variación de esta acción con respecto a X^μ produce una ecuación de onda bidimensional

$$[]X^\mu = (\partial_\sigma^2 - \partial_\tau^2)X^\mu = 4\partial_+\partial_- X^\mu = 0 \tag{40}$$

Habrá distintas soluciones para cuerda abierta o cerrada para los modos moviéndose a la izquierda o a la derecha correspondientes a las diferentes condiciones de borde. Por ejemplo, en el caso de la cuerda abierta, los extremos de la cuerda son $\sigma = 0, \pi$ y debe satisfacer las condiciones de borde tipo Neumann para estos puntos

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = 0 \tag{41}$$

Entonces, la solución general de la ecuación de onda toma la forma

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu + l^2 p^\mu \tau + il \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \, e^{-in\tau} cos(n\sigma) \tag{42}$$

donde los α_n son las componentes de Fourier y l es la longitud fundamental (sobre el orden de la escala de Planck) definido por $l = \sqrt{2\alpha'}$. El requerimiento de que X^μ es real implica que x y p son reales y que $\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^\dagger$. Notemos que los coeficientes izquierda y derecha son los mismos(α). Para el caso de la cuerda cerrada requerimos periodicidad en la coordenada σ, es decir $X^\mu(\sigma, \tau) = X^\mu(\sigma + \pi, \tau)$, lo cual produce las siguientes soluciones independientes para los movimientos a la izquierda y a la derecha

$$X_R^\mu = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l^2 p^\mu(\tau - \sigma) + \frac{i}{2}l \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)} \tag{43}$$

$$X_L^\mu = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l^2 p^\mu(\tau + \sigma) + \frac{i}{2}l \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)} \tag{44}$$

observemos que ahora los movimientos a la izquierda y a la derecha tienen diferentes componentes de Fourier (α y $\bar{\alpha}$). El mismo requerimiento que para cuerda abierta se aplica, suplementado por $\bar{\alpha}^{\mu}_{-n} = (\bar{\alpha}^{\mu}_{n})^{\dagger}$. En ambos casos, la solución esta escrita como una expansión de Fourier para los modos de la cuerda. Estos modos llegarán a ser los operadores de creación y destrucción cuando cuantizemos la cuerda, como veremos ahora.

Hay muchas maneras para proceder a cuantizar. En la vieja aproximación covariante uno parte reemplazando los brackets de Poisson clásicos por conmutadores. Nos restringiremos al caso de la cuerda abierta, que es la que nos interesa (que correspondería a la imagen de líneas de fuerza que unen un quark y un antiquark). De este modo obtenemos para la cuerda bosónica

$$[P^{\mu}(\sigma,\tau), X^{\mu}(\sigma,\tau)] = -i\delta(\sigma-\sigma')\eta^{\mu\nu} \tag{45}$$

donde P^{μ} es el momentum conjugado de X^{μ}. Ahora las componentes de Fourier satisfacen

$$[\alpha^{\mu}_{m}, \alpha^{\nu}_{n}] = m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu} \tag{46}$$

Estos son operadores definidos de manera que $\alpha_m|0>= 0$, para $m>0$ (operador de aniquilación). Ahora descomponemos el tensor de energía-momentum de las ecs.(38) y (39) en los modos de Fourier

$$T_{++} = \frac{1}{2\pi T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} L_m e^{-im\sigma^{+}} \tag{47}$$

$$T_{--} = \frac{1}{2\pi T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} L_m e^{-im\sigma^{-}} \tag{48}$$

donde $T = (2\pi\alpha')^{-1}$ es la tensión de la cuerda. Encontramos que ellos toman la forma

$$\begin{aligned} L_m &= T\int_0^{\pi} d\sigma(e^{im\sigma}T_{++} + e^{-im\sigma}T_{--}) \\ &= \frac{T}{4}\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{im\sigma}(\dot{X}+X')^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_{m-n}\cdot\alpha_n \qquad (49) \\ L_o &= \frac{1}{2}\alpha_o^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{-n}\cdot\alpha_n \qquad (50) \end{aligned}$$

donde $\alpha^{\mu}_{o} = lp^{\mu}$. El motivo para escribir L_o de esta manera es porque para $m = 0$, α_{m-n} no conmuta con α_n. Aquí tenemos una ambigüedad que resolvemos definiendo L_o en la ec.(50) para que sea ordenado-normal. Estos L son los generadores de Virasoro y, usando la ec.(46), encontramos que satisfacen la siguiente álgebra

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{12}(m^2-m)\delta_{m+n} \tag{51}$$

donde el segundo término del lado derecho corresponde a la anomalía.

Estos operadores constituyen el elemento central en la determinación de importantes propiedades en la teoría. Por ejemplo, el ánalogo cuántico de la ligadura clásica $T_{\mu\nu} = 0$ corresponde al requerimiento que L_o aniquila los estados físicos

$$(L_o - a)|\phi\rangle = 0 \tag{52}$$

donde la constante a es introducida debido a la ambigüedad del ordenamiento-normal en la definición de L_o (para los otro L_m no hay tal ambigüedad por lo tanto podemos simplemente escribir $L_m|\phi >= 0$ para $m > 0$). La ec.(52) nos lleva al espectro de masa, el cual en el caso de la cuerda abierta es

$$M^2 = -2a + 2\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \tag{53}$$

En teoría de cuerda es de gran utilidad el método del campo de background. Con este método podemos tratar la acción de la cuerda como una teoría de campo cuántica. El campo cuántico es el campo bosónico $X^\mu(\sigma, \tau)$, el primer paso es escoger el valor de expectación del vacío, que llamaremos X_o^μ, el campo de background clásico, y expandimos el campo cuántico alrededor de este valor

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X_o^\mu + x^\mu(\sigma, \tau) \tag{54}$$

donde $x^\mu(\sigma, \tau)$ representa la fluctuación cuántica. En general el campo de background clásico puede ser una función que depende de σ y τ, y que satisface las ecuaciones de movimiento clásicas.

Podemos indicar dos ejemplos donde se aplica este método en el contexto de la teoría de cuerda. El primer ejemplo corresponde a una generalización de la acción (20) en la que reemplazamos la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ por la métrica $g_{\mu\nu}(X)$ de un espacio curvo

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g_{\mu\nu}(X^\rho) \tag{55}$$

Para que una teoría de cuerda tenga sentido no debe haber violación cuántica de la simetría conforme, en particular la teoría debe ser invariante de Weyl. Elegiremos el gauge $h_{\alpha\beta} = e^{2\phi}\eta_{\alpha\beta}$. Para chequear si la expresión (55) es invariante de Weyl o independiente de ϕ usaremos regularización dimensional, que llevaremos a cabo en $2 + \epsilon$ dimensiones. De este modo $h_{\alpha\beta}$ es una matriz de $(2 + \epsilon) \times (2 + \epsilon)$ y obtenemos que $\sqrt{h} h^{\alpha\beta} = e^{(2+\epsilon)\phi} e^{-2\phi} = e^{\phi}$. Reemplazando en (55) llegamos a

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^{2+\epsilon}\sigma e^{\epsilon\phi} \sqrt{h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g_{\mu\nu}(X^\rho) \tag{56}$$

Ahora veamos si la dependencia en ϕ se anula en el límite $\epsilon \to 0$. Tratando esta acción como una teoría de campo cuántica y escogiendo X_o^μ como el valor de expectación del vacío aplicamos el método del background. Utilizando la expansión en coordenadas de Riemann para un tensor de rango 2 obtenemos para la métrica

$$g_{\mu\nu}(X^\rho) = \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R_{\mu\lambda\nu\kappa}(X_o^\rho)x^\lambda x^\kappa - \frac{1}{6}D_\varphi R_{\mu\lambda\nu\kappa}(X_o^\rho)x^\varphi x^\lambda x^\kappa + O((x^\mu)^4) \quad (57)$$

donde $R_{\mu\lambda\nu\kappa}$ es el tensor de Riemann del espacio-tiempo en el punto X_o^ρ. Con esta elección de variables (57) llega a ser

$$\begin{aligned} S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} & \int d^{2+\epsilon}\sigma\Big[e^{\epsilon\phi}\eta^{\mu\nu}\partial_\alpha x^\mu\partial^\alpha x^\nu g_{\mu\nu}(X^\rho) \\ & - e^{\epsilon\phi}\frac{1}{3}R_{\mu\lambda\nu\kappa}(X_o^\rho)x^\lambda x^\kappa\partial_\alpha x^\mu\partial^\alpha x^\nu + O(x^5)\Big] \end{aligned} \quad (58)$$

El propagador bosónico es

$$\langle x_\mu(\sigma)x_\nu(\sigma')\rangle = \eta_{\mu\nu}\Delta(\sigma-\sigma') = \eta_{\mu\nu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^{2+\epsilon}k}{(2\pi)^{2+\epsilon}}\frac{e^{ik\cdot(\sigma-\sigma')}}{k^2+m^2} \quad (59)$$

y podemos ver que

$$\begin{aligned} &\Delta(\sigma\to\sigma') = \Delta(0) = \mu^{-\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^{2+\epsilon}k}{(2\pi)^{2+\epsilon}}\frac{1}{k^2+m^2} \\ &= \mu^{-\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^{2+\epsilon}k}{(2\pi)^{2+\epsilon}}\int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(k^2+m^2)} = \mu^{-\epsilon}\int_0^\infty\frac{d\alpha}{(2\pi)^{2+\epsilon}}\left[\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right]^{2+\epsilon}e^{-\alpha\mu^2} \\ &= \frac{\mu^{-\epsilon}}{(4\pi)^{\frac{2+\epsilon}{2}}}\int_0^\infty d(\alpha m^2)(\alpha m^2)^{-\frac{\epsilon}{2}-1}e^{-\alpha\mu^2}(m^2)^{\frac{\epsilon}{2}} = \frac{(4\pi)^{\frac{2-\epsilon}{2}}}{4\pi}\Gamma\left(\frac{-\epsilon}{2}\right)\left(\frac{m}{\mu}\right)^\epsilon \\ &= \frac{1}{4\pi}e^{\frac{-\epsilon}{2}ln4\pi}\Gamma\left(\frac{-\epsilon}{2}\right)e^{\epsilon\, ln(\frac{m}{\mu})} \\ &= \frac{1}{4\pi}[1-\frac{\epsilon}{2}ln4\pi+O(\epsilon^2)]\left[\frac{1}{\epsilon}-\frac{\gamma}{2}+O(\epsilon)\right]\left[1+\epsilon\, ln\left(\frac{m}{\mu}\right)+O(\epsilon^2)\right] \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\epsilon}-\frac{\gamma}{2}+ln\left(\frac{m}{\mu}\right)+O(\epsilon)\right] \end{aligned} \quad (60)$$

donde m es la masa reguladora infraroja y μ es una escala de masa arbitraria.

Podemos calcular la corrección al propagador a un loop. El operador vértice que se ocupa se extrae del segundo término del lado derecho de la relación (58).

Obtenemos

$$
\begin{aligned}
& \int d^2\sigma \Big\{ x^\lambda(\sigma)x^\lambda(\sigma)\partial_\alpha x^\mu(\sigma)\partial^\alpha x^\nu(\sigma)R_{\mu\lambda\nu\lambda}(X_o^\rho) \\
& +x^\mu(\sigma)x^\lambda(\sigma)\partial_\alpha x^\lambda(\sigma)\partial^\alpha x^\nu(\sigma)R_{\lambda\mu\nu\lambda}(X_o^\rho) \\
& +x^\mu(\sigma)x^\nu(\sigma)\partial_\alpha x^\lambda(\sigma)\partial^\alpha x^\lambda(\sigma)R_{\lambda\mu\lambda\nu}(X_o^\rho) \Big\} e^{\epsilon\phi} \\
= & \int d^2\sigma \Big\{ \Delta(0)\partial_\alpha x^\mu(\sigma)\partial^\alpha x^\nu(\sigma)R_{\mu\nu}(X_o^\rho) \\
& +\partial_\alpha \Delta(0) x^\mu(\sigma)\partial^\alpha x^\nu(\sigma)R^\lambda_{\mu\nu\lambda}(X_o^\rho) \\
& +x^\mu(\sigma)x^\nu(\sigma)\partial_\alpha\partial^\alpha\Delta(0)R^\lambda_{\mu\lambda\nu}(X_o^\rho) \Big\} e^{\epsilon\phi} \\
= & \frac{e^{2\epsilon\phi}}{2\epsilon}\int d^2\sigma\partial_\alpha x^\mu(\sigma)\partial^\alpha x^\nu(\sigma)R_{\mu\nu}(X_o^\rho) \\
= & \left(\frac{1}{2\epsilon}+\phi+O(\epsilon)\right)\int d^2\sigma\partial_\alpha x^\mu(\sigma)\partial^\alpha x^\nu(\sigma)R_{\mu\nu}(X_o^\rho)
\end{aligned}
\tag{61}
$$

la parte infinita, cuando $\epsilon \to 0$, puede ser absorvida haciendo las redefiniciones de la función x^μ renormalizada

$$
x^\mu \longrightarrow x^\mu + \frac{1}{6\epsilon}R^\mu{}_\nu(X_o^\rho)x^\nu + O(x^2) = x^\mu_R \tag{62}
$$

y la renormalización de la métrica del espacio-tiempo

$$
g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} + \frac{1}{2\pi}R_{\mu\nu}(X_o^\rho)\left[\frac{1}{\epsilon}-\frac{\gamma}{2}+ln\frac{m}{\mu}+O(\epsilon)\right] = g^R_{\mu\nu} \tag{63}
$$

Y con respecto al término dependiente de ϕ que se obtiene de (61) vemos que la teoría cuántica es invariante de Weyl, o independiente de ϕ, si y sólo si

$$
R_{\mu\nu}(X_o^\rho) = 0 \tag{64}
$$

La renormalización de la métrica (63) determina la función beta a un loop

$$
\beta_{\mu\nu} = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}g^R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\pi}R_{\mu\nu} \tag{65}
$$

De (65), la condición para el anulamiento de la función beta en la acción efectiva es $R_{\mu\nu} = 0$. Esta es la misma condición requerida para la invariancia de Weyl (independencia de ϕ) de la acción efectiva. Estas dos cosas están relacionadas a causa de que la función beta es la traza del tensor de energía-momentum.

Otro ejemplo en el que aplicamos el método del background, en el contexto de cuerdas, corresponde al caso en que a la acción de una cuerda abierta acoplamos un campo vectorial externo en el borde[2]

$$
S = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\Big[\frac{1}{2}\int_{M^2} d^2\sigma\partial_\alpha X^\mu\partial^\alpha X^\nu + i\int_{\partial M} d\tau A_\mu(X)\partial_\tau X^\mu\Big] \tag{66}
$$

Expandimos esta acción alrededor de un background arbitrario que depende de los parámetros σ y τ

$$X^\mu(\tau,\sigma) = X_o^\mu(\tau,\sigma) + x^\mu(\tau,\sigma) \tag{67}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} S[X_o^\mu + x^\mu] = S[X_o^\mu] + \frac{1}{2\pi\alpha'}\Big[& \int_{M^2} d^2\sigma(\partial_\alpha X_o^\mu \partial^\alpha x_\mu + \frac{1}{2}\partial_\alpha x^\mu \partial^\alpha x_\mu) \\ & + i\int_{\partial M} d\tau (F_{\mu\nu} x^\mu \partial_\tau X_o^\nu + \frac{1}{2}\partial_\nu F_{\mu\lambda} x^\nu x^\lambda \partial_\tau X_o^\mu \\ & + \frac{1}{2}F_{\mu\nu}x^\nu\partial_\tau x^\mu + \frac{1}{3}\partial_\nu F_{\mu\lambda}x^\nu x^\lambda \partial_\tau x^\mu + \cdots)\Big] \end{aligned} \tag{68}$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Utilizando las ecuaciones de movimiento de X_o^μ

$$\begin{aligned} (-\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2) X_o^\mu &= 0 \\ \partial_\sigma X_o^\mu + i F_\nu{}^\mu \partial_\tau X_o^\nu |_{\partial M} &= 0 \end{aligned} \tag{69}$$

llegamos a que la acción on-shell es

$$\begin{aligned} S[X_o^\mu + x^\mu] = S[X_o^\mu] - \frac{1}{2\pi\alpha'} & \int_{M^2} d^2\sigma \frac{1}{2}\partial_\alpha x^\mu \partial^\alpha x_\mu \\ - \frac{i}{2\pi\alpha'} & \int_{\partial M} d\tau \big(\frac{1}{2}\partial_\nu F_{\mu\lambda} x^\nu x^\lambda \partial_\tau X_o^\mu \\ + \frac{1}{2}F_{\mu\nu}x^\nu \partial_\tau x^\mu + \frac{1}{3}\partial_\nu F_{\mu\lambda} & x^\nu x^\lambda \partial_\tau x^\mu + \cdots \big) \end{aligned} \tag{70}$$

Las interacciones son en el borde, por lo tanto necesitamos el propagador en $\sigma = \sigma' = 0$

$$\Delta(\tau - \tau') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{2+\epsilon}k}{(2\pi)^{2+\epsilon}} \frac{e^{ik_o(\tau-\tau')}}{k^2 + m^2} \tag{71}$$

luego

$$\Delta(\tau \to \tau') = \Delta(0) = \mu^{-\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{2+\epsilon}k}{(2\pi)^{2+\epsilon}} \frac{1}{k^2 + m^2} \tag{72}$$

que es análogo al cálculo realizado en (60).

Los vértices que se usan en el cálculo de la divergencia a un loop son obtenidos de la expansión (70). La contribución total a esta divergencia viene de la suma de los infinitos diagramas posibles, que son proporcionales a $\partial_\tau X^\mu$, pues el contratérmino es proporcional a $\int_{\partial M} d\tau \Gamma_\mu \partial_\tau X^\mu$. Estos vértices son

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{i}{2}\partial_\nu F_{\mu\lambda}\partial_\tau X_o^\mu \\ V_2 &= \frac{i}{2}F_{\mu\nu}\partial_\tau \end{aligned} \tag{73}$$

Entonces la primera figura a un loop que nos permiten las reglas de Feynman con $\partial_\tau X_o$ externo es

$$\int d\tau \frac{i}{2}\partial_\nu F_{\mu\nu}\partial_\tau X_o^\mu \langle x^\nu(\tau)x^\nu(\tau)\rangle = \Delta(0)\int d\tau \frac{i}{2}\partial_\nu F_{\mu\nu}\partial_\tau X_o^\mu \tag{74}$$

La segunda figura corresponde a insertar un vértice del tipo V_2 al loop anterior

$$\begin{aligned} & 2\int d\tau d\tau_1 \frac{i}{2}\partial_\nu F_{\mu\lambda}\partial_\tau X_o^\mu x^\nu(\tau)x^\lambda(\tau)\frac{i}{2}F_{\nu\lambda}x^\nu(\tau_1)\partial_{\tau_1}x^\lambda(\tau_1) \\ = \;& 2\Big(\frac{i}{2}\Big)^2\int d\tau d\tau_1 \partial_\nu F_{\mu\lambda}\partial_\tau X_o^\mu F_{\mu\lambda}\Delta(\tau-\tau_1)\partial_{\tau_1}\Delta(\tau-\tau_1) \end{aligned} \tag{75}$$

donde $\Delta(\tau-\tau_1) = \langle x^\nu(\tau)x^\nu(\tau_1)\rangle$.

La siguiente figura corresponde a insertar dos vértices del tipo V_2

$$\begin{aligned} & (2)^2\int d\tau d\tau_1 d\tau_2 \frac{i}{2}\partial_\nu F_{\mu\nu_1}\partial_\tau X_o^\mu x^\nu(\tau)x^{\nu_1}(\tau)\frac{i}{2}F_{\nu\nu_2}x^\nu(\tau_1)\partial_{\tau_1}x^{\nu_2}(\tau_1) \\ & \frac{i}{2}F_{\nu_2\nu_1}x^{\nu_2}(\tau_2)\partial_{\tau_2}x^{\nu_1}(\tau_2) \\ = \;& (2)^2\Big(\frac{i}{2}\Big)^3\int d\tau d\tau_1 d\tau_2 \partial_\nu F_{\mu\nu_1}\partial_\tau X_o^\mu F_{\nu\nu_2}F_{\nu_2\nu_1} \\ & \Delta(\tau-\tau_1)\partial_{\tau_1}\Delta(\tau_1-\tau_2)\partial_{\tau_2}\Delta(\tau-\tau_2) \end{aligned} \tag{76}$$

En general, para una figura en la que insertamos n vértices V_2 se obtiene

$$\begin{aligned} I_n \;=\; & (2)^n\Big(\frac{i}{2}\Big)^{n+1}\int d\tau d\tau_1\cdots d\tau_n \partial_\nu F_{\nu_1\mu}\partial_\tau X_o^\mu F_{\nu_1\nu_2}\cdots F_{\nu_n\nu} \\ & \Delta(\tau-\tau_1)\partial_{\tau_1}\Delta(\tau_1-\tau_2)\cdots\partial_{\tau_n}\Delta(\tau-\tau_n) \end{aligned} \tag{77}$$

Podemos hacer las integraciones usando la siguiente relación

$$\int d\tau_{\nu_m}\partial_{\tau_{m-1}}\Delta(\tau_{m-1}-\tau_m)\partial_{\tau_m}\Delta(\tau_m-\tau_{m+1}) = \delta(\tau_{m+1}-\tau_{m-1}) \tag{78}$$

Si n es impar se obtiene

$$I_n = -\frac{1}{2}\int d\tau d\tau_1 \partial_\nu F_{\lambda\mu}\partial_\tau X_o^\mu (F^n)_{\lambda\nu}\Delta(\tau-\tau_1)\partial_{\tau_1}\Delta(\tau-\tau_1) \tag{79}$$

donde $(F^n)_{\lambda\nu} = F_{\lambda\nu_1}F_{\nu_1\nu_2}\cdots F_{\nu_{n-1}\nu}$. Esta última integral corresponde a una integral de momentum impar, por lo tanto todas estas se anulan.

Por otro lado, si n es par, aplicando (78) se obtiene

$$I_n = \frac{i}{2}\int d\tau \partial_\nu F_{\lambda\mu}\partial_\tau X_o^\mu [(iF)^n]_{\lambda\nu}\Delta(0) \tag{80}$$

De este modo obtenemos el contratérmino a un loop

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n = \frac{i}{2}\int d\tau \partial_\nu F_{\mu\lambda}\partial_\tau X_o^\mu (1-F^2)^{-1}_{\lambda\nu}\Delta(0) \tag{81}$$

donde $\sum_{n=0}^{\infty}[(iF)^n]_{\lambda\nu} = 1 + (iF)^2_{\lambda\nu} + (iF)^4_{\lambda\nu} + \cdots = \left[\frac{1}{1+(iF)^2}\right]_{\lambda\nu}$

Como en el ejemplo anterior el contratérmino se elimina si la función beta es cero, y del mismo modo que antes es invariante de Weyl

$$\beta_\mu = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} A^R_\mu = \partial_\nu F_{\mu\lambda}(1 - F^2)^{-1}_{\lambda\nu} = 0 \tag{82}$$

2 Lagrangianos Efectivos en QCD

La idea de lagrangianos efectivos es describir la dinámica a bajas energías de los modos livianos de algún sistema físico. Estos lagrangianos están asociados al hecho de que en física muchas situaciones envuelven dos escalas, una pesada y una liviana. Por esto, si trabajamos en bajas energías, comparadas con la escala pesada, podemos describir completamente las interacciones dentro de un marco "efectivo", el cual está escrito sólo en términos de los grados de libertad livianos, pero que incluye totalmente la influencia de la escala de masa pesada por medio de efectos virtuales.

Como se conoce, QCD describe las interacciones fuertes entre quarks y gluones por medio de una teoría de gauge no abeliana $SU(N_c)$, donde N_c es el número de colores, que para el mundo real es $N_c = 3$. Sabemos que existen $N_f = 6$ diferentes tipos de quarks (sabores): up, down, strange, charm, top, bottom, y cada uno es indicado por la primera letra de su nombre. El lagrangiano de QCD en términos de quarks y en grados de libertad gluónicos está dado por

$$L_{QCD} = \bar{\psi}(iD - M)\psi - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a \tag{83}$$

donde

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_s A^a_\mu \frac{\lambda_a}{2} \tag{84}$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial A^a_\nu - \partial A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{85}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \\ c \\ t \\ b \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} m_u & 0 & \cdots & & & \\ 0 & m_d & \cdots & & & \\ 0 & 0 & m_s & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & m_c & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_b \end{pmatrix} \tag{86}$$

y donde $a = 1, ..., 8$, los campos A^a_ν son gluónicos y g es la constante de acoplamiento de interacción fuerte. El campo quark ψ representa un vector columna en el espacio de sabor, los quarks también poseen un índice de color (que no se ha escrito) el cual participa en la simetría de gauge local, M representa la matriz masa de quark en el espacio de sabor, los valores de m_i representan las masas de los distintos quarks. Las λ_a son las matrices de Gell-Mann, por lo que $\lambda_a/2$ son los generadores de $SU(3)$ en la representación fundamental y f^{abc} son las constantes de estructura de $SU(3)$.

Masa de los Quarks	
m_u	$0.003 \to 0.007$
m_d	$0.007 \to 0.015$
m_s	$0.15 \to 0.3$
m_c	$1.3 \to 1.7$
m_t	> 113
m_b	$4.8 \to 5.2$

Si consideramos un límite en que las masas de los quarks son iguales, el lagrangiano de QCD poseerá una simetría adicional, la simetría global $SU(N)$ para los N sabores de quarks con igual masa. En el caso en que $m_u \sim m_d$, la simetría $SU(2)$ de sabor puede ser considerada una muy buena aproximación, es conocida como la invariancia de isospín y consiste de las siguientes transformaciones del campo

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \to \psi' = e^{-i\tau\cdot\theta}\psi \tag{87}$$

donde τ^i $(i = 1, 2, 3)$ son las matrices de Pauli y θ^i son las componentes de un vector costante arbitrario.

Si ahora consideramos que la masa del quark s es igual a la de los quarks u y d, que aunque es más grande, se puede considerar cercana cuando comparamos, por ejemplo, con la masa del protón o del mesón rho. En este caso extendemos el isospín a $SU(3)$, y tenemos las siguientes transformaciones

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \to \psi' = e^{-i\lambda\cdot\theta}\psi \tag{88}$$

aquí λ^i $(i = 1, \cdots, 8)$ son las matrices de Gell-Mann.

Si tomamos la masa de los quarks igual a cero, el lagrangiano de QCD posee otra simetría global de sabor, la simetría quiral, a causa de que en este límite las componentes izquierda (left-handed) y derecha (right-handed) de los campos están desacoplados. Si consideramos N sabores, el lagrangiano QCD para estos quarks sin masa será

$$L_{QCD}|_{m_i=0} = i\bar{\psi}_L D\psi_L + i\bar{\psi}_R D\psi_R - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a \tag{89}$$

donde ψ_L y ψ_R son las proyecciones quirales del campo ψ. Este lagrangiano será invariante bajo $SU(N)_L \times SU(N)_R$, generada por

$$\psi_{L,R} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix}_{L,R} \rightarrow \psi'_{L,R} = e^{-i\gamma\cdot\theta_{L,R}}\psi_{L,R} \tag{90}$$

donde q_i se refiere a uno de los quarks, γ son los generadores del grupo $SU(N)$ y $\theta_{L,R}$ son las componentes de dos vectores arbitrario constante (uno por cada transformación, L o R).

Ya que los quarks u, d y s tienen masas relativamentes pequeñas comparadas con las típicas escalas hadrónicas, como por ejemplo la masa del protón (M_P)

$$\frac{m_u}{M_P} \sim 0.005 \quad \frac{m_d}{M_P} \sim 0.01 \quad \frac{m_s}{M_P} \sim 0.18 \tag{91}$$

podemos considerar la aproximación $m_u \sim m_d \sim m_s \sim 0$, que es conocida como el límite quiral. Entonces QCD tiene una simetría global quiral $SU(3)_L \times SU(3)_R$ y las operaciones de simetría son análogas a las de (90),

$$\psi_{L,R} = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}_{L,R} \rightarrow \psi'_{L,R} = e^{-i\lambda\cdot\theta_{L,R}}\psi_{L,R} \tag{92}$$

aquí los generadores λ^i son las matrices de Gell-Mann.

Si tomamos el límite en que los quarks u y d tienen masa nula, el lagrangiano será invariante bajo $SU(2)_L \times SU(2)_R$ y los generadores serán las matrices de Pauli.

Mencionemos algo del rompimiento espontáneo de la simetría quiral. Vimos que si consideramos el lagrangiano de QCD en el límite de quarks sin masa, este será invariante bajo $SU(N)_L \times SU(N)_R$, pero como el vacío o estado fundamental $|0\rangle$ será distinto de cero, tendremos que los operadores de carga de Noether no aniquilan el vacío

$$Q_L|0\rangle \neq 0 \quad Q_R|0\rangle \neq 0 \tag{93}$$

o en otras palabras, no es posible un estado fundamental simétrico.

Por otro lado, en el caso en que las masas de N quarks son consideradas iguales, el lagrangiano mencionado tiene una simetría de isospín $SU(N)_{L+R}$, como vimos más arriba.

En el caso general en que un lagrangiano para un campo de n componentes $\phi = (\phi_1, \cdots, \phi_n)$, es invariante bajo un grupo G de dimensión g, es decir generado por g generadores. Entonces si asumimos que a de sus componentes tienen valor de expectación del vacío no nulo, es decir

$$\langle 0|\phi_i|0\rangle = v_i \neq 0 \tag{94}$$

donde i etiqueta alguna de las a componentes, podemos decir que a generadores de G están rotos. Esto significa que los correspondientes operadores carga de

Noether no aniquilan al vacío, $Q_i|0\rangle \neq 0$. El resto de los generadores genera el subgrupo S de G de dimensión s. El teorema de Goldstone nos dice que tenemos un bosón de Goldstone (campos con masa cero) por cada generador roto. En otras palabras tenemos a bosones de Goldstone, donde $a = g - s$.

Si aplicamos esto a lo que remarcamos en los dos párrafos anteriores, podemos hacer la siguiente identificación: $G = SU(N)_L \times SU(N)_R$ está espontáneamente roto, $S = SU(N)_{L+R}$ y tenemos $2N - N$ bosones de Goldstone. En el caso específico en que tenemos rompimiento espontáneo de la simetría $SU(2)_L \times SU(2)_R$, donde estamos suponiendo que los quarks u y d tienen masa nula, lo cual es una buena aproximación para la naturaleza, identificamos G con $SU(2)_L \times SU(2)_R$ y S con $SU(2)_{L+R}$, por lo que uno espera obtener tres bosones de Goldstone en el espectro de QCD, los cuales identificamos con los piones $\pi^{\pm}$ y π_o. Sin embargo, en la naturaleza estos tienen una masa pequeña, pero no nula, por lo que el desarrollo anterior es sólo aproximado, y los piones son llamados pseudo-bosones de Goldstone. Si consideramos el límite quiral, hay ocho bosones de Goldstone asociados al rompimiento espontáneo de la simetría $SU(3)_L \times SU(3)_R$ y estos corresponden a los ocho hadrones más livianos, los tres piones junto a cuatro kaones y la partícula eta. Esta descripción es menos exacta que en el caso en que los bosones de Goldstone son sólo los piones, puesto que la masa del quark s es dos o tres órdenes mayor que las masas de los quarks u y d (ver la tabla de las masas de los quarks).

Para hacer un estudio del lagrangiano de QCD, podríamos en principio, pensar en utilizar teoría de perturbación. Luego podríamos derivar las usuales reglas de Feynman para una teoría de Yang-Mills y calcular los correspondientes diagramas de Feynman hasta un orden dado en la constante de acoplo g. Sin embargo, las cosas no son tan simples, ya que QCD es asintóticamente libre, como veremos, lo que proviene del hecho que, en contraste al caso de Electrodinámica Cuántica (QED), los campos de gauge (gluónicos en QCD, fotónicos en QED) tienen términos de autointeracción.

Esto tiene como consecuencia a primer orden de loop de la teoría de perturbación que la la función beta se comporta como

$$\beta(g(\mu)) = \mu \frac{\partial g(\mu)}{\partial \mu} = -\frac{g^3}{16\pi^2}(11 - \frac{2}{3}N_f) + \cdots \tag{95}$$

donde μ es un parámetro no físico con dimensiones de energía denominado escala de renormalización y que se introduce en el esquema de renormalización.

Podemos obtener la constante de acoplamiento explicitamente, resolviendo la relación anterior

$$g(\mu) = \frac{g(\mu_o)}{1 + \left(\frac{33-2N_f}{12\pi}\right) g(\mu_o)\, ln\left(\frac{\mu^2}{\mu_o^2}\right)} + \cdots \tag{96}$$

reecribiendo esta expresión obtenemos

$$g(\mu) = \frac{b_o^{-1}}{ln(\mu^2/\Lambda^2)} + \cdots \tag{97}$$

donde $b_o^{-1} = \frac{12\pi}{33-2N_f}$ y $\Lambda = \mu_o\, exp\left(\frac{-1}{2b_o g(\mu_o)}\right)$ es el parámetro de escala que caracteriza a la QCD, tiene dimensiones de energía e indica el límite entre el régimen perturbativo y el no perturbativo, μ es la escala de energía en la cual la teoría esta siendo aplicada. El valor de Λ es determinado a partir del tratamiento numérico de los datos experimentales, resulta ser de una magnitud de orden 100 MeV.

La última relación implica que a grandes energías transferidas (encima de varios GeV) o a pequeñas distancias, la constante de acoplamiento (o la intensidad de la interacción fuerte) decrece tendiendo a anularse (a energía infinita), de modo que tenemos a los quarks comportándose como si estuvieran libres. Esto es conocido como libertad asintótica. Estudiando la relación (95), puesto que $N_f = 6$ obtenemos $\beta(g) < 0$, de lo cual podemos deducir las mismas conclusiones mencionadas.

Por otro lado, cuando μ se acerca a Λ, es decir a bajas energías ($\sim 1GeV$) o a largas distancias, donde queremos discutir tópicos como adherimiento de quarks para hacer mesones, interacciones de mesones livianos, violación de CP en decaimiento de mesones κ, física nuclear, etc, la constante de acoplamiento crece indefinidamnete, así tenemos a los quarks confinados en una región de radio $\sim 10^{-13}$ cm. Este es el régimen no perturbativo, caracterizado por el confinamiento de los quarks en el interior de los hadrones. Aparece de este modo, la necesidad de desarrollar un método para describir la dinámica a bajas energías de la QCD, específicamente de los quarks más livianos, y esta es la característica de los lagrangianos efectivos.

Para introducir lagrangianos efectivos consideraremos el modelo sigma [], donde tenemos un doblete de campos nucleónicos $\psi = \binom{p}{n}$, un triplete de campos piónicos $\pi = \{\pi^i\}(i = 1, 2, 3)$ y un campo escalar σ con el siguiente lagrangiano

$$\begin{aligned} L &= \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \frac{1}{2}\partial_\mu \pi \cdot \partial^\mu \pi + \frac{1}{2}\partial_\mu \sigma \cdot \partial^\mu \sigma - g\bar{\psi}(\sigma - i\tau \cdot \pi\gamma_5)\psi \\ &\quad + \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 \end{aligned} \tag{98}$$

Podemos reescribir el modelo sigma como

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{4}Tr(\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger) + \frac{\mu^2}{4}Tr(\Sigma\Sigma^\dagger) - \frac{\lambda}{16}[Tr\Sigma\Sigma^\dagger]^2 \\ + \bar{\psi}_L i \not{\partial}\psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial}\psi_R - g(\bar{\psi}_L \Sigma \psi_R + \bar{\psi}_R \Sigma^\dagger \psi_L) \end{aligned} \tag{99}$$

donde $\Sigma = \sigma + i\tau \cdot \pi$. Este modelo es invariante bajo las transformaciones $SU(2)_L \times SU(2)_R$

$$\psi_L \to L\psi_L, \;\; \psi_R \to R\psi_R, \;\; \Sigma \to L\Sigma R^\dagger \tag{100}$$

para L, R en $SU(2)$. Esta es conocida como la representación lineal.

Otra forma representar el modelo es por la parametrización exponencial. Aquí los campos se escriben como

$$\Sigma = (v + S)U, \;\; U = exp(i\tau \cdot \pi/v) \tag{101}$$

De tal modo que obtenemos

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}\Big[(\partial_\mu S)^2 - 2\mu^2 S^2\Big] + \frac{(v+S)^2}{4} Tr(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) \\
&- \lambda v S^3 - \frac{\lambda}{4} S^4 + \bar{\psi} i \not\partial \psi - g(v+S)(\bar{\psi}_L U \psi_R + \bar{\psi}_R U^\dagger \psi_L) \qquad (102)
\end{aligned}
$$

La cantidad U transforma bajo $SU(2)_L \times SU(2)_R$ de la misma forma que Σ

$$
U \rightarrow L U R^\dagger, \quad U^\dagger \rightarrow R U^\dagger L^\dagger \qquad (103)
$$

Consideremos una situación general donde tenemos un acoplamiento lineal de un campo pesado P a un campo liviano l, expresado en el siguiente lagrangiano

$$
L = \frac{1}{2}(\partial_\mu P \partial^\mu P - m_P^2 P^2) + lP \qquad (104)
$$

Ahora procederemos a separar esta expresión en una integral para el campo P y otra para el campo l, del siguiente modo

$$
\begin{aligned}
\int d^4x L(P,l) &= \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu P \partial^\mu P - m_P^2 P^2) + lP\right] \\
&= \int d^4x \left[-\frac{1}{2} P(\partial_\mu \partial^\mu - m_P^2) P + lP\right] \qquad (105)
\end{aligned}
$$

Si ahora hacemos el siguiente cambio

$$
P(x) \rightarrow P(x) + P_o(x) \qquad (106)
$$

donde elegimos $P_o(x)$ tal que

$$
(\partial_\mu \partial^\mu - m_P^2) P_o(x) = l(x) \qquad (107)
$$

De acuerdo a esta redefinición escribimos (105) de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\int d^4x L(P,l) &= \int d^4x [-\frac{1}{2} P(\partial_\mu \partial^\mu - m_P^2) P - P(\partial_\mu \partial^\mu - m_P^2) P_o \\
&\quad -\frac{1}{2} P_o(\partial_\mu \partial^\mu - m_P^2) P_o + lP + lP_o] \\
&= \int d^4x \left[P_o(\partial_\mu \partial^\mu - m_P^2) P - \frac{1}{2} l P_o\right] \qquad (108)
\end{aligned}
$$

donde, en la primera relación, hemos integrado por partes dos veces, es decir

$$
\int d^4x \, P_o(\partial_\mu \partial^\mu - m_P^2) P = \int d^4x \, P(\partial_\mu \partial^\mu - m_P^2) P_o \qquad (109)
$$

y en la segunda relación usamos (107).

La solución a la ec.(107) es

$$P_o(x) = -\int d^4y\Delta(x-y)l(y) \tag{110}$$

donde $\Delta(x-y)$ es el propagador de Feynman, el cual obedece

$$(\partial_\mu\partial^\mu - m_P^2)\Delta(x-y) = -\delta(x-y) \tag{111}$$

Sustituyendo (110) en la integral (108) llegamos a

$$\begin{aligned}\int d^4x\, L(P,l) = -\frac{1}{2}\int d^4x\, P(\partial_\mu\partial^\mu &- m_P^2)P \\ &- \frac{1}{2}\int d^4x\int d^4y\, l(x)\Delta(x-y)l(y)\end{aligned} \tag{112}$$

Luego

$$\begin{aligned} e^{iZ_{eff}[l]} &= \frac{e^{-\frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\, l(x)\Delta(x-y)l(y)}\int DPe^{-\frac{i}{2}\int d^4x\, P(\partial_\mu\partial^\mu - m_P^2)P}}{\int DPe^{-\frac{i}{2}\int d^4x\, P(\partial_\mu\partial^\mu - m_P^2)P}} \\ &= e^{-\frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\, l(x)\Delta(x-y)l(y)} \end{aligned} \tag{113}$$

de lo cual obtenemos

$$Z_{eff}[l] = -\frac{1}{2}\int d^4x\int d^4y\, l(x)\Delta(x-y)l(y) \tag{114}$$

Finalmente se puede obtener un lagrangiano local notando que el propagador de las partícula pesada es peaked a cortas distancias. En estas escalas podemos hacer una expansión de Taylor de $l(y)$

$$l(y) = l(x) + (y-x)^\mu[\partial_\mu l(y)]_{y=x} + \cdots \tag{115}$$

Guardando el término principal e integrando la tercera relación de (106)

$$\int d^4y\Delta(x-y) = -\frac{1}{m_P^2} \tag{116}$$

con esto último obtenemos

$$Z_{eff}[J] = \int d^4x \frac{1}{2m_P^2} l(x)l(x) + \cdots \tag{117}$$

donde los términos que siguen son suprimidos por potencias de m_P.

Ahora podemos aplicar este procedimiento al lagrangiano del modelo sigma de la ec.(102) donde el campo escalar S es pesado con respecto a los bosones de Goldstone. Así considerando la teoría en el límite de bajas energías y nos olvidamos de las interacciones S^2. Hacemos las identificaciones $P \to S$ y $l \to vTr(\partial_\mu U\partial^\mu U^\dagger)/2$. Entonces el lagrangiano efectivo toma la forma

$$L_{eff} = \frac{v^2}{4}Tr(\partial_\mu U\partial^\mu U^\dagger) + \frac{v^2}{8m^2}\Big[Tr(\partial_\mu U\partial^\mu U^\dagger)\Big]^2 + \cdots \tag{118}$$

Podemos agregar que a orden $O(p^2)$ el lagrangiano efectivo esta compuesto de operadores de cuatro derivadas, por lo que hay cuatro posibles términos invariantes quirales a este orden. Sin embargo, en el caso $SU(3)$ uno de los operadores es linealmente dependiente de los otros

$$tr(\partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger \partial^\mu U \partial^\nu U^\dagger) = \frac{1}{2}[tr(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger)]^2$$
$$-tr(\partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger) tr(\partial^\mu U \partial^\nu U^\dagger) - 2tr(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial^\nu U^\dagger) \tag{119}$$

En el caso $SU(2)$ otro término es reduntante también, a este orden porque tenemos otra identidad

$$2tr(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial^\nu U^\dagger) = [tr(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger)]^2 \tag{120}$$

Así llegamos al lagrangiano efectivo quiral para los tres sabores livianos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \text{derivadas de ordenes más altos} \tag{121}$$

donde en el orden más bajo de la expansión de momentum, las interacciones de los pseudo-bosones de Goldstone (piones, kaones, mesones eta) son descritos por el conocido lagrangiano de Weinberg

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{4} f_\pi^2 tr(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) \tag{122}$$

En el orden las interacciones de los pseudo-bosones de Goldstone son descritas por el lagrangiano efectivo quiral obtenido por Gasser y Leutwyler

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \quad = \quad & L_1[tr(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger)]^2 + L_2 tr(\partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger) tr(\partial^\mu U \partial^\nu U^\dagger) \\ & + L_3 tr(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial^\nu U^\dagger) + \cdots \end{aligned} \tag{123}$$

aquí hemos escrito sólo los términos relevantes para el presente trabajo, los campos externos son puestos iguales a cero.

Con respecto a la obtención de las constantes a bajas energías L_1, L_2 y L_3, existen más de una docena de trabajos de diferentes modelos quirales que están en buen acuerdo con los datos empíricos (las citas de estos trabajos se pueden ver en [**?**]).

Destaquemos que cierta relación entre las constantes ha sido establecida en [25] y [26], en el límite $N_c \to \infty$:

$$L_1 = \frac{1}{2} L_2 = -\frac{1}{4} L_3 \tag{124}$$

También se ha encontrado posteriormente[24] que

$$L_1 = \frac{1}{2} L_2 \ , \ L_2 = \frac{f_\pi^2}{m_\rho^2} ln\, 2 \approx 1.25 \times 10^{-3} \ , \ L_3 = -2L_2 \tag{125}$$

Digamos, por último, que la relación (124) y su conexión con una descripción tipo cuerda de la QCD no está reconocida.

3 La Cuerda Hadrónica

Originalmente, la teoría de cuerda[1] surge como un intento de comprender las interacciones fuertes. Nace en los 60 en el momento en que muchos físicos trataban de comprender la proliferación de resonancias (hadrones de muy corta vida $\sim 10^{-23} segundos$), cuando todavía no se establecía el modelo que considera a los hadrones compuestos de quarks (en cuyo caso muchas de las resonancias corresponden a estados excitados). Esta teoría surge del trabajo de G. Veneziano[16] de 1968 en el que postula la fórmula para la amplitud de scattering (choque):

$$A(s,t) = \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s)-\alpha(t))}, \tag{126}$$

donde Γ es la función gamma de Euler,

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty dx x^{m-1} e^{-x} \tag{127}$$

y $s = (p_1 + p_2)^2, t = (p_2 + p_3)^2$ son las convencionales variables de Mandelstam referidas a un proceso de scattering elástico con partículas entrantes con momentum p_1, p_2 y partículas salientes con momentum p_3, p_4. La variable $\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha' s$ es la trayectoria de Regge, donde los valores enteros de $\alpha(s)$ corresponden a estados con spin $J = \alpha(s_J)$ los cuales tienen masa cuadrada $m^2(J) = s_J$. Para mesones livianos, datos experimentales y algunos modelos dan los valores $\alpha' \simeq 0.9$ GeV^{-2}.

Podemos expresar la fórmula anterior como:

$$A(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha(t)+1)(\alpha(t)+2)...(\alpha(t)+n)}{n!} \frac{1}{\alpha(s)-n} \tag{128}$$

y encontramos que hay polos en el canal s siempre que $\alpha' s = n - 1$.

Esta formulación fue interpretada como un modelo de cuerda por Y. Nambu[]. Esta cuerda carecía de masa, pero tenía energía potencial, que se manifestaba como una tensión constante entre los extremos y cuyo valor sería exactamente proporcional a la longitud de la cuerda; también tenía energía cinética, de manera de mantener el sistema en equilibrio, pues la tensión produciría el colapso de la cuerda si fuese estacionaria. La cuerda estaría girando de modo que los extremos se muevan a la velocidad de la luz (cosa posible, ya que no tienen masa), así la fuerza centrípeta compensaría la tensión. Esta cuerda tendría un tamaño típico del núcleo atómico $\sim 10^{-13} cm$. Podemos hacernos la imágen de esta cuerda sin masa como un tubo delgado de líneas de fuerza, como propusieron H.B. Nielsen y P. Olesen[3].

Esta manera de concebir los hadrones, explicaría la abundancia de resonancias, pues corresponderían respectivamente a los estados excitados que tiene la cuerda al vibrar a distintas frecuencias. También explicaría las llamadas trayectorias de Regge[8], las cuales relacionan el momentum angular y la masa al cuadrado de los hadrones, como veremos más adelante. Y el confinamiento se podía entender dado el equilibrio entre tensión y fuerza centrípeta.

A pesar de estos éxitos el modelo de cuerda hadrónica presentaba algunos problemas. El primero es que era consistente en 26 dimensiones. Otro de los problemas lo podemos ver con la ayuda de la ec.(128): para $n = 0$ encontramos un taquión, $J = 0$ y $m^2 = -1$. Además vemos que el segundo estado $n = 1$ ($J = 1$) tiene masa cero, el cual deberíamos identificar con la partícula rho, con lo cual estamos frente a un tercer problema.

En la actualidad, la teoría fundamental de las interacciones fuertes es la Cromodinámica Cuántica (QCD). A mediados de los 70, cuando se desarrolló QCD, la mayoría de los físicos abandonó el tema de las cuerdas. Sin embargo, uno de los problemas que se presentaba en la explicación de procesos nucleares, la aparición de una partícula sin masa de spin 2, sería una virtud en el contexto de gravitación y unificación, pues se le puede identificar con el gravitón[] (la longitud de esta cuerda correspondería a la sugerida por la estructura de la gravedad, la longitud de Planck, un tamaño $\sim 10^{-33} cm$).

A pesar de lo anterior, las cuerdas pueden proporcionar una descripción efectiva de algún sector de QCD. Como vimos en el capítulo anterior, no es conveniente aplicar teoría de perturbaciones y si podemos intentar un análisis usando la idea de la cuerda hadrónica. Los argumentos más comunes para justificar esta idea son:

1) *En el límite N grande la QCD puede ser reformulada de manera exacta como un teoría de cuerdas.*

En 1973 't Hooft[5] propuso una generalización de QCD de 3 colores y un grupo de gauge SU(3) a una QCD de N colores y un grupo de gauge de color SU(N), al tratar N como un parámetro libre y considerar $N \longrightarrow \infty$ aplicado a la expansión en una teoría de gauge.

La propiedad básica en el límite $N \longrightarrow \infty$ es el dominio exclusivo de los diagramas planares (los cuales podemos caracterizar como aquellos que podemos dibujar sobre el plano sin líneas que se cruzan por encima). Veamos esto último en el caso del choque (scattering) entre dos mesones. Los diagramas de Feynman típicos que contribuyen a la amplitud N grande son los conocidos como red de pescador (fishnet), pues consisten en cuatro puntos que representan los mesones entrantes y salientes con sus respectivos momentums, los que se unen por líneas que representan campos de quarks o antiquarks formando un cuadrilátero que encierra sólo loops internos gluónicos. Los diagramas no planares son suprimidos por el factor $1/N^2$, lo mismo ocurre con un loop interno de quark o con una línea gluónica en el borde externo del diagrama.

Todos los cortes que podemos efectuar sobre el diagrama (a) nos muestran un estado intermedio singlete de color. El quark, el antiquark y los gluones que son cortados por la línea están acoplados del siguiente modo

$$\bar{q}_l A^l_{i_1} A^{i_1}_{i_2} \cdots A^{i_{n-1}}_{i_n} q^{i_n} \qquad (129)$$

y vemos que no podemos separar esto en dos o más partes que sean singletes de color. En el caso de diagramas no planares podríamos obtener un estado intermedio con un estado mesónico y un estado gluónico.

Podemos hacer dos observaciones. Primero, los estados intermedios en diagramas son siempre del tipo (129), y si queremos QCD como una teoría de confinamiento, estos representan un mesón. Segundo, dichos estados pueden ser interpretados como cuerdas con quarks en los extremos y que determinan una superficie equivalente a la lámina mundo de la teoría de cuerdas.

Aceptar la idea de que $1/N = 1/3$ es una buena aproximación para QCD no viene de argumentos teóricos, como menciona Witten []. Pues decidir si una serie $\sum a_n(\frac{1}{N})^N$ estará dominada por los primeros términos depende completamente de cuan grandes son los coeficientes a_n. Si los coeficientes son muy pequeños, $\frac{1}{N} = \frac{1}{3}$ puede ser considerado pequeño y si son muy grandes, $\frac{1}{N}$ sería un número grande desde el punto de vista de la serie.

2) *Una teoría de de gauge en una red (lattice) en la aproximación de acoplamiento fuerte ($1/g^2$ pequeño) posee la misma estructura que un modelo de cuerdas.*

El confinamiento de los quarks o más bien de las líneas de fuerza del campo cromoeléctrico entre un quark y un antiquark es un fenómeno no perturbativo de QCD. Intentar explicar el confinamiento con algún desarrollo perturbativo no procede. Kennett G. Wilson sugiere un método[7], conocido como teoría de gauge en la red (o Wilson Lattice). Aquí el espacio euclídeo continuo se sustituye por una red hipercúbica con igual espaciado a en las direcciones x, y, z y temporal t, y definimos una plaquita (plaquette) como una cara de este hipercubo con dimensiones $a * a$. Entonces la teoría de gauge aparece discretizada, por lo que un campo de gauge, por ejemplo de $SU(3)$, se define por una pequeña cadena o cuerda denotada como $U(n, n+\hat{\mu})$, la cual está asociada a la arista que comienza en el punto n-ésimo y término en el punto $n + \hat{\mu}$, donde $\hat{\mu}$ representa una dirección en la μ-ésima dirección del reticulado. El procedimiento que se sigue en el contexto de confinamiento es considerando el loop de Wilson

$$W[C] =$$

P Tr e$^{i \oint_C A_\mu dx^\mu}$ (130)(donde C representa un loop cerrado y P el ordenamiento de los caminos de la exponencial a lo largo del loop) en la red, pues este representa la acción del par quark-antiquark ($q\bar{q}$). El cálculo se realiza en la aproximación de acoplamiento fuerte, es decir para $1/g^2$ pequeño y se calcula el promedio. Se encuentra que el resultado es proporcional al área mínima que cubre la superficie dentro de las líneas mundo generadas entre dos fuentes que crean y aniquilan un par $q\bar{q}$. Y se verifica que el potencial entre un quark y un antiquark separados una distancia R y con N colores tiene la siguiente forma

$$V(R) \sim$$

R $ln(Ng^2)$(131)es decir el potencial es lineal en R. Por otro lado, en el marco de las teorías de cuerdas, podemos interpretar $W[C]$ como una suma sobre superficies con topología de un disco acotadas por el contorno C o como una amplitud para una cuerda abierta cuyos extremos marcan el contorno. Esto sugiere que la acción efectiva para QCD (a bajas energías) en la aproximación de acoplamiento fuerte es una teoría tipo cuerda. Aunque por ahora tal modelo de cuerda es desconocido, esperamos que esta posea ciertos rasgos característicos de QCD. También hay que considerar que las superficies para la teoría de campos de gauge están definidas sobre la red mencionada, mientras que las teorías de cuerdas se definen sobre un espacio continuo, lo cual es otra dificultad que se debe superar.

3) *La fenomenología de Regge[8].*

Se refiere a la propiedad experimental de una relación simple entre momentum angular J y masa m al cuadrado

$$J = \alpha_o + \alpha' m^2 \tag{132}$$

donde α_o denota el intercepto y $\alpha' \simeq 0.9$ GeV^{-2} [20] la pendiente de Regge. En esta trayectoria están agrupados mesones distanciados por dos enteros en J.

Hasta ahora QCD no ha podido explicar este fenómeno. Sin embargo, en los modelos de cuerdas obtenemos espectros de estados los cuales caen dentro de una trayectoria de Regge. Por ejemplo, para cuerdas cerradas el intercepto es igual a 2 (por eso aquí tenemos una teoría de gravitones sin masa). Por otro lado, notemos la siguiente idea simple. Supongamos una cuerda de longitud $2R$ rotando rígidamente con una velocidad angular w, donde $wR = c$. Un punto r a lo largo de la cuerda esta moviéndose con velocidad $v(r)/c = r/R$. Entonces la energía de la cuerda es

$$E = m = 2\int_o^R \frac{T}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dr[r = Rcos\theta] = 2RT \int_o^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi RT \tag{133}$$

Y el momentum angular esta dado por

$$J = 2\int_o^R \frac{Trv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dr = \frac{1}{\pi RT^2} \tag{134}$$

Por lo tanto

$$J = \frac{m^2}{2\pi T} = \alpha' m^2 \tag{135}$$

Entonces tenemos que las ideas de cuerdas dan una fácil explicación del fenómeno de Regge. Sin embargo, en la actualidad no hay ninguna teoría de cuerdas conocida que describa este fenómeno debido a que en los modelos conocidos aparecen estados sin masa de spin uno y dos, los cuales no corresponden a resonancias hadrónicas físicas.

4) *La observación de Lüscher[9] de que al potencial quark-antiquark V(R) hay que agregar una corrección coulombiana.*

Los modelos de cuerdas dan un potencial de confinamiento que aumenta linealmente con la separación de los quarks. Lüscher et al notaron que los desplazamientos tipo fluctuaciones cuánticas de la cuerda con extremos fijos en la dirección perpendicular a la línea que conecta los quarks separados una distancia R induce un término coulombiano o del tipo $1/R$

$$V(R) = \sigma R - \frac{\pi}{24}\frac{d-2}{R} + O(1/R^2) \tag{136}$$

donde σ es la tensión de la cuerda, d es la dimensión del espacio-tiempo y la parte $1/R$ es un fenómeno a larga distancia. Esto es en $R^2 \geq \frac{\pi(d-2)}{12\sigma}$. Esto último de acuerdo a la expresión deducida por Alvarez[10] $V(R) = \sigma(R^2 - R_c^2)^{1/2}$.

Por cierto, en el cálculo de estados ligados de un quark pesado y el respectivo antiquark, por ejemplo en la partícula J/ψ (que es un mesón $c\bar{c}$, un quark charm y su antiquark), aplicamos un tratamiento perturbativo como corresponde con dos quarks a pequeñas distancias. Sin embargo, la libertad asintótica sugiere que en este cálculo requerimos de un potencial tipo Coulomb. Hay diversas proposiciones al respecto (ver citas de[11]) y una de ellas es el término de Lüscher derivado en el contexto de modelos de cuerdas.

Podemos agregar un último argumento, aunque la lista no es completa.
5) *Recientes desarrollos en teoría de supercuerda posibilitan la relación entre una teoría de gauge en cuatro dimensiones y una teoría de cuerda en diez dimensiones gracias a la correspondencia AdS/CFT.*

Las evidencias para sostener la correspondencia entre una teoría de gauge y una teoría de cuerda han sido desarrolladas por Maldacena[13]. La conjetura dice que una teoría de supercuerda en un espacio curvo de diez dimensiones (espacio de cinco dimensiones Anti-de Sitter AdS_5 y esfera de 5 dimensiones S^5) es equivalente a una teoría de gauge en cuatro dimensiones con supersimetría $N = 4$ con un grupo de gauge $SU(N)$.

El espacio anti-de Sitter referido es un espacio homogéneo con curvatura negativa y las cinco dimensiones se refieren a cuatro espaciales y una temporal. La teoría de gauge $N = 4$ es una teoría de campos conforme (CFT, conformal field theory).

Una idea inmediata que sigue a la conjetura de Maldacena es su extensión a una teoría de gauge no supersimétrica de cuatro dimensiones como QCD. Al respecto Witten[14] hace una extensión al caso donde la supersimetría está rota dejando abierta la posibilidad de progresar en la descripción de QCD por un modelo de cuerda. También Gross y Ooguri[15] tienen un trabajo en el que llevan su interés a teorías de gauge no supersimétricas.

Debe quedar claro que en esta tesis no están consignados estos importantes temas. Los desarrollos teóricos mencionados dan crédito a la idea de que debe haber un régimen cinématico donde la cuerda bosónica debe proporcionar una descrpción aproximadamente válida.

En realidad es altamente cuestionable que donde uno espera una descripción tipo cuerda, sea válido para QCD real, no supersimétrico, cuadridimensional y asintóticamente libre, ya que una cuerda no parece ser el lenguaje natural para entender procesos de alta energía en choques profundamente inelásticos (en los cuales se lanzan electrones sobre protones y neutrones y donde las radiaciones electromagnéticas que emite el electrón penetran profundamente la estructura del protón). Esto porque los resultados indican que las secciones eficaces de dispersión inelática se parece a lo que se obtendría si suponemos que los electrones al penetrar en los protones se encuentran con blancos puntuales.

Sin embargo, podemos asumir una versión más tratable de una cuerda hadrónica basada en la propuesta de[] de una cuerda como teoría efectiva.

Esta versión requiere únicamente que el comportamiento de un loop de Wilson grande sea descrito en el límite infrarojo por una teoría de campo bidimensional efectiva la cual será referida como una “teoría de cuerda efectiva” (de aquí no una verdadera teoría de cuerda) y que explica las propiedades tipo cuerda de un tubo de líneas de flujo cromoeléctrico largo. Digamos que no está claro como extender esta descripción de cuerda efectiva a un régimen ultravioleta, es decir como relacionarla con algún tipo de de cuerda “fundamental” la cual si es consistente en el nivel cuántico. O explicado de acuerdo a fluctuaciones del tubo de líneas de flujo podemos describir este por una teoría cuántica de campo bidimensional sin masa, donde los campos describirían desplazamientos transversales del tubo de líneas de flujo. Aquí no podemos apreciar el comportamiento a cortas distancias, pero si pueden obtenerse predicciones para el límite infrarrojo. Notemos que en el límite infrarrojo la teoría cuántica de campo llega a ser una teoría de campo invariante conforme.

4 Acoplando Piones a la Cuerda QCD

La cuerda hadrónica en el gauge conforme esta descrita por la acción de la teoría de campos conforme en el espacio-tiempo euclideo 4-dimensional [1]

$$\mathcal{W}_{str} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^{2+\epsilon}\sigma \left(\frac{\varphi}{\mu}\right)^{-\epsilon} \partial_i x_\mu \partial_i x_\mu, \tag{137}$$

donde para $\epsilon = 0$ consideramos

$$x_\mu = x_\mu(\tau, \sigma); \quad -\infty < \tau < \infty, 0 < \sigma < \infty; \quad i = \tau, \sigma \quad \mu = 1, ..., 4.$$

El factor conforme $\varphi(\tau, \sigma)$ es introducido para restaurar la invariancia conforme en $2 + \epsilon$ dimensiones, y es la única manera que entra en la teoría. Como se menciona en el tercer punto de la parte 3, la pendiente de las trayectorias de Regge (relacionada con la inversa de la tensión de la cuerda) tiene un valor universal $\alpha' \simeq 0.9$ GeV^{-2} [20].

Nos gustaría acoplar de manera invariante quiral la matriz en el espacio de sabor $U(x)$ la cual contiene los campos mesónicos para los grados de libertad de la cuerda, mientras que preserva covariancia general en las coordenadas en dos dimensiones e invariancia conforme bajo transformaciones de escala locales del tensor métrico bidimensional. La ecuación de movimiento para el campo $U(x)$

[1] Las evidencias directas para dimensiones de la lámina-mundo de la cuerda[33, 34] (d=2) y del espacio target[35] (D=4) fueron encontradas del análisis densidades de estados mesónicos a altas energías....

será entonces obtenida de la condición de que la teoría cuántica de campos debe ser invariante conforme, es decir la funcional β para los acoplamientos $U(x)$ debe anularse.

Ya que la variable bosónica x de la cuerda no contiene dependencia de sabor, debemos inventar un modo de acoplarla a la variable background $U(x)$. Para esto introducimos variables de Grassmann ('quarks') sin dimensiones, o más bien varias familias de ellos, yaciendo sobre el borde de la lámina-mundo generada por la cuerda: $\psi_L(\tau), \psi_R(\tau)$ los cuales transforman en la representación fundamental del grupo de sabor de quarks livianos ($SU(2)$ en el presente trabajo). Introducimos una acción hermítica local $S_b = \int d\tau L_f$ en el borde $\sigma = 0$, para describir la interacción con los campos quirales de background $U(x(\tau)) = \exp(i\pi(x)/f_\pi)$, donde la escala de normalización $f_\pi \simeq 93MeV$, la constante del decaimiento del pión débil, es introducida para relacionar el campo $\pi(x)$ a un mesón-π.

El borde del lagrangiano es elegido para ser invariante bajo reparametrización y en su forma más simple se lee

$$
\begin{aligned}
L_f &= \frac{1}{2} i \Big(\bar{\psi}_L U(1-z)\dot{\psi}_R - \dot{\bar{\psi}}_L U(1+z)\psi_R \\
&\quad + \bar{\psi}_R U^+(1+z^*)\dot{\psi}_L - \dot{\bar{\psi}}_R U^+(1-z^*)\psi_L \Big) ,
\end{aligned} \tag{138}
$$

de aquí en adelante un punto implica una derivada en τ: $\dot{\psi} \equiv d\psi/d\tau$. Se ha hecho un número de redefiniciones del campo, con la finalidad de llegar a la ecuación (138). Es imposible simplificar la ecuación (138) algo más, los detalles están dados en el Apéndice A.

Una restricción más se obtiene requiriendo invariancia CP. Hay dos transformaciones tipo CP. La primera es

$$
U \leftrightarrow U^+, \quad \psi_L \leftrightarrow \psi_R. \tag{139}
$$

y el lagrangiano de encima es simetrico CP para $z = -z^* = ia$. La segunda es

$$
U \leftrightarrow U^+, \quad \psi_L \to U^+\psi_L, \quad \psi_R \to U\psi_R. \tag{140}
$$

Bajo esta transformación el lagrangiano llega a ser invariante sólo para $z = 0$. Interpretaremos la primera transformación CP como la transformación física y la cual uno requeriría de un lagrangiano que describe interacciones fuertes.

El acoplamiento de encima puede parecer sorprendente en principio y algo *ad hoc*. Para ver que esto no es así, expandamos el campo no lineal $U(x)$, es decir $U(x) \simeq 1 + i\pi(x)/f_\pi + ...$ y retengamos los primeros dos términos. El primer término justamente da origen a un propagador función-θ el cual eventualmente deja el ordenamiento familiar en las amplitudes de cuerda usual $t_1 < t_2 < .....$ El segundo término provee justamente (después de integrar los fermiones fuera) el vértice usual (taquiónico!). En breve, si ignoramos las no-linealidades en la teoría volvemos a las dificultades usuales.

Es fácil ver que la acción previa es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas de la lámina mundo bidimensional. La acción fermiónica es automaticamente invariante conforme, porque esta no contiene el tensor métrico de la lámina-mundo bidimensional, ya que esta puede ser escrita como una integral de línea.

5 Diagramar

Ahora expandiremos $U(x(\tau))$ alrededor de un background constante x_0 y miraremos los diagramas potencialmente divergentes una partícula irreducibles (1PI, one particle irreducible). Los clasificaremos de acuerdo al número de loops. Cada loop adicional viene con una potencia α'.

Expandimos la función $U(x)$ en potencias de la coordenada campo de la cuerda $x_\mu(\tau) = x_{0\mu} + \tilde{x}_\mu(\tau)$ alrededor de una constante x_0 la cual es el modo cero translacional de la cuerda

$$\begin{aligned} U(x) &= U(x_0) + \tilde{x}_\mu(\tau)\partial_\mu U(x_0) + \frac{1}{2}\tilde{x}_\mu(\tau)\tilde{x}_\nu(\tau)\partial_\mu\partial_\nu U(x_0) + \ldots \\ &\equiv U(x_0) + \mathcal{V}(\tilde{x}). \end{aligned} \tag{141}$$

Uno puede encontrar un parecido a la expansión derivada familiar de la teoría de perturbación quiral. Ciertamente la teoría de perturbación en los operadores (141) tiene sentido como una expansión en momentum bajo, el cual es presumiblemente válido para un momentum que se aproxima a la masa de la resonancia masiva (ρ mesón etc.). En el presente caso α' es el parámetro dimensional que normaliza la expansión de encima.

El propagador fermiónico libre es

$$\langle \psi_R(\tau)\bar{\psi}_L(\tau')\rangle = U^{-1}(x_0)\theta(\tau - \tau'). \tag{142}$$

Si imponemos simetría CP entonces

$$\langle \psi_L(\tau)\bar{\psi}_R(\tau')\rangle = \langle \psi_R(\tau)\bar{\psi}_L(\tau')\rangle^\dagger = U(x_0)\theta(\tau - \tau'), \tag{143}$$

para campos quirales unitarios $U(x)$.

El propagador bosónico proyectado sobre el borde es

$$\langle x_\mu(\tau)x_\nu(\tau')\rangle = \delta_{\mu\nu}\Delta(\tau - \tau'), \quad \Delta(\tau \to \tau') = \Delta(0) \sim \frac{\alpha'}{\epsilon}, \quad \partial_\tau\Delta(\tau \to \tau') = 0, \tag{144}$$

Los últimos resultados se sostienen en regularización dimensional (ver más abajo).

De manera de hacer contacto entre regularización dimensional, un cut-off a corta distancia (el cual usaremos más tarde) y fenomenología de Regge necesitaremos fijar sin ambiguedad la normalización del propagador de la cuerda. Esto puede ser inferido de la definición del kernel de la amplitud taquiónica de N-puntos para la cuerda abierta[36]. La amplitud Veneziano corresponde a insertar operadores vértice : $\exp(ik_\mu^{(j)}x^\mu(\tau_j))$: sobre el borde de la cuerda. Después de resolver la integral gaussiana uno obtiene para el kernel de la función-beta generalizada

$$\begin{aligned}\langle\prod_j : \exp(ik_\mu^{(j)}x_\mu(\tau)) :\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j\neq l} k_\mu^{(j)}k_\mu^{(l)}\Delta(\tau_j-\tau_l)\right)\\ &\equiv \prod_{j>l}|\tau_j-\tau_l|^{2\alpha' k^{(j)}k^{(l)}}, \qquad (145)\end{aligned}$$

la cual si ambiguedad prescribe

$$\Delta(\tau_j-\tau_l) = -2\alpha' \ln(|\tau_j-\tau_l|\mu). \qquad (146)$$

La dependencia en μ no se muestra en (145) debido a la conservación energía-momentum.

Guardando en mente esta definición determinaremos el propagador de la cuerda en regularización dimensional, restringida sobre el borde. Primero calcularemos la integral de momentum en $2+\epsilon$ dimensiones

$$\begin{aligned}\Delta_\epsilon(\tau) &= 4\pi\alpha'\left(\frac{\varphi}{\mu}\right)^\epsilon \int \frac{d^{2+\epsilon}k}{(2\pi)^{2+\epsilon}}\frac{\exp(ik_0\tau)}{k^2}\\ &= \alpha'\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\left|\frac{\tau\mu\sqrt{\pi}}{\varphi}\right|^{-\epsilon}\\ &\stackrel{\epsilon\to 0}{=} 2\alpha'\left[\frac{1}{\epsilon}+C-\ln\left(\frac{\tau\mu}{\varphi}\right)\right]+\mathcal{O}(\epsilon). \qquad (147)\end{aligned}$$

Un propagador regularizado dimensionalmente propiamente normalizado para reproducir (146) puede ser construido sustrayendo de (147) su valor en $\tau\mu=1$ donde (146) se anularía

$$\begin{aligned}\Delta_\epsilon(\tau)|_{reg} &= \alpha'\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\left\{\left|\frac{\tau\mu\sqrt{\pi}}{\varphi}\right|^{-\epsilon}-\left|\frac{\sqrt{\pi}}{\varphi}\right|^{-\epsilon}\right\}\\ &\stackrel{\epsilon\to 0}{=} -2\alpha'\ln|\tau\mu|+\mathcal{O}(\epsilon). \qquad (148)\end{aligned}$$

Por lo tanto uno encuentra sin ambiguedad la relación

$$\Delta(0) = -\alpha'\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\left|\frac{\sqrt{\pi}}{\varphi}\right|^{-\epsilon} \stackrel{\epsilon\to 0}{=} -2\alpha'\left[\frac{1}{\epsilon}+C+\ln\varphi\right]+\mathcal{O}(\epsilon)\equiv\Delta_\epsilon-2\alpha'\ln\varphi, \qquad (149)$$

donde en el espíritu de la regularización dimensional hemos asumido que $\epsilon<0$ y de aquí el primer término en (148) se anula en $\tau=0$.

Los operadores vértice de dos líneas fermiónicas y N líneas bosónicas son generados por la expansión (141) y aparece con un signo extra $(-)=i^2$ siguiendo la definición para la funcional generatriz $Z_b=\langle\exp(iS_b)\rangle$ y la ec. (138). En particular, para la transición $L\to R$ uno tiene

$$V = -\frac{1}{2}\left((1-z)\mathcal{V}(\tilde{x})\partial_\tau+(1+z)\partial_\tau\left[\mathcal{V}(\tilde{x})\ldots\right]\right), \qquad (150)$$

y para la transición $R \to L$ aparece el vértice hermítico conjugado. La correspondiente regla de Feynman para vértice de dos líneas fermiónicas y N líneas bosónicas de la transición $L \to R$ es

$$\mathcal{V}_N = -\frac{1}{2n!}\partial_A \delta(A-B) \quad \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_N} U(x_0) \quad [(1-z)\delta(A-\tau_1)\cdots\delta(A-\tau_N)+ \\ +(1+z)\delta(\tau_1 - B)\cdots\delta(\tau_N - B)], \tag{151}$$

donde A, B son valores de tiempo-propio para los fermiones izquierda y derecha y $\tau_1, \dots, \tau_N$ son valores de tiempo-propio para las campos bosónicos de la cuerda.

Desde este punto podemos proceder directamente con el proceso de renormalización. Determinaremos los contratérminos requeridos para hacer que la funcional beta para el acoplamiento $U(x)$ se anule hasta el nivel dos loops. A pesar de la relativa complejidad de las reglas de Feynman, el hecho que estemos trabajando con una teoría de campos acotada es crucial para hacer el cálculo manejable. En efecto, más diagramas puede determinarse simplemente jugando con integración por partes y usando propiedades básicas de la función delta de Dirac. Todavía la renormalización no es enteramente trivial y la estructura ultravioleta de los contratérminos es sorprendemente bastante compleja. Es gracias a esta complejidad que valores distintos de cero pueden ser obtenidos para los coeficientes $O(p^4)$. En efecto, creemos que algunos de los resultados en este trabajo pueden tener presencia en una discusión más general que envuelva cuerdas fundamentales también.

En lo que sigue no sólo retendremos las partes singulares de los diagramas a un loop sino que también las partes finitas, pues serán necesarios para construir diagramas a dos loops.

6 Renormalización del Propagator Fermiónico a un Loop

Para mantener un cierto orden en el desarrollo, relegaremos los detalles de la derivación de los diferentes diagramas de Feynman a los apéndices.

Usando el conjunto de reglas de Feynman descritas en la sección previa uno llega al siguiente resultado para la parte divergente del propagador (Apéndice B),

$$\theta(A-B)\frac{1}{2}\Delta(0)U^{-1}\left\{-\partial_\mu^2 U + \frac{3+z^2}{2}\partial_\mu U U^{-1}\partial_\mu U\right\}U^{-1}. \tag{152}$$

Esta divergencia es eliminada introduciendo un contratérmino apropiado $U \to U + \delta U$

$$\delta U = \Delta(0)\left[\frac{1}{2}\partial_\mu^2 U - \frac{3+z^2}{4}\partial_\mu U U^{-1}\partial_\mu U\right] = 0. \tag{153}$$

Tal como vimos en los dos ejemplos de aplicación del método del campo de background en la parte 1, a simetría conforme es restaurada (la funcción beta es cero) si la contribución de encima se anula.

Encontremos el valor de z para el que la variación de U es compatible con su unitariedad ($UU^\dagger = 1$).

$$\delta(UU^+) = U \cdot \delta U^+ + \delta U \cdot U^+ = 0. \tag{154}$$

Un cálculo simple usando (153), muestra que esto toma lugar para $z = \pm i$. Para otros valores de z la ec.(153) produce $\partial_\mu U U^{-1} \partial_\mu U = 0$, lo cual tiene únicamente una solución constante trivial en el espacio-tiempo euclídeo. En [31] este valor de z no fue considerado y así la unitariedad de U no fue convenientemente tomada en cuenta.

Cuando $z = \pm i$ y antes de que la ligadura de unitariedad fuera impuesta la acción clásica local que tiene (153) como ecuación de movimiento es

$$W^{(2)} = \frac{f_\pi^2}{8} \int d^4x \ \mathrm{tr} \left[\partial_\mu U \partial_\mu U^{-1} + \partial_\mu U^+ \partial_\mu (U^+)^{-1} \right]. \tag{155}$$

Para otros valores de $z \neq \pm 1; \pm i$ la acción local relacionada es desconocida. El lagrangiano de encima es el conocido modelo sigma no lineal, el cual comúnmente es empleado para describir interacciones de piones.

Para comprobar lo anterior podemos variar la acción

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{f_\pi^2}{8} \int d^4x \ \mathrm{tr} \left[\partial_\mu (\delta U) \partial_\mu U^{-1} + \partial_\mu U \partial_\mu (\delta U^{-1}) + \mathrm{h.c.} \right] \\ &= \frac{f_\pi^2}{8} \int d^4x \ \mathrm{tr} \left[-\delta U \partial_\mu \partial_\mu U^{-1} - \partial_\mu \partial_\mu U \delta U^{-1} + \mathrm{h.c.} \right] \\ &= \frac{f_\pi^2}{8} \int d^4x \ \mathrm{tr} \{ -2 \delta U U^{-1} \left[\partial_\mu \partial_\mu U - \partial_\mu U U^{-1} \partial_\mu U \right] U^{-1} \} \end{aligned} \tag{156}$$

donde se ha usado

$$\partial_\mu \partial_\mu U^{-1} = \partial_\mu [-U^{-1} \partial_\mu U U^{-1}] = 2U^{-1} \partial_\mu U U^{-1} \partial_\mu U U^{-1} - U^{-1} \partial_\mu \partial_\mu U U^{-1} \tag{157}$$

Y como, en general, sean dos matrices A y B, si $\mathrm{tr}[A \delta B] = 0$ entonces $A = 0$, con lo cual llegamos a la ecuación de movimiento (153).

Hemos así tenido éxito en encontrar la acción inducida por la cuerda QCD. Esta tiene todas las propiedades requeridas de localidad, simetría quiral y comportamiento apropiado a bajo momentum (cero de Adler). Además, describe piones sin masa. La escala de normalización, f_π, no se puede predecir de estos argumentos.

Hasta este punto hemos acertado completamente en nuestro programa, pero naturalmente ninguna predicción real ha sido alcanzada aún. En realidad, ya conocíamos la forma de esta acción de principios generales, aunque esto es conveniente para ver que hemos trabajado consistentemente.

7 Renormalización de los Vértices a un Loop

Para hacer el cálculo a dos loops necesitaremos, en adición a los contratérminos para el propagador a un loop (el cual obtuvimos), los contratérminos para el vértice con dos líneas fermiónicas y una y dos líneas bosónicas x^μ respectivamente. También chequearemos si el lagrangiano mínimo (138) es suficiente para renormalizar los vértices. Y veremos que, en efecto, no es.

Obtengamos las divergencias para vértices con líneas bosónicas externas. Introducimos un campo bosónico de background externo $\bar{x}_\mu$ para describir vértices con varias líneas bosónicas y separamos $x_\mu = \bar{x}_\mu + \eta_\mu$. El propagador libre para el campo de fluctuación η_μ coincide con x_μ.

Entonces la divergencia total en el vértice con dos líneas fermiónicas y una bosónica es (ver Apéndice C)

$$\begin{aligned}
&\theta(A-B)\frac{1}{4}\Delta(0)U^{-1}\left\{\bar{x}_\mu(A)(1+z)\left[-\partial_\mu(\partial^2 U)+2\partial_\nu U U^{-1}\partial_\mu\partial_\nu U\right.\right.\\
&\left.+(1+z)\partial_\mu\partial_\nu U U^{-1}\partial_\nu U-\frac{1}{2}(1+z)(3-z)\partial_\nu U U^{-1}\partial_\mu U U^{-1}\partial_\nu U\right]\\
&+\bar{x}_\mu(B)(1-z)\left[-\partial_\mu(\partial^2 U)+(1-z)\partial_\nu U U^{-1}\partial_\mu\partial_\nu U+2\partial_\mu\partial_\nu U U^{-1}\partial_\nu U\right.\\
&\left.\left.-\frac{1}{2}(1-z)(3+z)\partial_\nu U U^{-1}\partial_\mu U U^{-1}\partial_\nu U\right]\right\}U^{-1}\\
&\equiv -\frac{1}{2}\theta(A-B)U^{-1}\left[\bar{x}_\mu(B)\Phi^{(1)}_\mu+\bar{x}_\mu(A)\Phi^{(2)}_\mu\right]U^{-1}. \qquad (158)
\end{aligned}$$

Ahora amputamos líneas fermiónicas y evaluamos las divergencias vértice puras. Las reglas de amputación son

$$\begin{aligned}
\bar{x}_\mu(A)\theta(A-B) &= -\int d\tau\partial_\tau\theta(A-\tau)\bar{x}_\mu(\tau)\theta(\tau-B),\\
\bar{x}_\mu(B)\theta(A-B) &= \int d\tau\theta(A-\tau)\bar{x}_\mu(\tau)\partial_\tau\theta(\tau-B). \qquad (159)
\end{aligned}$$

Entonces la parte divergente (158) puede ser reproducida por el siguiente operador en el lagrangiano

$$\frac{i}{2}\left(\bar{\psi}_L\Phi^{(1)}\dot{\psi}_R-\dot{\bar{\psi}}_L\Phi^{(2)}\psi_R\right)+\text{h.c.},\qquad \Phi^{(1,2)}\equiv\bar{x}_\mu(\tau)\Phi^{(1,2)}_\mu, \qquad (160)$$

donde las matrices vértice $\Phi^{(1,2)}_\mu$ pueden reagruparse del siguiente modo

$$\begin{aligned}
\Phi^{(1)}_\mu &= \Delta(0)\left\{(1-z)\partial_\mu\left(\frac{1}{2}\partial^2 U-\frac{3+z^2}{4}\partial_\nu U U^{-1}\partial_\nu U\right)\right.\\
&\quad -\frac{1-z^2}{2}\left(\frac{1-z}{2}\partial_\mu\partial_\nu U U^{-1}\partial_\nu U-\frac{1+z}{2}\partial_\nu U U^{-1}\partial_\mu\partial_\nu U\right.\\
&\quad \left.\left.+z\partial_\nu U U^{-1}\partial_\mu U U^{-1}\partial_\nu U\right)\right\}\\
&\equiv (1-z)\partial_\mu(\delta U)-\phi_\mu\\
\Phi^{(2)}_\mu &= (1+z)\partial_\mu(\delta U)+\phi_\mu. \qquad (161)
\end{aligned}$$

Los términos proporcionales a las derivadas de δU son automaticamente eliminadas por la redefinición de U, que uno hace para renormalizar el propagador a un loop (y esto naturalmente se anula si las ecuaciones de movimiento son impuestas). Pero la parte proporcional a ϕ_μ permanece, por lo que son requeridos nuevos contratérminos para absorber estas divergencias. Evidentemente, estos términos aparecen de los siguientes términos en el lagrangiano:

$$\begin{aligned}\Delta L_{div.} &= \frac{i}{4}\Delta(0)(1-z^2)\bar{\psi}_L\left(\frac{1-z}{2}\partial_\nu\dot{U}U^{-1}\partial_\nu U - \frac{1+z}{2}\partial_\nu UU^{-1}\partial_\nu\dot{U}\right.\\ &\quad \left.+z\partial_\nu UU^{-1}\dot{U}U^{-1}\partial_\nu U\right)\psi_R + \text{h.c.} \qquad (162)\end{aligned}$$

Por lo tanto los contratérminos requeridos para eliminar las divergencias adicionales para el vértice con una línea bosónica y dos fermiónicas pueden ser parametrizadas por tres constantes desnudas g_1, g_2 y g_3, las cuales son reales si la simetría CP para $z=-z^*$ se sostiene

$$\begin{aligned}\Delta L_{bare} &= \frac{i}{8}(1-z^2)\bar{\psi}_L\Big((g_1-zg_2)\partial_\nu\dot{U}U^{-1}\partial_\nu U-(g_1+zg_2)\partial_\nu UU^{-1}\partial_\nu\dot{U}\\ &\quad +2zg_3\partial_\nu UU^{-1}\dot{U}U^{-1}\partial_\nu U\Big)\psi_R+\text{h.c.} \qquad (163)\end{aligned}$$

La renormalización se lleva a cabo redefiniendo los acoplos g_i del siguiente modo

$$g_i = g_{i,r} - \Delta(0). \qquad (164)$$

Las constantes $g_{i,r}$ son finitas, pero en principio esquema dependiente, y de (149) se sigue que una dependencia logarítmica de los acoplamientos desnudos sobre el factor conforme φ es introducido a lo largo del proceso de la renormalización. Los contratérminos son de más alta dimensionalidad que el lagrangiano original (138) y por lo tanto los acoplamientos g_i son de dimensión M^{-2}. Ya que (138) fue en realidad el acoplamiento más general permitido por las simetrías del modelo, en particular invariancia conforme, uno llega a la conclusión de que la simetría conforme está rota, ya en el nivel árbol, por estos acoplamientos, a menos que ello resulte para anularse. Puesto que son dimensionales, es natural normalizarlos por el único parámetro dimensional, es decir α'.

Aún cuando los nuevos acoplamientos son dimensionales, esto produce que en el orden que estamos computando, la traza del tensor energía-momentum es sin embargo anulada una vez que los requerimientos de unitariedad de U son tomados en cuenta (ver Apéndice D) y por lo tanto la invariancia conforme no está rota en el orden en que estamos trabajando. A ordenes más altos en la expansión α' contratérminos adicionales pueden ser, sin embargo, requeridos con objeto de asegurar invariancia conforme perturbativamente. Posponemos una discusión más detallada para las secciones finales.

Uno puede introducir los acoplamientos "efectivos" en marcha

$$g_i + \Delta_\epsilon = g_{i,r} + 2\alpha' \ln\varphi \equiv g_i^\varphi, \qquad (165)$$

Los invariantes conformes a un loop son $g_1^\varphi - g_2^\varphi$ y $g_1^\varphi - g_3^\varphi$. De todos modos, la dependencia de los nuevos acoplamientos sobre los modos de Liouville está determinada.

En cualquier caso, la aparición de nuevos vértices cambia el propagador fermiónico debido a los diagramas discutidos en el Apéndice E. Uno obtiene de tales términoss (los cuales son de orden más alto en las derivadas) la siguiente contribución al propagador

$$\begin{aligned}
& \theta(A-B)\frac{1}{16}\Delta(0)(1-z^2)U^{-1}\left\{2(g_{1,r}-z^2g_{2,r})\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu U\right. \\
& -(1+z)(g_{1,r}+zg_{2,r})\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\rho\partial_\mu U \\
& -(1-z)(g_{1,r}-zg_{2,r})\partial_\rho\partial_\mu UU^{-1}\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu U \\
& \left.+4z^2g_{3,r}\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu U\right\}U^{-1} \\
\equiv\; & -\theta(A-B)\Delta(0)U^{-1}\delta^{(4)}UU^{-1} \qquad (166)
\end{aligned}$$

denotaremos esta contribución por $\theta(A-B)d_g$. Uno debería agregar la divergencia contenida en d_g al resultado a un loop, de tal modo que modifique la renormalización del campo U y las ecuaciones de movimiento

$$\bar{\delta}U=\Delta(0)\left[\frac{1}{2}\partial_\mu^2U-\frac{3+z^2}{4}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\mu U+\delta^{(4)}U\right]=0. \qquad (167)$$

Esto es, en efecto, la fuente de los muchos sought after términos $O(p^4)$.

Notemos que esta nueva contribución (166) es proporcional a $1-z^2$. En este punto tenemos que preguntarnos si tal ecuación de movimiento puede ser derivada de un lagrangiano efectivo local que contiene ambos operadores de dimensión 2 y dimensión 4. Esto constituiría entonces el lagrangiano efectivo derivado del modelo cuerda. Sin embargo, en este punto esta cuestión es demasiado prematura para ser formulada. Diagramas a dos loops generados de (138) ciertamente pueden producir similares contribuciones y, en realidad, podrían nuevos contratérminos de los diagramas con dos líneas fermiónicas y dos bosónicas, ellos requirirían un contratérmino adicional. En efecto, puede verse que las ecuaciones de movimiento de encima no pueden ser derivadas de un lagrangiano local que envuelve la matriz unitaria U. Los requerimientos de localidad y unitariedad forzarían $g_{j,r}=0$, por lo que esto no sería la respuesta completa.

Antes de concluir esta sección y trasladando a las otras contribuciones que justamente hemos mencionado, calculamos la renormalización del vértice con dos líneas fermiónicas y dos bosónicas, por esto es también requerido como un contratérmino. Sumariando la estructura divergente para estos diagramas (ver Apéndice F)

$$\begin{aligned}
& \theta(A-B)\frac{1}{4}U^{-1}\left\{\bar{x}_\mu(A)\bar{x}_\nu(A)\left[\partial_\mu\partial_\nu(-\delta U)(1+z)-\phi_{\mu\nu}\right]\right. \\
& +\bar{x}_\mu(B)\bar{x}_\nu(B)\left[\partial_\mu\partial_\nu(-\delta U)(1-z)+\phi_{\mu\nu}\right] \\
& +\Delta(0)frac1-z^22\int_B^A d\tau\left[-\bar{x}_\mu(\tau)\dot{\bar{x}}_\nu(\tau)\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\nu\partial_\rho U(1-z)\right. \\
& +\dot{\bar{x}}_\mu(\tau)\bar{x}_\nu(\tau)\partial_\rho\partial_\mu UU^{-1}\partial_\nu UU^{-1}\partial_\rho U(1+z) \\
& \left.\left.+(\bar{x}_\mu(\tau)\dot{\bar{x}}_\nu(\tau)-\dot{\bar{x}}_\mu(\tau)\bar{x}_\nu(\tau))\partial_\rho\partial_\mu UU^{-1}\partial_\nu\partial_\rho U\right]\right\}U^{-1}, \qquad (168)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\phi_{\mu\nu} &= \Delta(0)\frac{1-z^2}{2}\left[\frac{1-z}{2}\partial_\rho\partial_\mu\partial_\nu UU^{-1}\partial_\rho U - \frac{1+z}{2}\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho U\right.\\
&-z\partial_\rho\partial_\mu UU^{-1}\partial_\nu\partial_\rho U + z\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu\partial_\nu UU^{-1}\partial_\rho U\\
&+2z(\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\nu\partial_\rho U + \partial_\rho\partial_\mu UU^{-1}\partial_\nu UU^{-1}\partial_\rho U)\\
&\left.-2z\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\nu UU^{-1}\partial_\rho U\right] \qquad (169)
\end{aligned}$$

Uno puede chequear que los términos metidos en $\phi_{\mu\nu}$, y los que están en la última contribución en la ec. (168) se combinan como una segunda variación de los vértices de interacción adicionales (162) en coordenadas de campos. Por lo tanto su renormalización es completamente realizada con la ayuda de los contratérminos de la ec.(163) y no aparecen contratérminos adicionales u operadores.

Podemos también ver que, en efecto, cualquier diagrama con un número arbitrario de líneas bosónicas externas y dos líneas fermiónicas, es decir cualquier vértice de aquellos generados por la expansión perturbativa de (138) se hace finita por los contratérminos previos. Esto completa el programa de renormalización a un loop.

8 El propagador Fermiónico a Dos Loops

Las contribuciones a dos loops al propagador fermiónico pueden obtenerse de diagramas a un loop, con dos líneas bosónicas externas que se unen con un propagador bosónico. Se ha agregado un factor 1/2. Uno no sólo debe incluir diagramas una partícula irreducible sino que también una partícula reducible y considerar ambas partes divergente y finita. También se pueden calcular directamente de los diagramas a dos loops.

Hay 10 diagramas a dos loops los cuales están alistados en el Apéndice G. Las divergencias en el propagador a dos loops pueden ser presentadas separadamente en cinco partes

$$\theta(A-B)[d_I + d_{II} + d_{III} + d_{IV} + d_V]. \qquad (170)$$

La primera y la segunda partes contienen las divergencias dobles $\Delta^2(0)$, la tercera, cuarta y quinta partes contienen únicamente las divergencias simples $\Delta(0)$. Las partes finitas son irrelevantes para la presente discusión.

La componente d_I representa "la segunda variación" o la divergencia a un loop en la divergencia a un loop

$$\begin{aligned}
d_I &= -\frac{1}{2}U^{-1}\delta(\delta U)U^{-1} = -\frac{1}{2}\Delta(0)U^{-1}\left\{\frac{1}{2}\partial_\mu^2(\delta U) - \right.\\
&\left.-\frac{3+z^2}{4}\left[\partial_\mu(\delta U)U^{-1}\partial_\mu U - \partial_\mu UU^{-1}\,\delta U\,U^{-1}\partial_\mu U + \partial_\mu UU^{-1}\partial_\mu(\delta U)\right]\right\}U^{-1},\\
\delta U &= \Delta(0)\left[\frac{1}{2}\partial_\mu^2 U - \frac{3+z^2}{4}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\mu U\right]. \qquad (171)
\end{aligned}$$

Estructuras de campo quiral proporcionales a la divergencia doble $\Delta^2(0)$ que aparecen en la contribución a dos loops al propagador fermiónico.

Estructura CQ	d_I	d_{II}	**Total**
$\mu^2\rho^2$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$
$\mu^2\rho--\rho$	$\frac{3+z^2}{8}$	0	$\frac{3+z^2}{8}$
$\rho--\mu^2\rho$	$\frac{3+z^2}{8}$	0	$\frac{3+z^2}{8}$
$\rho--\mu^2--\rho$	$-\frac{3+z^2}{8}$	0	$-\frac{3+z^2}{8}$
$\rho--\mu--\mu\rho$	$-\frac{3+z^2}{8}-\frac{(3+z^2)^2}{32}$	$-\frac{(1-z^2)(1+z)^2}{32}$	$-\frac{11+z+5z^2-z^3}{16}$
$\mu\rho--\mu--\rho$	$-\frac{3+z^2}{8}-\frac{(3+z^2)^2}{32}$	$-\frac{(1-z^2)(1-z)^2}{32}$	$-\frac{11-z+5z^2+z^3}{16}$
$\mu\rho--\mu\rho$	$\frac{3+z^2}{8}$	0	$\frac{3+z^2}{8}$
$\rho--\mu--\mu--\rho$	$\frac{3+z^2}{8}+\frac{(3+z^2)^2}{32}$	0	$\frac{(3+z^2)(7+z^2)}{32}$
$\mu--\mu\rho--\rho$	$-\frac{(3+z^2)^2}{16}$	$\frac{(1-z^2)^2}{16}$	$-\frac{1+z^2}{2}$
$\rho--\mu--\rho--\mu$	$\frac{(3+z^2)^2}{16}$	$\frac{(1-z^2)z^2}{8}$	$\frac{(9-z^2)(1+z^2)}{16}$

por lo tanto es renormalizada por la redefinición del campo U y se anula cuando son impuestas las ecuaciones de movimiento. Los contratérminos que renormalizan el campo U producen la misma expresión pero dos veces más y de signo opuesto. Así el resultado es $-d_I$ en correspondencia con los resultados de [31] (para $z=1$ esto coincide). Esto es todo lo que fué obtenido en este trabajo. En particular polos simples, $\Delta(0)$ no aparecen y por lo tanto no fueron obtenidas nuevas ecuaciones a nivel dos loops. Por consiguiente, los coeficientes de los coeficientes $O(p^4)$ fueron supuestos nulos. Este no será el caso aquí.

La segunda parte representa los términos que quedan de orden $\Delta^2(0)$ en los diagramas a dos loops después de la sustracción de d_I y esto se lee

$$\begin{aligned} d_{II} &= \frac{1}{32}\Delta^2(0)(1-z^2)U^{-1}\left\{2(1-z^2)\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu U\right. \\ &\quad -(1+z)^2\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\rho\partial_\mu U-(1-z)^2\partial_\rho\partial_\mu UU^{-1}\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu U \\ &\quad \left.+4z^2\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu U\right\}U^{-1}. \end{aligned} \tag{172}$$

Este término es idéntico, pero de signo opuesto, a las contribuciones generadas por el contratérmino a un loop en el vértice con dos líneas fermiónicas y una bosónica, después de su inserción en un diagrama a un loop (ver Apéndice E).

Para sumariar, se muestra en la Tabla 1 la distribución de las divergencias $\Delta^2(0)$ entre d_I and d_{II}. Se usa una notación breve para los correspondientes operadores de campo quiral (CQ), por ejemplo, a $\mu--\mu\rho--\rho$ le corresponde $U^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\mu\partial_\rho UU^{-1}\partial_\rho UU^{-1}$.

En d_{III} incluimos estas divergencias de polos simples , proporcionales a $\Delta(0)$, los cuales son removidos una vez que la renormalización a un loop de U en la parte no local finita del propagador fermiónico a un loop (ver ec. (189)) es tomada en cuenta, esto es, cuando reemplazamos U por $U+\delta^{(2)}U$ en el propagador a un loop

$$\frac{1}{4}(1-z^2)\Delta(0)\Delta(A,B)U^{-1}\left[\partial_\mu(\delta U)U^{-1}\partial_\mu U \right. \\ \left. -\partial_\mu U U^{-1}\,\delta U\,U^{-1}\partial_\mu U + \partial_\mu U U^{-1}\partial_\mu(\delta U)\right]U^{-1}. \tag{173}$$

Asimismo en d_{IV} incluimos las divergencias que son eliminadas cuando los contratérminos adicionales en los vértices de un bosón (aquellos proporcionales a g_i) son incluidos en la parte finita del propagador fermiónico a un loop (los términos proporcionales a $\Delta(A,B)$ en la ec. (200)).

Uno puede chequear que todos los términos en el propagador fermiónico lineal a dos loops en $\Delta(0)$ y en $\Delta(A,B)$ pertenecen a d_{III} o a d_{IV}. Presentamos estos en la Tabla 2. Así la renormalización a un loop remueve d_{III} y d_{IV} completamente.

Sumario de divergencias simples $\Delta(0)$ las que son eliminadas después de introducir los contratérminos a un loop.

Estructura CQ	d_{III}	$d_{IV} \leftrightarrow -2d_{II}$	**Total**
$\mu^2\rho - -\rho$	$\frac{1-z^2}{8}$	0	$\frac{1-z^2}{8}$
$\rho - -\mu^2\rho$	$\frac{1-z^2}{8}$	0	$\frac{1-z^2}{8}$
$\rho - -\mu^2 - -\rho$	$-\frac{1-z^2}{8}$	0	$-\frac{1-z^2}{8}$
$\rho - -\mu - -\mu\rho$	$-\frac{(1-z^2)(3+z^2)}{16}$	$\frac{(1-z^2)(1+z)^2}{16}$	$-\frac{(1-z^2)(1-z)}{8}$
$\mu\rho - -\mu - -\rho$	$-\frac{(1-z^2)(3+z^2)}{16}$	$\frac{(1-z^2)(1-z)^2}{16}$	$-\frac{(1-z^2)(1+z)}{8}$
$\mu\rho - -\mu\rho$	0	0	0
$\rho - -\mu - -\mu - -\rho$	$\frac{(1-z^2)(3+z^2)}{16}$	0	$\frac{(1-z^2)(3+z^2)}{16}$
$\mu - -\mu\rho - -\rho$	$-\frac{(1-z^2)(3+z^2)}{8}$	$-\frac{(1-z^2)^2}{8}$	$-\frac{1-z^2}{2}$
$\rho - -\mu - -\rho - -\mu$	$\frac{(1-z^2)(3+z^2)}{8}$	$-\frac{(1-z^2)z^2}{4}$	$\frac{(1-z^2)(3-z^2)}{8}$

Sin embargo, algunas divergencias de polos simples permanecen. En efecto, hay algunas divergencias lineales en $\Delta(0)$ las cuales vienen de la integral doble en los diagramas del Apéndice G, (217) y (219),

$$\begin{aligned} J(A,B) &= \int_B^A d\tau_1 \int_B^{\tau_1} d\tau_2 \partial_{\tau_1}\Delta(\tau_1-\tau_2)\partial_{\tau_2}\Delta(\tau_1-\tau_2) \\ &= -\int_0^{A-B} d\tau\,(A-B-\tau)\left[\dot{\Delta}(\tau)\right]^2. \end{aligned} \tag{174}$$

En el Apéndice H esta integral es calculada usando dos regularizaciones diferentes. La divergencia que se encuentra es

$$\begin{aligned} d_V &= c_V\Delta(0)\left[U^{-1}\partial_\rho U U^{-1}\partial_\mu U U^{-1}\partial_\mu U U^{-1}\partial_\rho U U^{-1}\right. \\ &\quad \left. -U^{-1}\partial_\rho U U^{-1}\partial_\mu U U^{-1}\partial_\rho U U^{-1}\partial_\mu U U^{-1}\right] \\ &\equiv -\Delta(0)U^{-1}\bar{d}_V U^{-1}. \end{aligned} \tag{175}$$

donde $c_V = \alpha'(1-z^2)^2/8 = \alpha'/2$ for $z = \pm i$. Este término sobrevive después de agregar todos los contratérminos y ambos con (166) son las únicas nuevas divergencias genuinas que pueden contribuir a la función beta (polos simples). Por lo tanto esto debe ser agregado a la ecuación de movimiento en el siguiente orden en la expansión α' y modifica los términos $\delta^{(4)}U$, $\delta^{(4)}U \to \delta^{(4)}U + \bar{d}_V$ de una manera crucial; digamos que esto abre una vía para soluciones no cero para las constantes de acoplamiento g_i y por lo tanto para valores distintos de cero para los coeficientes de Gasser-Leutwyler $O(p^4)$.

9 Integrabilidad Local y Unitariedad

Vimos que la ecuación de movimiento de $O(p^2)$, la ec. (153), puede ser obtenida de una acción local del tipo Weinberg (155), que envuelve una matriz unitaria $U(x)$, sólo para $z = \pm i$. Si los correspondientes términos con cuatro derivadas que justamente hemos encontrado son para ser derivados de operadores cuadridimensionales en un lagrangiano local efectivo entonces ciertas relaciones son seguramente para ser requeridas de las constantes arbitrarias $g_{i,r}$.

Tal lagrangiano tiene sólo dos términos compatibles con la simetría quiral si usamos las ecuaciones de movimiento bidimensionales (153),

$$\mathcal{L}^{(4)} = \frac{1}{2} f_\pi^2 \mathrm{tr}\left(K_1 \partial_\mu U \partial_\rho U^{-1} \partial_\mu U \partial_\rho U^{-1} + K_2 \partial_\mu U \partial_\mu U^{-1} \partial_\rho U \partial_\rho U^{-1} + h.c.\right). \tag{176}$$

Los términos

$$\partial_\mu^2 U \partial_\rho U^{-1} \partial_\rho U U^{-1}, \qquad \partial_\mu^2 U \partial_\rho^2 U^{-1}, \qquad (\partial_\mu^2)^2 U U^{-1}, \qquad \partial_\mu \partial_\rho U \partial_\mu \partial_\rho U^{-1}$$

los cuales en principio son posibles de reducir al conjunto (176) con ayuda de la integración por partes en la acción y de las ecuaciones de movimiento bidimensionales (153).

La variación del lagrangiano previo nos da la siguiente adición a las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta U} \quad = \quad & -f_\pi^2 U^{-1}\left\{2K_1\left[\partial_\mu\partial_\rho U U^{-1}\partial_\mu U U^{-1}\partial_\rho U + \partial_\mu U U^{-1}\partial_\rho U U^{-1}\partial_\mu\partial_\rho U\right.\right.\\
& -\partial_\mu U U^{-1}\partial_\rho U U^{-1}\partial_\mu U U^{-1}\partial_\rho U - 2\partial_\mu U U^{-1}\partial_\rho U U^{-1}\partial_\rho U U^{-1}\partial_\mu U\\
& \left.+\partial_\mu U U^{-1}\partial_\rho^2 U U^{-1}\partial_\mu U\right]\\
& +K_2\left[\partial_\mu\partial_\rho U U^{-1}\partial_\mu U U^{-1}\partial_\rho U + \partial_\mu U U^{-1}\partial_\rho U U^{-1}\partial_\mu\partial_\rho U +\right.\\
& 2\partial_\mu U U^{-1}\partial_\mu\partial_\rho U U^{-1}\partial_\rho U\\
& +\partial_\mu^2 U U^{-1}\partial_\rho U U^{-1}\partial_\rho U + \partial_\mu U U^{-1}\partial_\mu U^{-1}\partial_\rho^2 U\\
& -\partial_\mu U U^{-1}\partial_\rho U U^{-1}\partial_\rho U U^{-1}\partial_\mu U - 2\partial_\mu U U^{-1}\partial_\rho U U^{-1}\partial_\mu U U^{-1}\partial_\rho U\\
& \left.\left.-3\partial_\mu U U^{-1}\partial_\mu U U^{-1}\partial_\rho U U^{-1}\partial_\rho U\right]\right\} U^{-1}.
\end{aligned} \tag{177}$$

Ahora apliquemos las ecuaciones de movimiento $O(p^2)$ para remover el laplaciano sobre los campos quirales $\partial_\mu^2 U$. Entonces uno obtiene el conjunto de coeficientes para las varias estructuras de campo quiral dadas en la Tabla 3. Para

Comparación entre los coeficientes de las diferentes estructuras de campo quiral en las ecuaciones de movimiento derivadas de un lagrangiano local y de la condición de anulamiento de la función beta, digamos el anulamiento de las divergencias polo simple en el nivel dos loops

Estructura CQ	χ-lagr.	d_g	d_V
$\mu--\rho--\mu\rho$	$-2(2K_1+K_2)$	$\frac{1}{16}(1-z^2)(1+z)(g_{1,r}+zg_{2,r})$	0
$\mu\rho--\mu--\rho$	$-2(2K_1+K_2)$	$\frac{1}{16}(1-z^2)(1-z)(g_{1,r}-zg_{2,r})$	0
$\mu--\mu\rho--\rho$	$-4K_2$	$\frac{1}{8}(1-z^2)(-g_{1,r}+z^2g_{2,r})$	0
$\mu--\rho--\rho--\mu$	$2[(1-z^2)K_1+K_2]$	0	$-c_V$
$\mu--\mu--\rho--\rho$	$-2z^2K_2$	0	0
$\mu--\rho--\mu--\rho$	$4[K_1+K_2]$	$-\frac{1}{4}(1-z^2)z^2g_{3,r}$	c_V

ser determinados estos coeficientes son comparados entonces con los resultados obtenidos de los coeficientes de las divergences polo simple a uno y dos loops (ver (166) y (175)). Para $z^2=-1$ sólo una solución es posible, implicando

$$K_2=0, \quad K_1=-\frac{1}{4}c_V=-\frac{\alpha'}{8}; \qquad g_{1,r}=-g_{2,r}=-g_{3,r}=4c_V. \tag{178}$$

Así, comparando la ec. (176) con la parametrización usual del lagrangian de Gasser-Leutwyler[38],

$$L_1=\frac{1}{2}L_2=-\frac{1}{4}L_3=-\frac{1}{2}K_1f_\pi^2=\frac{f_\pi^2\alpha'}{16}. \tag{179}$$

Para $\alpha'=0.9$ GeV^{-2} y $f_\pi\simeq 93$ MeV produce $L_2\simeq 0.9\cdot 10^{-3}$ el cual es un result[39] completamente satisfactorio.

Hasta ahora no hemos prestado atención a la unitariedad de U en el nivel dos loops. La variación implicada por d_g y d_V respeta la unitariedad perturbativa de U? O esto deja una nueva ligadura eventualmente incompatible con los valores numéricos previos? Esto produce (ver el Apéndice I) que si uno acepta coeficientes arbitrarios reales en el conjunto de vértices cuatridimensionales incluidos en (177) entonces la única solución compatible con la unitariedad está dada por la parametrización con constantes K_1 y K_2. Así el requerimiento para preservar unitariedad bajo la renormalización de campos es enteramente equivalente la condición de integrabilidad local, similar al caso de operadores bidimensionales. Este es un resultado notable que indica la consistencia del procedimiento entero.

References

[1] Para una revisión de teoría de cuerda ver: M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory*(Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987) Vols. 1,2.

[2] A. Abouelsaood, C. G. Callan, C. R. Nappi and S. A. Yost, *Nucl. Phys.* **B280**, 599 (1987).

[3] H. B. Nielsen and P. Olesen, *Nucl. Phys.* **B61**, 45 (1973).

[4] H.-A. Choi and H.-C. Kim, hep-ph/0308171.

[5] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B72**, 461 (1974).

[6] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B160**, 57 (1979).

[7] K. G. Wilson, *Phys. Rev.* **D10**, 2445 (1974).

[8] Se puede ver por ejemplo: P. Frampton, *Dual Resonance Models* (Benjamin, New York, 1974).

[9] M. Lüscher, K. Symanzik and P. Weisz, *Nucl. Phys.* **B173**, 365 (1980);
M. Lüscher, *Nucl. Phys.* **B180**, 317 (1981).

[10] O. Alvarez, *Phys. Rev.* **D24**, (1981) 440.

[11] E. Laermann, en *QCD 20 Years Later*, vol.2, ed. P.M. Zermas and H.A. Kastrup (World Scientific, Aachen, 1992).

[12] Ver por ejemplo: R. K. Ellis, W. J. Stirling and B. R. Webber, *QCD and Collider Physics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge 1996).

[13] J. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998).

[14] E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 505 (1998).

[15] D.J. Gross and H. Ooguri, *Phys. Rev.* **D58**, 106002 (1998).

[16] G. Veneziano, *Nuovo Cim.* **57A**, 190 (1968).

[17] H. Harari, en *Proc. of 14th Int. Conf. on High-Energy Physics, Vienna, 1968* (Geneva, CERN, (1968)) p.195.

[18] Y. Nambu, in *Symmetries and Quark Models*, ed. R. Chand (Gordon and Breach, New York, 1970);
H.B. Nielsen, in *Proc. 15 Int.Conf. on High Energy Physics* (Kiev, 1970);
L. Susskind, *Nuovo Cim.* **69A**, 457 (1970).

[19] J. Paton and H. M. Chan, *Nucl. Phys.* **B10**, 516 (1969).

[20] S. Filipponi, G. Pancheri and Y. Srivastava, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1838 (1998).

[21] P. Ramond, *Phys. Rev.* **D3**, 2415 (1971);
A. Neveu and J. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B31**, 86 (1971).

[22] F. Gliozzi, J. Scherk and D. Olive, *Phys. Lett.* **65B**, 282 (1976); *Nucl. Phys.* **B122**, 253 (1977);
ver también J. Scherk, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 123 (1975).

[23] C. Lovelace, *Phys. Lett.* **28B**, 264 (1968);
J. Shapiro, *Phys. Rev.* **179**, 1345 (1969).

[24] M. Polyakov and V. Vereshagin, *Phys. Rev.* **D54**, 1112 (1996).

[25] A. A. Andrianov and L.Bonora, *Nucl. Phys.* **B233**, 232, 247 (1984);
A.A. Andrianov, *Phys. Lett.* **B157**, 425 (1985).

[26] D. Espriu, E. de Rafael and J. Taron, *Nucl. Phys.* **B345**, 22 (1990); Erratum-*ibid.* **B355**, 278 (1991).

[27] A. M. Polyakov, *Nucl. Phys.* **B268**, 406 (1986);
H. Kleinert, *Phys. Lett.* **174B**, 335 (1986); *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1915 (1987).

[28] T. I. Curtright, G. I. Ghandour, C. B.Thorn and C. K. Zachos, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 799 (1986);
T. Curtright, G. Ghandour and C. K. Zachos, *Phys. Rev.* **D34**, 3811 (1986).

[29] G. P. Pronko and A. V. Razumov, *Theor. Math. Phys.* **56**, 760 (1984).

[30] E. Cremmer and J. Scherk, *Nucl. Phys.* **B72**, 117 (1974);
ver también A. Neveu, *Dual Resonance Models and Strings in QCD* (Les Houches Summer School publ., 1982), p. 757.

[31] J. Alfaro, A. Dobado and D. Espriu, *Phys. Lett.* **B460**, 447 (1999).

[32] C. G. Callan, E. J. Martinec, M. J. Perry and D. Friedan, *Nucl. Phys.* **B262**, 593 (1985).

[33] S. Fubini, A. J. Hanson and R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D7**, 1732 (1973).

[34] A. Strumia and G. Venturi, *Lett. Nuovo Cim.* **13**, 337 (1975).

[35] K. R. Dienes and J.-R. Cudell, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 187 (1994).

[36] Ver por ejemplo, C.Rebbi, *Phys.Rep.* **C12**, 1 (1974).

[37] Ver por ejemplo: A. Dobado *et al*, in *Effective Lagrangians for the Standard Model* (Springer-Verlag, Berlin, 1997).

[38] J. Gasser and H. Leutwyler, *Nucl. Phys.* **B250**, 465. (1985).

[39] G. Amoros, J. Bijnens, P. Talavera, *Nucl. Phys.* **B602**, 87 (2001).

[40] A. M. Polyakov, *Physica Scripta* **T15**, 191 (1987).

[41] J. Polchinski and Zhu Yang, *Phys. Rev.* **D46**, 3667 (1992).

[42] E. Alvarez, C. Gomez and T. Ortin, *Nucl. Phys.* **B545**, 217 (1999);
E. Alvarez and C. Gomez, *Nucl. Phys.* **B550**, 169 (1999), *JHEP* **0005**, 012 (2000).

[43] A. M. Polyakov, *Nucl. Phys.* **B486**, 23 (1997).

[44] F. Quevedo and C. A. Trugenberger, *Nucl. Phys.* **B501**, 143 (1997).

[45] D. Antonov, D. Ebert, and Y. A. Simonov, *Mod. Phys. Lett.* **A 11**, 1905 (1996);
D. Antonov and D. Ebert, *Phys. Rev.* **D58**, 067901 (1998).

[46] M. C. Diamantini, H. Kleinert and C. A. Trugenberger, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 267 (1999); *Phys. Lett.* **B457**, 87 (1999).

[47] A. M. Polyakov, *Nucl. Phys. Proc. Supp.* **68**, 1 (1998); *Int. J. Mod. Phys.* **A14**, 645 (1999).

A

Para construir la acción más general invariante quiral e invariante bajo reparametrización sobre el borde de la cuerda, uno puede usar el siguiente conjunto de operadores bilineales en variables fermiónicas y de dimensión mínima

$$\begin{array}{llll} \bar{\psi}_L U \dot{\psi}_R, & \dot{\bar{\psi}}_L U \psi_R, & \dot{\bar{\psi}}_R U^+ \psi_L, & \bar{\psi}_R U^+ \dot{\psi}_L, \\ \bar{\psi}_L \dot{\psi}_L, & \bar{\psi}_R \dot{\psi}_R, & \bar{\psi}_L \dot{U} U^+ \psi_L, & \bar{\psi}_R U^+ \dot{U} \psi_R. \end{array} \quad (180)$$

Otros vértices como $\bar{\psi}_L \dot{U} \psi_R$ pueden ser descompuestos en una combinación lineal de vértices básicos (180) después de integrar por partes en la acción $S_b = \int d\tau L_f$. La interacción local multi-fermiónica es suprimida en la aproximación principal N grande, ya que asumimos que todos los grados de libertad mesónicos relevantes en este límite son reproducidos por la cuerda hadrónica. Entonces una interacción multi-fermiónica puede efectivamente surgir sólo debido a la reducción de masa pesada de glueballs, mesones híbridos y multiquark suprimidos en el límite N grande.

Como el caso de la acción simétrica CP es de lo más importante para proporcionar la simetría conforme, nos restringimos con el análisis de esta acción solamente. Así el lagrangiano general hermítico invariante CP toma la forma:

$$\begin{aligned} L_f &= b\bar{\psi}_L U \dot{\psi}_R + b^* \dot{\bar{\psi}}_L U \psi_R + b^* \dot{\bar{\psi}}_R U^+ \psi_L + b\bar{\psi}_R U^+ \dot{\psi}_L \\ &\quad + ic\left(\bar{\psi}_L \dot{\psi}_L + \bar{\psi}_R \dot{\psi}_R\right) + id\left(\bar{\psi}_L \dot{U} U^+ \psi_L - \bar{\psi}_R U^+ \dot{U} \psi_R\right), \end{aligned} \quad (181)$$

donde la constante b es compleja mientras que las constantes c, d son reales. Como comparado al lagrangiano mínimo (138) el L_f general contiene tres parámetros

file=fig1.eps,width=5cm

Figure 1: Diagramas a un loop para el propagador.

reales más, $\mathrm{Im}(b), c, d$. Ahora mostremos que por la rotación local de las variables fermiónicas que preservan su estructura quiral,

$$\begin{aligned} \psi_L &= \alpha_1 \psi_L + \alpha_2 U \psi_R, \quad \bar{\psi}_L = \alpha_1^* \bar{\psi}_L + \alpha_2^* \bar{\psi}_R U^+, \\ \psi_R &= \beta_1 \psi_R + \beta_2 U^+ \psi_L, \quad \bar{\psi}_R = \beta_1^* \bar{\psi}_R + \beta_2^* \bar{\psi}_L U, \end{aligned} \tag{182}$$

uno puede eliminar los vértices redundantes y reducir el lagrangiano (138) a la forma mínima. En orden a probar esto transformamos el lagrangiano mínimo (138) con la ayuda de la rotación (182). El conjunto inicial de constantes es $b = (a+i)/2, c = d = 0$. El conjunto final de vértices será invariante CP si las siguientes condiciones se cumplen:

$$\alpha_1 \beta_1^* = \alpha_1^* \beta_1, \tag{183}$$

$$\alpha_2 \beta_2^* = \alpha_2^* \beta_2, \tag{184}$$

$$\alpha_1 \beta_2^* = \alpha_2^* \beta_1. \tag{185}$$

las primeras dos ligaduras relacionan algunas fases,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= |\alpha_1| \exp(i\phi_1), \quad \beta_1 = \pm|\beta_1| \exp(i\phi_1), \\ \alpha_2 &= |\alpha_2| \exp(i\phi_2), \quad \beta_2 = \pm|\beta_2| \exp(i\phi_2), \end{aligned} \tag{186}$$

mientras la tercera elimina uno de los módulos de $|\alpha_j|$ y $|\beta_j|$. Tres módulos quedan y la fase relativa $\phi_1 - \phi_2$ viene a ser suficiente para cuadrar con las tres constantes reales $\mathrm{Im}(b), c, d$,

$$\begin{aligned} |\alpha_1||\beta_2| &= |\alpha_2||\beta_1| = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + \frac{(2d+c)^2}{a^2}} \equiv \frac{1}{2}\zeta, \\ \cos(\phi_1 - \phi_2) &= \frac{c}{\zeta}, \\ \pm|\alpha_1||\beta_1| \pm |\alpha_2||\beta_2| &= \frac{1}{2}\zeta \left(\pm\frac{|\beta_1|}{\beta_2|} \pm \frac{|\beta_2|}{|\beta_1|} \right) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(b). \end{aligned} \tag{187}$$

Evidentemente este sistema de ecuaciones tiene soluciones para $\mathrm{Im}(b), c, d$ arbitrarios y por lo tanto el lagrangiano mínimo puede ser siempre obtenido por una transformación de equivalencia (182) de campos fermiónicos. En el nivel cuántico esta transformación local no produce un jacobiano no trivial cuando aplicamos la regularización dimensional para calcular esto.

B

En este y en los siguientes apéndices se presentan los resultados de nuestro cálculo perturbativo. Cuando sea necesario, ambas partes finita y divergente serán dadas. Los diagramas están etiquetados de acuerdo al número de la figura.

file=fig2.eps,width=5cm

Figure 2: Diagramas a un loop para el vértice con un campo $\tilde{x}$.

Diagrama 1.a:

$$-\frac{1}{2}\theta(A-B)\Delta(0)U^{-1}\partial_\mu^2 UU^{-1}. \tag{188}$$

Diagrama 1.b: Aquí se muestra el desarrollo del cálculo

$$\begin{aligned}
&\int d\tau_1 d\tau_2 U^{-1}\theta(A-\tau_1)\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big[(1-z)\overrightarrow{\partial_{\tau_1}}-\overleftarrow{\partial_{\tau_1}}(1+z)\Big]\partial_\mu U\,\Delta(\tau_1-\tau_2)\\
&U^{-1}\theta(\tau_1-\tau_2)\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big[(1-z)\overrightarrow{\partial_{\tau_2}}-\overleftarrow{\partial_{\tau_2}}(1+z)\Big]U^{-1}\theta(\tau_2-B)\\
= \;&\frac{1}{4}U^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\int d\tau_1 d\tau_2\Big[(1-z^2)\theta(A-\tau_1)\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_2-B)\Delta(\tau_1-\tau_2)\\
&-(1-z)(1+z)\theta(A-\tau_1)\partial_{\tau_2}\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_2-B)\Delta(\tau_1-\tau_2)\\
&-(1+z)(1-z)(-\delta(A-\tau_1))\theta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_2-B)\Delta(\tau_1-\tau_2)\\
&+(1+z)^2(-\delta(A-\tau_1))(-\delta(\tau_1-\tau_2))\theta(\tau_2-B)\Delta(\tau_1-\tau_2)\Big]\\
= \;&\frac{1}{4}U^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\Big[(1-z^2)\theta(A-B)\Delta(0)\\
&+(1-z^2)\int d\tau_1 d\tau_2\theta(A-\tau_1)\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_2-B)\Delta(\tau_1-\tau_2)\\
&+(1-z^2)\theta(A-B)\Delta(A-B)+(1+z)^2\theta(A-B)\Delta(0)\Big]\\
= \;&\frac{1}{4}\theta(A-B)\left[(3+z^2)\Delta(0)+(1-z^2)\Delta(A,B)\right]U^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\mu UU^{-1}.
\end{aligned} \tag{189}$$

C

En este apéndice se muestran los resultados del cálculo a un loop de los vértices con dos líneas fermiónicas y una bosónica. Las divergencias que aparecen no son totalmente eliminadas por una redefinición de U y los contratérminos adicionales con derivadas más altas son llamadas por.

Diagrama 2.a:

$$-\frac{1}{4}\theta(A-B)\Delta(0)U^{-1}\partial_\mu(\partial^2 U)U^{-1}\left[\bar{x}_\mu(A)+\bar{x}_\mu(B)+z\left(\bar{x}_\mu(A)-\bar{x}_\mu(B)\right)\right]. \tag{190}$$

Diagrama 2.b:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\theta(A-B)U^{-1}\big\{\big[\Delta(0)\left(2(1+z)\bar{x}_\mu(A)+(1-z)^2\bar{x}_\mu(B)\right)\\
&+\Delta(A,B)(1-z^2)\bar{x}_\mu(B)\big]\,\partial_\nu UU^{-1}\partial_\mu\partial_\nu U\\
&+\big[\Delta(0)\left((1+z)^2\bar{x}_\mu(A)+2(1-z)\bar{x}_\mu(B)\right)\\
&+\Delta(A,B)(1-z^2)\bar{x}_\mu(A)\big]\,\partial_\mu\partial_\nu UU^{-1}\partial_\nu U\big\}\,U^{-1}.
\end{aligned} \tag{191}$$

Diagrama 2.c:

$$-\frac{1}{8}\theta(A-B)\left\{\Delta(0)\left[(1+z)^2(3-z)\bar{x}_\mu(A)+(1-z)^2(3+z)\bar{x}_\mu(B)\right]\right.$$
$$+\Delta(A,B)(1-z^2)\left[\bar{x}_\mu(A)(1+z)+\bar{x}_\mu(B)(1-z)\right]$$
$$\left.+(1-z^2)\int_B^A d\tau\dot{\bar{x}}_\mu(\tau)\left[\Delta(\tau,B)(1-z)-\Delta(A,\tau)(1+z)\right]\right\}$$
$$\times U^{-1}\partial_\nu UU^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\nu UU^{-1}. \tag{192}$$

D

Este apéndice tiene que ver con el determinante fermiónico y el anulamiento de la anomalía de escala discutido en el cuerpo principal de la tesis.

Hay dos operadores mutuamente conjugados en la forma bilineal del lagrangiano (138):

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \frac{i}{2}\left[(1-z)U(\tau)i\partial_\tau+(1+z)i\partial_\tau\Big(U(\tau)\right],\\ \mathcal{D}^\dagger &= \frac{i}{2}\left[(1+z^*)U^+(\tau)i\partial_\tau+(1-z^*)i\partial_\tau\Big(U^+(\tau)\right].\end{aligned} \tag{193}$$

Por lo tanto el determinante fermiónico total (el resultado de la integración sobre fermiones) o contribución de loop fermiónico puede ser representado por

$$Z_f=\left\|\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger\right\|=\left\|(i\partial_\tau-\frac{i}{2}(1-z)\dot{U}U^+)(i\partial_\tau-\frac{i}{2}(1-z^*)\dot{U}U^+)\right\|, \tag{194}$$

donde nos hemos restringido con los campos unitarios U. Ahora uno puede factorizar fuera la constante infinita para operadores libres y encontrar la parte no trivial en términos de propagadores fermiónicos:

$$\begin{aligned}Z_f &= \left\|(i\partial_\tau)^2\right\|\exp\left\{\mathrm{Tr}\left(\log\left(1-\frac{i}{2i\partial_\tau}(1-z)\dot{U}U^+\right)\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.+\log\left(1-\frac{i}{2i\partial_\tau}(1-z^*)\dot{U}U^+\right)\right)\right\}\\ &= C\exp\left\{-\theta(0)\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau(1-z+1-z^*)\mathrm{tr}(\dot{U}U^+)\right\}\\ &= C\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\mathrm{tr}(\dot{U}U^+)\right\}.\end{aligned} \tag{195}$$

En esto ha sido explotada propiedad triángulo del propagador fermiónico libre,

$$\langle\tau|\frac{i}{i\partial_\tau+i\epsilon}|\tau'\rangle=\theta(\tau-\tau'), \tag{196}$$

el cual se sigue de la función de Green anticipada que se prescribe agregando $+i\epsilon$. Como un resultado, sólo el primer orden en la expansión de los logaritmos en (195) sobrevive cuando la operación de traza funcional es realizada. El valor $\theta(0) = 1/2$ y la elección invariante CP $z = -z^*$ son empleadas. Más rigurosamente este resultado puede ser obtenido tomando el intervalo de tiempo-propio finito con condiciones de borde antiperiódicas para campos fermiónicos. Entonces el determinante estará dado por el producto de autovalores discretos de los operadores (193). Cuando procedemos a la línea límite infinita y para la prescripción adelantada con $+i\epsilon$ uno recupera exactamente la funcional presentada en la última línea de (195).

Evidentemente, para grupos $SU(N)$ y para grupos $U(1)$ con condiciones de borde periódicas el exponente en (195) se anula y por lo tanto la contribución del loop fermiónico del lagrangiano mínimo está ausente. Esto automaticamente elimina la anomalía de escala $\sim \langle L_f \rangle_{vac}$ y con eso la simetría conforme permanece intacta por los efectos de la polarización del vacío.

Para el lagrangiano extendido que incluye los vértices de más altas dimensiones (163) la derivación del determinante fermiónico es similar. Los correspondientes operadores diferenciales lucen del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{D}} &= \Big(i\partial_\tau - \frac{i}{2}(1-z)\dot{U}U^+ + \frac{i}{8}(1-z^2)\Big[(g_1 - zg_2)\partial_\nu \dot{U}U^+ \partial_\nu U U^+ (g_1 + zg_2) \\
&\quad - \partial_\nu U U^+ \partial_\nu \dot{U} U^+ + 2zg_3 \partial_\nu U U^+ \dot{U} U^+ \partial_\nu U U^+ \Big]\Big) U, \\
\tilde{\mathcal{D}}^\dagger &= U^+ \Big(i\partial_\tau - \frac{i}{2}(1-z^*)\dot{U}U^+ - \frac{i}{8}(1-(z^*)^2)\Big[(g_1 - z^* g_2) U\partial_\nu U^+ U \partial_\nu \dot{U}^+ \\
&\quad - (g_1 + z^* g_2) U \partial_\nu \dot{U}^+ U \partial_\nu U^+ + 2z^* g_3 U \partial_\nu U^+ U \dot{U}^+ U \partial_\nu U^+ \Big]\Big). \qquad (197)
\end{aligned}$$

De nuevo sólo el primer orden en la expansión de la traza logarítmica no es nula:

$$\begin{aligned}
\log Z_f &= C' + \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \mathrm{tr}\Big((1-z^2)\Big[zg_2 \partial_\nu \dot{U} \partial_\nu U^+ + zg_3 \partial_\nu U U^+ \dot{U} U^+ \partial_\nu U U^+\Big] \\
&\quad + (1-(z^*)^2)\Big[-z^* g_2 \partial_\nu \dot{U} \partial_\nu U^+ + z^* g_3 \partial_\nu U U^+ \dot{U} U^+ \partial_\nu U U^+\Big]\Big). \qquad (198)
\end{aligned}$$

Los vértices proporcionales g_1 no aparecen después de aplicar la traza. Tomemos las constantes simétricas CP $z = -z^*$. Los vértices con la constante de acoplamiento g_3 son proporcionales a $z + z^*$ y por lo tanto se anulan. En cuanto a los términos g_2 ellos forman una derivada temporal total en el caso invariante CP,

$$\log Z_f = C' + \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau (1-z^2) z g_2\ \partial_\tau \mathrm{tr}(\partial_\nu U \partial_\nu U^+) = 0, \qquad (199)$$

éste toma lugar para condiciones de borde periódicas.

Así, a pesar del hecho que los vértices de más altas dimensiones traen una dependencia de escala dentro del lagrangiano (las constantes g_j son dimensionales), ellas no generan una anomalía de escala debido a loops fermiónicos si y sólo si la simetría CP es impuesta en el lagrangiano.

file=fig3.eps,width=5cm

Figure 3: Contratérminos a un loop para propagador fermiónico que vienen de los vértices adicionales.

file=fig4.eps,width=5cm

Figure 4: Diagramas a un loop para el vértice con dos campos x.

E

Aquí se consigna la contribución de los contratérminos adicionales (161) al propagador fermiónico.

Diagramas 3:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\left(\Delta(0)-\Delta(A,B)\right)\big[(1+z)U^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\phi_\mu U^{-1} \\ &-(1-z)U^{-1}\phi_\mu U^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\big]\,, \end{aligned} \tag{200}$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_\mu &= \Delta(0)\frac{1-z^2}{2}\Big(\frac{1-z}{2}\partial_\mu\partial_\nu UU^{-1}\partial_\nu U-\frac{1+z}{2}\partial_\nu UU^{-1}\partial_\mu\partial_\nu U \\ &+z\partial_\nu UU^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\nu U\Big)\,. \end{aligned} \tag{201}$$

Cuando solamente retenemos los términos $\sim \Delta^2(0)$ uno reproduce exáctamente $2d_{II}$.

F

Aquí consignamos los diagramas que son relevantes para el cálculo de los vértices a un loop que involucran dos líneas fermiónicas y dos bosónicas.

Diagrama 4.a:

$$-\frac{1}{8}\theta(A-B)\Delta(0)\left[\bar{x}_\mu(A)\bar{x}_\nu(A)(1+z)+\bar{x}_\mu(B)\bar{x}_\nu(B)(1-z)\right]U^{-1}\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho^2UU^{-1}. \tag{202}$$

Diagrama 4.b:

Sus partes divergente y finita son

$$\begin{aligned} &\frac{1}{8}\theta(A-B)\left\{\Delta(0)\left[\bar{x}_\mu(A)\bar{x}_\nu(A)2(1+z)+\bar{x}_\mu(B)\bar{x}_\nu(B)(1-z)^2\right]\right. \\ &\left.+\Delta(A,B)\bar{x}_\mu(B)\bar{x}_\nu(B)(1-z^2)\right\}U^{-1}\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho UU^{-1}. \end{aligned} \tag{203}$$

Diagrama 4.c:

Sus partes divergente y finita son

$$\frac{1}{8}\theta(A-B)\left\{\Delta(0)\left[\bar{x}_\mu(A)\bar{x}_\nu(A)(1+z)^2+\bar{x}_\mu(B)\bar{x}_\nu(B)2(1-z)\right]\right.$$
$$\left.+\Delta(A,B)\bar{x}_\mu(A)\bar{x}_\nu(A)(1-z^2)\right\}U^{-1}\partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho UU^{-1}\partial_\rho UU^{-1}. \qquad (204)$$

Diagrama 4.d:
Sus partes divergente y finita son

$$-\frac{1}{16}\theta(A-B)\left\{\Delta(0)\left[\bar{x}_\mu(A)\bar{x}_\nu(A)(1+z)^2(3-z)+\bar{x}_\mu(B)\bar{x}_\nu(B)(1-z)^2(3+z)\right]\right.$$
$$+\Delta(A,B)(1-z^2)\left[\bar{x}_\mu(A)\bar{x}_\nu(A)(1+z)+\bar{x}_\mu(B)\bar{x}_\nu(B)(1-z)\right]$$
$$\left.+(1-z^2)\int_B^A d\tau(\bar{x}_\mu\dot{\bar{x}}_\nu(\tau)+\dot{\bar{x}}_\mu\bar{x}_\nu(\tau))\left[\Delta(\tau,B)(1-z)-\Delta(A,\tau)(1+z)\right]\right\}$$
$$\times U^{-1}\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu\partial_\nu UU^{-1}\partial_\rho UU^{-1}. \qquad (205)$$

Diagrama 4.e:
Sus partes divergente y finita son

$$-\frac{1}{8}\theta(A-B)\left\{\Delta(0)\left[\bar{x}_\mu(A)\bar{x}_\nu(A)(1+z)^2(3-z)+\bar{x}_\mu(B)\bar{x}_\nu(B)(1-z)^2(3+z)\right.\right.$$
$$\left.+(1-z)^2(1+z)\int_B^A d\tau\bar{x}_\mu(\tau)\dot{\bar{x}}_\nu(\tau)\right]$$
$$+\Delta(A,B)(1-z^2)\left[\bar{x}_\mu(A)\bar{x}_\nu(B)(1+z)+\bar{x}_\mu(B)\bar{x}_\nu(B)(1-z)\right]$$
$$\left.+(1-z^2)\int_B^A d\tau\left[\dot{\bar{x}}_\mu(\tau)\bar{x}_\nu(B)\Delta(\tau,B)(1-z)-\dot{\bar{x}}_\mu(\tau)\bar{x}_\nu(\tau)\Delta(A,\tau)(1+z)\right]\right\}$$
$$\times U^{-1}\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\nu\partial_\rho UU^{-1}. \qquad (206)$$

Diagrama 4.f:
Sus partes divergente y finita son

$$-\frac{1}{8}\theta(A-B)\left\{\Delta(0)\left[\bar{x}_\mu(A)\bar{x}_\nu(A)(1+z)^2(3-z)+\bar{x}_\mu(B)\bar{x}_\nu(B)(1-z)^2(3+z)\right.\right.$$
$$\left.-(1-z)(1+z)^2\int_B^A d\tau\dot{\bar{x}}_\mu(\tau)\bar{x}_\nu(\tau)\right]$$
$$+\Delta(A,B)(1-z^2)\left[\bar{x}_\mu(A)\bar{x}_\nu(A)(1+z)+\bar{x}_\mu(A)\bar{x}_\nu(B)(1-z)\right]$$
$$\left.+(1-z^2)\int_B^A d\tau\left[\bar{x}_\mu(\tau)\dot{\bar{x}}_\nu(\tau)\Delta(\tau,B)(1-z)-\bar{x}_\mu(A)\dot{\bar{x}}_\nu(\tau)\Delta(A,\tau)(1+z)\right]\right\}$$
$$\times U^{-1}\partial_\rho\partial_\mu UU^{-1}\partial_\nu UU^{-1}\partial_\rho UU^{-1}. \qquad (207)$$

Diagrama 4.g:

file=fig5.eps,width=5cm

Figure 5: Diagramas a dos loops para el propagador.

Sus partes divergente y finita son

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{8}\theta(A-B)\left\{\Delta(0)\left[\bar{x}_\mu(A)\bar{x}_\nu(A)(1+z)(3+z)\right)+\bar{x}_\mu(B)\bar{x}_\nu(B)(1-z)(3-z)\right.\\
&\left.+(1-z^2)\int_B^A d\tau\left(\bar{x}_\mu(\tau)\dot{\bar{x}}_\nu(\tau)-\dot{\bar{x}}_\mu(\tau)\bar{x}_\nu(\tau)\right)\right]\\
&+2\Delta(A,B)(1-z^2)\bar{x}_\mu(A)\bar{x}_\nu(B)\big\}\\
&\times U^{-1}\partial_\rho\partial_\mu UU^{-1}\partial_\rho\partial_\nu UU^{-1}.
\end{aligned}
\tag{208}
$$

Diagrama 4.h:
Sus partes divergente y finita son

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{16}\theta(A-B)\Big\{\Delta(0)\left[\bar{x}_\mu(A)\bar{x}_\nu(A)2(1+z)^2(3-z)+\bar{x}_\mu(B)\bar{x}_\nu(B)2(1-z)^2(3+z)\right]\\
&+\Delta(A,B)(1-z^2)\left[\bar{x}_\mu(A)\bar{x}_\nu(A)2(1+z)+\bar{x}_\mu(B)\bar{x}_\nu(B)(1-z)^2\right.\\
&\left.+\bar{x}_\mu(A)\bar{x}_\nu(B)(1-z^2)-(1-z^2)\int_B^A d\tau\dot{\bar{x}}_\mu(\tau)\bar{x}_\nu(\tau)\right]\\
&+(1-z^2)\int_B^A d\tau\left[\Delta(\tau,B)\left(\bar{x}_\mu(\tau)\dot{\bar{x}}_\nu(\tau)2(1-z)\right.\right.\\
&\left.+\dot{\bar{x}}_\mu(\tau)\bar{x}_\nu(\tau)(1-z^2)+\dot{\bar{x}}_\mu(\tau)\bar{x}_\nu(B)(1-z)^2\right)\\
&\left.-\Delta(A,\tau)\left(\bar{x}_\mu(\tau)\dot{\bar{x}}_\nu(\tau)(1-z^2)+\dot{\bar{x}}_\mu(\tau)\bar{x}_\nu(\tau)2(1+z)+\bar{x}_\mu(A)\dot{\bar{x}}_\nu(\tau)(1+z)^2\right)\right]\\
&\left.-(1-z^2)^2\int_B^A d\tau_1\int_B^{\tau_1} d\tau_2\dot{\bar{x}}_\mu(\tau_1)\dot{\bar{x}}_\nu(\tau_2)\Delta(\tau_1,\tau_2)\right\}\\
&\times U^{-1}\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\nu UU^{-1}\partial_\rho UU^{-1}.
\end{aligned}
\tag{209}
$$

Todas las divergencias son removidas combinando la renormalización de U y los contratérminos adicionales determinados del vértice a un loop con una línea bosónica externa. Nuevos contratérminos no son requeridos.

G

Diagramas a dos loops para el propagador fermiónico. Sólo las partes divergentes son necesarias.

Diagrama 5.a:
Su contribución es totalmente divergente,

$$
-\frac{1}{8}\theta(A-B)\Delta^2(0)U^{-1}\partial_\mu^2\partial_\rho^2 UU^{-1}. \tag{210}
$$

Diagrama 5.b:
Sus partes divergentes son

$$\frac{1}{8}\theta(A-B)\left\{\Delta^2(0)(3+z^2)+\Delta(A,B)\Delta(0)(1-z^2)\right\}U^{-1}\partial_\mu^2\partial_\rho UU^{-1}\partial_\rho UU^{-1}. \tag{211}$$

Diagrama 5.c:
Sus partes divergentes son

$$\frac{1}{8}\theta(A-B)\left\{\Delta^2(0)(3+z^2)+\Delta(A,B)\Delta(0)(1-z^2)\right\}U^{-1}\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu^2\partial_\rho UU^{-1}. \tag{212}$$

Diagrama 5.d:
Sus partes divergentes son

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{8}\theta(A-B)\left\{\Delta^2(0)(3+z^2)+\Delta(A,B)\Delta(0)(1-z^2)\right\}\\&\times U^{-1}\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu^2 UU^{-1}\partial_\rho UU^{-1}.\end{aligned} \tag{213}$$

Diagrama 5.e:
Sus partes divergente y finita son

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{16}\theta(A-B)\left\{\Delta^2(0)(11+z+5z^2-z^3)+\Delta(A,B)\Delta(0)2(1-z^2)(1-z)\right.\\&\left.+\Delta^2(A,B)(1-z^2)(3+z)\right\}U^{-1}\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\mu\partial_\rho UU^{-1}.\end{aligned} \tag{214}$$

Diagrama 5.f:
Sus partes divergente y finita son

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{16}\theta(A-B)\left\{\Delta^2(0)(11-z+5z^2+z^3)+\Delta(A,B)\Delta(0)2(1-z^2)(1+z)\right.\\&\left.+\Delta^2(A,B)(1-z^2)(3-z)\right\}U^{-1}\partial_\mu\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\rho UU^{-1}.\end{aligned} \tag{215}$$

Diagrama 5.g:
Sus partes divergente y finita son

$$\frac{1}{8}\theta(A-B)\left\{\Delta^2(0)(3+z^2)+\Delta^2(A,B)(1-z^2)\right\}U^{-1}\partial_\rho\partial_\mu UU^{-1}\partial_\rho\partial_\mu UU^{-1}. \tag{216}$$

Diagrama 5.h:
Sus partes divergente y finita son

$$\begin{aligned}&\frac{1}{32}\theta(A-B)\left\{\Delta^2(0)(3+z^2)(7+z^2)+2(1-z^2)(3+z^2)\Delta(A,B)\Delta(0)\right.\\&+(1-z^2)(5-z^2)\Delta^2(A,B)\\&\left.+2(1-z^2)^2\int_B^A d\tau_1\int_B^{\tau_1}d\tau_2\partial_{\tau_1}\Delta(\tau_1,\tau_2)\partial_{\tau_2}\Delta(\tau_1,\tau_2)\right\}\\&\times U^{-1}\partial_\rho UU^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\mu UU^{-1}\partial_\rho UU^{-1}.\end{aligned} \tag{217}$$

Diagrama 5.i
Sus partes divergente y finita son

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\theta(A-B)\left[\Delta^2(0)(1+z^2)+\Delta(0)\Delta(A,B)(1-z^2)\right] \\
&\times U^{-1}\partial_\mu U U^{-1}\partial_\mu\partial_\rho U U^{-1}\partial_\rho U U^{-1}.
\end{aligned} \tag{218}
$$

Diagrama 5.j:
Sus partes divergente y finita son

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{16}\theta(A-B)\left\{\Delta^2(0)(1+z^2)(9-z^2)+2(1-z^2)(3-z^2)\Delta(A,B)\Delta(0)\right. \\
&+(1-z^4)\Delta^2(A,B)-(1-z^2)^2\int_B^A d\tau\left(\Delta(A,\tau)-\Delta(A,B)\right)\dot{\Delta}(\tau,B) \\
&\left.-(1-z^2)^2\int_B^A d\tau_1\int_B^{\tau_1} d\tau_2\partial_{\tau_1}\Delta(\tau_1,\tau_2)\partial_{\tau_2}\Delta(\tau_1,\tau_2)\right\} \\
&\times U^{-1}\partial_\rho U U^{-1}\partial_\mu U U^{-1}\partial_\rho U U^{-1}\partial_\mu U U^{-1}.
\end{aligned} \tag{219}
$$

La primera integral es reunida dentro de una expresión no singular. La segunda integral es preparada para tener una singularidad más débil que $\Delta^2(0)$ y esto revela una singularidad del tipo $\Delta(0)$.

H

Primero entendamos las singularidades en $J(A,B)$ con la ayuda del propagador del campo escalar euclídeo en 2 dimensiones (148) en la regularización cutoff,

$$
\Delta(\tau,\sigma)=-\alpha'\ln\left[(\tau^2+\sigma^2+R^2)\mu^2\right], \qquad R\to 0. \tag{220}
$$

La regularización mancha la singularidad log, la normalización es tomada para proporcionar $-\partial^2\Delta(\tau,\sigma)=4\pi\alpha'\delta(\tau)\delta(\sigma)$ for $R\to 0$. Así sobre el borde,

$$
\Delta(\tau,\sigma=0)=-\alpha'\ln\left[(\tau^2+R^2)\mu^2\right], \qquad \partial_\sigma\Delta(\tau,\sigma=0)=0, \tag{221}
$$

lo último está en concordancia con las condiciones de borde de Neumann para cuerdas abiertas. Evidentemente, la relación entre divergencias en RD y la presente regularización es:

$$
\Delta(0)\simeq-\alpha'\ln\left[R^2\mu^2\right]\leftrightarrow-\frac{2\alpha'}{\epsilon}. \tag{222}
$$

Naturalmente este propagador no es necesariamente exacto en su parte finita. Pero las divergencias extraidas con su ayuda deberían ser universales.

Con este ansatz es fácil encontrar que

$$
J(A-B)=\alpha'^2\left\{-\frac{\pi(A-B)}{R}-2\ln\left(R^2\mu^2\right)\right\}+\text{términos regulares}. \tag{223}
$$

La primera divergencia es tipo potencia y la desechamos (esta no aparecería en cálculos de RD). El segundo término es logarítmicamente divergente $\simeq 2\alpha'\Delta(0)$ y retenemos únicamente este.

Ahora realizaremos el mismo cálculo en la Regularización Dimensional. Primero definimos la integral (174) en $2+\epsilon$ dimensiones. Evidentemente podemos hacer esto consistentemente para la segunda expresión en (174). Digamos que, reemplazamos $\tau \to |\vec{\tau}| \equiv t$ con $\vec{\tau}$ siendo un vector $1+\epsilon$ dimensional e integra sobre la esfera $|\vec{\tau}| \leq (A-B)$,

$$J_\epsilon(A-B) = -\frac{1}{2}\int_{|\vec{\tau}|\leq(A-B)} d^{1+\epsilon}\tau\mu^\epsilon\,(A-B-|\vec{\tau}|)\left[\dot{\Delta}(|\vec{\tau}|)\right]^2. \tag{224}$$

Después insertamos en (224) la derivada del propagador de la cuerda (148) en $2+\epsilon$ dimensiones,

$$\Delta'(t) = -\alpha'\epsilon\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{\mu\sqrt{\pi}}{\varphi}\right)^{-\epsilon} t^{-1-\epsilon}, \tag{225}$$

lo cual conduce a

$$\begin{aligned} J_\epsilon(A-B) = \quad & -\frac{1}{2}(\alpha')^2\left(\epsilon\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\right)^2\Omega_{1+\epsilon}\left(\frac{\mu\sqrt{\pi}}{\varphi}\right)^{-2\epsilon} \\ & \times\int_0^{A-B} dt(t\mu)^\epsilon(A-B-t)t^{-2-\epsilon}, \end{aligned} \tag{226}$$

donde el volúmen angular,

$$\Omega_{1+\epsilon} = \frac{2\pi^{\frac{1+\epsilon}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+\epsilon}{2}\right)}. \tag{227}$$

Después de integrar uno encuentra la siguiente expresión

$$\begin{aligned} J_\epsilon(A-B) \quad &= \quad -(\alpha'\varphi^{-\epsilon})^2\left(\epsilon\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\right)^2\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1+\epsilon}{2}\right)}\frac{((A-B)\mu\sqrt{\pi})^{-\epsilon}}{\epsilon(1+\epsilon)} \\ &\overset{\epsilon\to 0}{=} \quad -\frac{4(\alpha'\varphi^{-\epsilon})^2}{\epsilon} = 2\alpha'\varphi^{-\epsilon}\Delta(0). \end{aligned} \tag{228}$$

De este modo hemos reproducido el mismo valor de la constante c_V.

I

Tomemos el conjunto de operadores más general que pueden aparecer en las ecuaciones de movimiento (E.o.M.) con constantes arbitrarias. Las ecuaciones de movimiento de dimensión dos (153) son asumidas para sostener o apoyar y por lo tanto no incluye ningún vértice que contenga el D'Alambertiano ∂_μ^2. Nos gustaría dar cuenta de un conjunto de constantes las cuales sostengan la relación de unitariedad (154), $U\delta U^\dagger = -\delta U U^\dagger$. Los resultados son presentados en la Tabla 4.

Comparación entre los coeficientes de las diferentes estructuras de campo quiral en las ecuaciones de movimiento, sus hermíticos conjugados y aquellos derivados de un lagrangiano local (177)

Estructura CQ	E.o.M.	(E.o.M.)†	χ-lagr.
$\mu--\rho--\mu\rho$	a_1	$-a_2$	$-2(2K_1+K_2)$
$\mu\rho--\mu--\rho$	a_2	$-a_1$	$-2(2K_1+K_2)$
$\mu--\mu\rho--\rho$	a_3	$-a_3$	$-4K_2$
$\mu--\rho--\rho--\mu$	a_4	$a_1+a_2+a_4$	$2[(1-z^2)K_1+K_2]$
$\mu--\mu--\rho--\rho$	a_5	a_3+a_5	$-2z^2K_2$
$\mu--\rho--\mu--\rho$	a_6	$a_1+a_2+a_3+a_6$	$4[K_1+K_2]$

Uno puede ver que la unitariedad de $\delta U^{(4)}$ es proporcionada para $z^2=-1$ sólo si

$$a_1=a_2=-(4K_1+2K_2),\quad a_3=-4K_2,\quad a_4=-\frac{1}{2}(a_1+a_2),$$
$$a_5=-\frac{1}{2}a_3,\quad a_6=-\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3). \tag{229}$$

Así la unitariedad es alcanzada cuando los operadores en la ecuación de movimiento son derivados del lagrangiano local (176) y *vice versa*.

J

En este apéndice exploraremos un acercamiento un poco diferente y veremos como los resultados son totalmente equivalentes a aquellos presentados en el texto. Integraremos fuera los 'quarks' y derivaremos una acción efectiva en términos de fuentes externas.

Para derivar la acción efectiva suplementaremos el lagrangiano (138) con fuentes externas para campos fermiónicos

$$\tilde{L}_f=L_f+\bar{J}_L\psi_R+\bar{J}_R\psi_L+\bar{\psi}_LJ_R+\bar{\psi}_RJ_L. \tag{230}$$

Como este lagrangiano es cuadrático en los campos la acción efectiva,

$$e^{iS_{eff}(x)}=\int d\bar{\psi}d\psi e^{i\int\tilde{L}_f dt} \tag{231}$$

es sostenida por las soluciones de las ecuaciones clásicas,

$$\dot{\psi}_R+\frac{1}{2}(1+z)U^{-1}\dot{U}\psi_R \quad = \quad iU^{-1}J_R, \tag{232}$$
$$\dot{\bar{\psi}}_R+\frac{1}{2}(1+z^*)\bar{\psi}_R\dot{U}^\dagger{U^\dagger}^{-1} \quad = \quad -i\bar{J}_R{U^\dagger}^{-1}, \tag{233}$$
$$\dot{\psi}_L+\frac{1}{2}(1-z^*){U^\dagger}^{-1}\dot{U}^\dagger\psi_L \quad = \quad i{U^\dagger}^{-1}J_L, \tag{234}$$
$$\dot{\bar{\psi}}_L+\frac{1}{2}(1-z)\bar{\psi}_L\dot{U}U^{-1} \quad = \quad -i\bar{J}_LU^{-1}. \tag{235}$$

Las soluciones se leen

$$\begin{aligned}\psi_R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 \left[\mathbf{T}\exp\left(-\int_{\tau_1}^{\tau} d\tau_2 \frac{1}{2}(1+z)U^{-1}(\tau_2)\dot{U}(\tau_2)\right)\right] \\ &\times iU^{-1}(\tau_1)J_R(\tau_1), \qquad (236)\\ \psi_L(\tau) &= \int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 \left[\mathbf{T}\exp\left(-\int_{\tau_1}^{\tau} d\tau_2 \frac{1}{2}(1-z^*){U^\dagger}^{-1}(\tau_2)\dot{U^\dagger}(\tau_2)\right)\right] \\ &\times i{U^\dagger}^{-1}(\tau_1)J_L(\tau_1), \qquad (237)\end{aligned}$$

y su compañera compleja conjugada.

Por lo tanto la acción efectiva toma la forma simple:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \bar{J}_L(\tau)\int_{-\infty}^{\tau} d\tau_1 \left[\mathbf{T}\exp\left(-\int_{\tau_1}^{\tau} d\tau_2 \frac{1}{2}(1+z)U^{-1}(\tau_2)\dot{U}(\tau_2)\right)\right] \\ \times iU^{-1}(\tau_1)J_R(\tau_1) \qquad (238)$$

A su vez el propagador fermiónico total toma la forma

$$\begin{aligned}\langle\psi_R(\tau_1)\bar{\psi}_L(\tau_2)\rangle &= U^{-1}[x_\mu(\tau_1)]\mathbf{T}\exp\left[\frac{1}{2}(1-z)\int_{\tau_2}^{\tau_1} d\tau \dot{U}U^{-1}[x_\mu(\tau)]\right]\theta(\tau_1-\tau_2), \\ &= \mathbf{T}\exp\left[-\frac{1}{2}(1+z)\int_{\tau_2}^{\tau_1} d\tau U^{-1}\dot{U}[x_\mu(\tau)]\right] \\ &\times U^{-1}[x_\mu(\tau_2)]\theta(\tau_1-\tau_2). \qquad (239)\end{aligned}$$

Remarquemos que las dos piezas con T-exponenciales en la última igualdad son idénticas.

Expandimos la primera expresión para el propagador en (239)

$$\langle\psi_R(\tau_1)\bar{\psi}_L(\tau_2)\rangle = \theta(\tau_1-\tau_2)U^{-1}[x_\mu(\tau_1)]\left[1+\frac{1}{2}(1-z)\int_{\tau_2}^{\tau_1} d\tau \dot{U}U^{-1}[x_\mu(\tau)]\right. \\ \left.+\frac{1}{4}(1-z)^2\int_{\tau_2}^{\tau_1} d\tau\int_{\tau_2}^{\tau} d\tau' \dot{U}U^{-1}[x_\mu(\tau)]\dot{U}U^{-1}[x_\mu(\tau')]+\cdots\right], \qquad (240)$$

El segundo orden en la expansión es suficiente para analizar divergencias a un loop del propagador. A su vez podemos desarrollar la expansión perturbativa alrededor de un background, $x(\tau) = x_0 + \tilde{x}(\tau)$,

$$U^{-1}[x_\mu(\tau_1)] = U^{-1}(x_0)\Big\{1-\tilde{x}_\mu(\tau_1)(\partial_\mu U)U^{-1}(x_0) \\ +\frac{1}{2}\tilde{x}_\mu(\tau_1)\tilde{x}_\nu(\tau_1)[-(\partial_\mu\partial_\nu U)U^{-1}(x_0)+2(\partial_\mu U)U^{-1}(\partial_\nu U)U^{-1}(x_0)\Big\} \qquad (241)$$

Evidentemente el término con dos derivadas sobre U sale sólo de esta parte de la expansión. Además uno debería también evaluar:

$$\begin{aligned}\dot{U}U^{-1}[x_\mu(\tau)] &= \dot{\tilde{x}}_\mu\partial_\mu UU^{-1}(x_0)+\dot{\tilde{x}}_\mu\tilde{x}_\nu\left[\partial_\mu\partial_\nu UU^{-1}(x_0)\right. \\ &\left.-\partial_\mu UU^{-1}\partial_\nu UU^{-1}(x_0)\right]+\cdots \qquad (242)\end{aligned}$$

Ahora insertamos las dos expansiones de encima dentro de la ec. (240) y retenemos sólo términos cuadráticos en $\tilde{x}_\mu$,

$$
\begin{aligned}
&U^{-1}(x_0)\frac{1}{2}[-\partial_\mu\partial_\nu U U^{-1}(x_0) + 2\partial_\mu U U^{-1}\partial_\nu U U^{-1}(x_0)]\tilde{x}_\mu(\tau_1)\tilde{x}_\nu(\tau_1) \\
&-\frac{1}{2}(1-z)U^{-1}\partial_\mu U U^{-1}\partial_\nu U U^{-1}(x_0)\int_{\tau_2}^{\tau_1} d\tau \tilde{x}_\mu(\tau_1)\dot{\tilde{x}}_\nu(\tau) \\
&+\frac{1}{2}(1-z)U^{-1}[\partial_\mu\partial_\nu U U^{-1}(x_0) - \partial_\mu U U^{-1}\partial_\nu U U^{-1}(x_0)]\int_{\tau_2}^{\tau_1} d\tau \dot{\tilde{x}}_\mu(\tau)\tilde{x}_\nu(\tau) \\
&+\frac{1}{4}(1-z)^2 U^{-1}\partial_\mu U U^{-1}\partial_\nu U U^{-1}(x_0)\int_{\tau_2}^{\tau_1} d\tau \int_{\tau_2}^{\tau} d\tau' \dot{\tilde{x}}_\mu(\tau)\dot{\tilde{x}}_\nu(\tau') \qquad (243)
\end{aligned}
$$

Después de integrar sobre τ, τ' y promediando en $\tilde{x}_\mu(\tau)$ con la ayuda de fórmulas para el propagador de la cuerda, teniendo en mente que $\dot{\Delta}(0) = 0$ (es decir la contribución de la tercera línea es igual a cero) uno obtiene la parte a 1-loop en la forma en que se escribió en el texto principal,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\theta(\tau_1-\tau_2)U^{-1}\Bigg[\Delta(0)\Bigg\{-\partial_\mu^2 U \\
&+\frac{3+z^2}{2}\partial_\mu U U^{-1}\partial_\mu U\Bigg\} + \frac{(1-z^2)}{2}\Delta(\tau_1-\tau_2)\partial_\mu U U^{-1}\partial_\mu U\Bigg]U^{-1}. \qquad (244)
\end{aligned}
$$

K

En este apéndice se muestra como agregar campos $U(1)$ al lagrangiano (138). Para llevar a cabo esto, reescribamos (138):

$$\mathcal{L}_{\{} = \frac{1}{2}i\left\{(1-z)\bar{\psi}_L U(x)\dot{\psi}_R - (1+z)\dot{\bar{\psi}}_L U(x)\psi_R\right\} + h.c. \qquad (245)$$

y acoplemos campos $U(1)$ haciendo:

$$U(x) \to \widetilde{U}(x) = e^{i\varphi(x)Q}U(x)e^{-i\varphi(x)Q} \qquad (246)$$

donde

$$\varphi = \varphi_\parallel + \varphi_\perp = \int_{\tau_o}^{\tau} d\tau' \dot{x}_\mu(\tau')A_\mu(x(\tau')) \qquad (247)$$

$$\varphi_\parallel = \widetilde{x}_\mu(\tau)A_\mu(x_o) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\widetilde{x}_\mu(\tau)\widetilde{x}_{\nu_1}(\tau)\cdots\widetilde{x}_{\nu_n}(\tau)\partial_{\nu_1}\cdots\partial_{\nu_n}A_\mu(x_o) \quad (248)$$

$$\varphi_\perp = \int_{\tau_o}^{\tau} d\tau' \partial_\tau \widetilde{x}_\mu(\tau')\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}\widetilde{x}_{\nu_1}(\tau')\cdots\widetilde{x}_{\nu_n}(\tau')\partial_{\nu_1}\cdots\partial_{\nu_{n-1}}F_{\nu_n\mu}(x_o) \qquad (249)$$

Entonces podemos expandir $\widetilde{U}(x)$ alrededor de un background constante x_o y para estudiar los diagramas Una Partícula Irreducibles (OPI):

$$\widetilde{U}(x) = (1-i\varphi-\frac{1}{2}\varphi^2+\frac{i}{3!}\varphi^3+\cdots)(U_o+\widetilde{x}_\mu\partial_\mu U_o+\frac{1}{2}\widetilde{x}_\mu\widetilde{x}_\nu\partial_\mu\partial_\nu U_o\cdots)(1+i\varphi-\frac{1}{2}\varphi^2-\frac{i}{3!}\varphi^3+\cdots)$$

$$
\begin{aligned}
&= \widetilde{x}_\mu D_\mu U_o + \frac{1}{2}\widetilde{x}_\mu\widetilde{x}_\nu D_\mu D_\nu U_o + \frac{i}{2}\int_{\tau_o}^{\tau} d\tau'\partial_\tau\widetilde{x}_\mu(\tau')\widetilde{x}_\nu(\tau')[F_{\mu\nu}, U_o] + \frac{1}{3!}\widetilde{x}_\mu\widetilde{x}_\nu\widetilde{x}_\lambda D_\mu D_\nu D_\lambda U_o \\
&+\frac{i}{2}\widetilde{x}_\mu(\tau)\int_{\tau_o}^{\tau} d\tau'\partial_\tau\widetilde{x}_\nu(\tau')\widetilde{x}_\lambda(\tau')[D_\mu U_o, F_{\lambda\nu}(x_o)] + \frac{i}{3}\int_{\tau_o}^{\tau} d\tau'\partial_\tau\widetilde{x}_\mu(\tau')x_\nu(\tau')\widetilde{x}_\lambda(\tau')[U_o, D_\nu F_{\lambda\mu}(x_o)] \\
&+\frac{1}{4!}\widetilde{x}_\mu\widetilde{x}_\nu\widetilde{x}_\lambda\widetilde{x}_\rho D_\mu D_\nu D_\lambda D_\rho U_o - \frac{i}{8}\int_{\tau_o}^{\tau} d\tau'\partial_\tau\widetilde{x}_\mu(\tau')x_\nu(\tau')\widetilde{x}_\lambda(\tau')x_\rho(\tau')[\partial_\nu\partial_\lambda F_{\rho\mu}, U_o] \\
&-\frac{i}{3}\int_{\tau_o}^{\tau} d\tau'\partial_\tau\widetilde{x}_\mu(\tau')\widetilde{x}_\nu(\tau')\widetilde{x}_\lambda(\tau')x_\rho(\tau)[\partial_\nu F_{\lambda\mu}, D_\rho U_o] \\
&+\frac{i}{4}\int_{\tau_o}^{\tau} d\tau'\partial_\tau\widetilde{x}_\mu(\tau')\widetilde{x}_\nu(\tau')\widetilde{x}_\lambda(\tau)x_\rho(\tau)[F_{\nu\mu}, D_\lambda D_\rho U_o] \\
&+\frac{1}{8}\int_{\tau_o}^{\tau} d\tau'\partial_{\tau'}\widetilde{x}_\mu(\tau')\widetilde{x}_\nu(\tau')\int_{\tau_o}^{\tau} d\tau''\partial_{\tau''}\widetilde{x}_\lambda(\tau'')\widetilde{x}_\rho(\tau'')\{[F_{\nu\mu}, U_o]F_{\rho\lambda} + F_{\nu\mu}[U_o, F_{\rho\lambda}]\} \qquad (250)
\end{aligned}
$$

Y como antes podemos obtener las Reglas de Feynman

De la expansión anterior obtenemos el propagador fermiónico libre:

$$
\langle\bar{\psi}_R(\tau)\psi_L(\tau')\rangle = U^{-1}\theta\,(\tau - \tau') \qquad (251)
$$

El propagador bosónico libre es:

$$
\langle x_\mu(\tau)x_\nu(\tau')\rangle = \delta_{\mu\nu}\Delta(\tau - \tau'), \qquad (252)
$$

notemos que

$$
\Delta(\tau \to \tau') = \Delta(0) = \frac{\alpha'}{\epsilon} \ \ (\epsilon \to 0)
$$

Los dos primeros vértices los podemos expresar como:

El operador vértice 2-fermiones y 1-bosón

$$
-\frac{1}{2}[(1-z)\overrightarrow{\partial_\tau} - (1+z)\overleftarrow{\partial_\tau}]D_\mu U_0 \qquad (253)
$$

donde las flechas sobre la derivada parcial indican hacia donde actúa.

Y el operador vértice 2-fermiones y 2-bosones

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big\{(1-z)\overrightarrow{\partial_\tau} - (1+z)\overleftarrow{\partial_\tau}\Big\}\Big\{\frac{1}{2} < \widetilde{x}_\mu(\tau)\widetilde{x}_\nu(\tau) > D_\mu D_\nu U_0 \\
&+\frac{i}{2}\int_{\tau_o}^{\tau} d\tau'\partial_\tau < \widetilde{x}_\mu(\tau)\widetilde{x}_\nu(\tau) > [F_{\mu\nu}, U_o]\Big\} \qquad (254)
\end{aligned}
$$

Como antes, con los propagadores y operadores vértice previos, podemos computar las correcciones al propagador fermiónico a 1-loop

$$
\frac{1}{4}U_o^{-1}D_\mu U_o U_o^{-1}D_\mu U_o U_o^{-1}\{(3+z^2)\Delta(0)+(1-z^2)\Delta(\tau_A-\tau_B)\}\Theta(\tau_A-\tau_B) \qquad (255)
$$

$$-\frac{1}{2}\Delta(0)\Theta(\tau_A-\tau_B)U_o^{-1}D_\mu D_\mu U_o U_o^{-1} \tag{256}$$

Entonces se obtiene para la parte divergente del propagador:

$$\frac{1}{2}\Theta(\tau_A-\tau_B)\Delta(0)U_o^{-1}\left\{-D_\mu^2 U_o+\left(\frac{3+z^2}{2}\right)D_\mu U_o U_o^{-1}D_\mu U_o\right\}U_o^{-1} \tag{257}$$

Podemos eliminar esta divergencia introduciendo un contratérmino apropiado

$$\delta U=\Delta(0)\left\{D_\mu^2 U_o-\left(\frac{3+z^2}{2}\right)D_\mu U_o U_o^{-1}D_\mu U_o\right\}=0 \tag{258}$$

Recuperamos la simetría conforme si anulamos la contribución de arriba.