Apéndice 1: **La integral de** $J_0(x)$

Introducción

En este Apéndice encontramos la Transformada de Laplace de $J_0(x)$ y a partir de ella demostramos que $\int_0^\infty J_0(x)\,dx = 1$.

En la Clase XX, a partir de la función generatriz de las funciones de Bessel, encontramos la representación integral de $J_0(x)$ la que está dada por

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta. \tag{1}$$

Usando la fórmula de Euler, i.e., que $\exp(iz) = \cos z + i\mathrm{sen}\,z$, podemos reescribir (1) como

$$J_0(x) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \left(e^{ix\mathrm{sen}\,\theta} + e^{-ix\mathrm{sen}\,\theta}\right)\,d\theta. \tag{2}$$

Ahora multiplicamos (2) por $\exp(-ax)$ con $a \geq 0$ e integramos en x entre 0 e infinito. Intercambiando los ordenes de integración, obtenemos de inmediato que

$$\int_0^\infty J_0(x)\exp(-ax)\,dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{a - ix\mathrm{sen}\theta} + \frac{1}{a + ix\mathrm{sen}\theta}\right)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\frac{a}{a^2 + \mathrm{sen}^2\theta}\,d\theta. \tag{3}$$

Usando la formula del ángulo medio, i.e., que $\mathrm{sen}^2\theta = (1 - \cos 2\theta)/2$, tenemos que

$$\int_0^\infty J_0(x)\exp(-ax)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2a}{2a^2 + 1 - \cos 2\theta}\,d\theta. \tag{4}$$

y, haciendo el cambio de variables $\theta \to \phi = 2\theta$, y recordando que $\cos\phi$ es periódica de período 2π, obtenemos,

$$\int_0^\infty J_0(x)\exp(-ax)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a}{2a^2 + 1 - \cos\phi}\,d\phi = \frac{1}{\pi}\frac{2\pi a}{\sqrt{(2a^2+1)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}. \tag{5}$$

Aquí hemos usado la integral,

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{a + b\cos\phi} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \tag{6}$$

que es válida cuando $a^2 > b^2$, y que se puede hacer facilmente usando el Teorema de los Residuos en Variable Compleja.

Haciendo $a = 0$ en (5) vemos de inmediato que

$$\int_0^\infty J_0(x)\,dx = 1.$$

Tomando derivadas con respecto a a en (5) y luego evaluando en 0 podemos calcular otras integrales, e.g.,

$$\int_0^\infty x\,J_0(x)\,dx = 0,$$

etc.