

## CLASE #2 de Bessel: Modos normales de una membrana circular (Continuación):

### Introducción

---

En la clase anterior resolvimos usando el Método de Separación de Variables, la ecuación de ondas para una membrana circular de radio  $R$  con borde fijo (i.e., satisfaciendo que para todo instante de tiempo el valor de  $u$  en el borde es cero, lo que usualmente se conoce como condición de borde de Dirichlet). De hecho escribimos en la clase pasada que

$$u(\vec{r}, t) = h(t)\phi(\vec{r}),$$

en que  $h$  satisface la ecuación

$$h'' + c^2\lambda h = 0$$

cuyas soluciones son periódicas en el tiempo con frecuencia angular  $\omega = c\sqrt{\lambda}$ , y la función  $\phi(\vec{r})$ , la cual se conoce en general como *modo normal* satisface la ecuación,

$$-\Delta\phi = \lambda\phi,$$

en el interior del círculo de radio  $R$ , en tanto que  $u = 0$  en el borde. Dada la geometría de nuestro dominio, usábamos coordenadas polares  $r$  y  $\theta$ , para resolver este problema, en que  $0 \leq r \leq R$  y  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . En polares, la ecuación para los modos normales (que en general se conoce como *ecuación de Helmholtz* se escribe como,

$$-\phi_{rr} - \frac{1}{r}\phi_r - \frac{1}{r^2}\phi_{\theta\theta} = \lambda\phi.$$

Para resolver esta última ecuación usamos nuevamente separación de variables, e intentamos una solución del tipo  $\phi(r, \theta) = F(r)G(\theta)$ , y veíamos que  $G$  satisfacía la ecuación

$$G'' + \gamma^2 G = 0$$

en tanto que  $F$  satisfacía la ecuación

$$r^2 F'' + rF' + (\lambda r^2 - \gamma^2)F = 0.$$

Las soluciones de la ecuación para  $G$  son de la forma  $G(\theta) = \text{sen}(\gamma\theta)$ , o  $\text{cos}(\gamma\theta)$ , y con el objeto que estas soluciones sean univaluadas, i.e., que  $G(\theta + 2\pi) = G(\theta)$ , tenemos que exigir que  $\gamma$  sea un entero. Así, ponemos  $\gamma = n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), y la correspondiente ecuación para  $F$  toma entonces la forma,

$$r^2 F'' + rF' + (\lambda r^2 - n^2)F = 0.$$

Haciendo el reemplazo  $r \rightarrow x = \sqrt{\lambda}r$ , y llamando  $y$  a la solución, esta última ecuación se puede escribir como

$$(1) \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,$$

En términos de la solución  $y(x)$  tenemos que  $F(r) = y(\sqrt{\lambda}r)$ . En la clase anterior analizamos con cuidado las soluciones de la ecuación (1) que se conoce en general como Ecuación de Bessel. Vimos que se podía resolver (por el método de Frobenius) en serie de potencias en torno al punto  $x = 0$ , (que es un *punto singular regular* de dicha ecuación). Así encontramos que una solución de (1) es de la forma,

$$(2) \quad y(x) \equiv J_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

Esta solución (i.e., la función  $J_n(x)$ ) se conoce como función de Bessel de orden  $n$ . De acuerdo al Teorema de Frobenius, la serie que determina a  $J_n(z)$  converge para todo  $z$  en el plano complejo (i.e., el radio de convergencia de la serie es infinito). La segunda solución de (1) se puede obtener usando el método del

Wronskiano, como vimos en la clase anterior. En todo caso, vimos que la segunda solución diverge como  $\log(x)$  cerca de  $x = 0$  cuando  $n = 0$ , en tanto que diverge como  $x^{-n}$  cerca de cero para  $n > 0$ . Como queremos tener soluciones regulares en el interior de nuestro dominio (i.e., en el círculo de radio  $R$  en cuestión), tenemos que descartar esta segunda solución (en este caso). Nótese que este no sería el caso si estuviéramos resolviendo la ecuación de Helmholtz en un anillo, de radio interior  $a$  y radio exterior  $b$  (que discutiremos más adelante) porque en ese caso el punto 0 no está en el dominio.

Asintóticamente (i.e., para valores grandes de su argumento), la función  $J_n$  se comporta como  $\cos(x + \alpha)/\sqrt{x}$ , en que  $\alpha$  es una fase. De modo que  $J_n$  decae como  $1/\sqrt{x}$  veces una función sinusoidal. De este modo vemos que asintóticamente tiene infinitos ceros. De hecho, para los ceros de valor grande, debido a este comportamiento sinusoidal, es fácil encontrar una expresión aproximada para ellos.

Para ver este comportamiento asintótico, conviene hacer el cambio de variable independiente  $y \rightarrow u$  dado por  $y(x) = u(x)\sqrt{x}$ . Es un ejercicio directo ver que si  $y$  satisface la ecuación de Bessel (1) entonces,  $u$  satisface la ecuación,

$$(3) \quad u'' + u + u\left(\frac{1}{4} - n^2\right)\frac{1}{x^2} = 0.$$

De acá vemos que para valores grandes de  $x$ , la ecuación (aproximada) para  $u$  es de la forma,

$$u'' + u \approx 0$$

cuyas soluciones son de la forma  $\cos(x + \alpha)$  en que  $\alpha$  es una fase. Usando técnicas de variable compleja que no veremos acá, uno puede demostrar que asintóticamente (i.e., para valores grandes de  $x$ ), se tiene que

$$(4) \quad J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

más términos de orden  $1/x^{3/2}$ . Vemos de (4) que aproximadamente se tiene un cero de la función de Bessel (ceros de grandes argumentos) cuando  $x - (n\pi/2) - \pi/4 \approx (2k+1)\pi/2$ , para  $n$  dado y  $k$  un entero grande.

**Ceros de  $J_n(x)$ :** Como hemos dicho la función  $J_n(x)$  (ver gráfico en la Wikipedia) tiene infinitos (numerables) ceros, los que se denotan típicamente como  $j_{n,k}$ . La notación es la siguiente:  $j_{n,k}$  es el  $k$ -ésimo cero positivo de la función de Bessel de orden  $n$ . Para valores pequeños de  $n$  (orden de la función de Bessel) y  $k$  (ordenamiento del cero respectivo) no hay una regla simple para saber como los  $j_{n,k}$  están ordenados. Los primeros siete ceros están dados (numericamente, con cuatro cifras significativas) por (aquí los he ordenado de menor a mayor):

$$j_{0,1} = 2,4048\dots,$$

$$j_{1,1} = 3,8317\dots,$$

$$j_{2,1} = 5,1356\dots,$$

$$j_{0,2} = 5,5200\dots,$$

$$j_{3,1} = 6,3802\dots,$$

$$j_{1,2} = 7,0156\dots,$$

y

$$j_{4,1} = 7,5883\dots$$

Nótese que, como vimos en la clase anterior, los modos normales de la membrana circular, están dados por

$$(5) \quad \phi(r, \theta) = F(r)G(\theta) = J_n(\sqrt{\lambda r}) \text{sen}(n\theta),$$

ó

$$(6) \quad \phi(r, \theta) = J_n(\sqrt{\lambda}r) \cos(n\theta).$$

Aquí, el autovalor (de la ecuación de Helmholtz) está determinado por la condición  $F(R) = 0$ , i.e., exigiendo que

$$\sqrt{\lambda}R = j_{n,k}.$$

Así, tenemos una secuencia numerable de autovalores, los que están dados por

$$(7) \quad \lambda_{n,k} = \frac{j_{n,k}^2}{R^2},$$

en que  $n = 0, 1, 2, \dots$  y  $k = 1, 2, \dots$ . Las correspondientes autofunciones están dadas por

$$(8) \quad J_n(j_{n,k} \frac{r}{R}) \cos(n\theta),$$

ó

$$(9) \quad J_n(j_{n,k} \frac{r}{R}) \sen(n\theta).$$

Nótese que para  $n = 0$ , el valor propio  $\lambda_{0,k} = j_{0,k}^2/R^2$  tiene asociada una sola función propia (i.e.,  $J_0(j_{0,k}r/R)$ ) que es radial (i.e., no depende de la variable angular  $\theta$ ). Por otra parte, para  $n \geq 1$ , cada valor propio es degenerado (con degeneración dos). Es decir hay dos funciones propias (dadas por (8) y (9) para cada valor propio.

**Líneas Nodales:** Llamamos líneas nodales (o curvas nodales) de un determinado modo normal a las curvas en el interior del dominio, i.e., en este caso el círculo de radio  $R$ , donde se anula dicho modo normal. Así, por ejemplo la estructura nodal del modo normal

$$J_3(j_{3,1} \frac{r}{R}) \sen(3\theta),$$

consiste en los rayos  $\theta = 0, \theta = \pi/3, \theta = 2\pi/3$ , como se ilustra en la figura. En las regiones marcadas

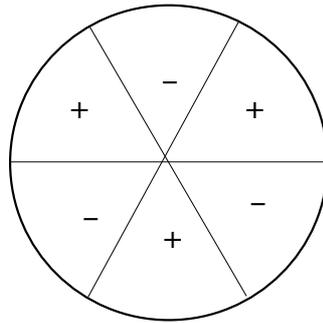


FIGURE 1. Estructura Nodal de una de las funciones propias asociadas a  $\lambda_{3,1}$

con un signo “+”, la función es positiva, en tanto que en las regiones marcadas con un signo “-” la función propia es negativa, en tanto que la función se anula en los rayos marcados en la figura. Nótese, sin embargo que como la función propia eventualmente está multiplicada por la función  $h(t)$  que oscila periódicamente, la solución de la ecuación de ondas, i.e.,  $u(\vec{r}, t)$  va a cambiar de signos en los distintos dominios nodales.

Por otra parte, y también a modo de ejemplo, la estructura nodal del modo normal

$$J_0(j_{0,2} \frac{r}{R}),$$

consiste en el círculo de radio  $r = (j_{0,1}/j_{0,2})R$

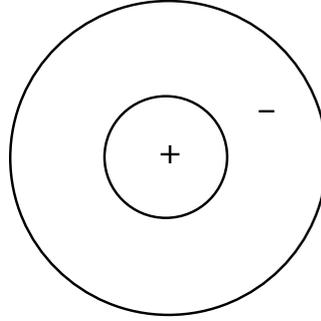


FIGURE 2. Estructura Nodal de la función propia asociada a  $\lambda_{0,2}$

De acuerdo a la dependencia de la parte temporal, i.e., de  $h(t)$ , la frecuencias propias de vibración de la membrana circular están dadas por,

$$(10) \quad \nu_{n,k} = \frac{\omega_{n,k}}{2\pi} = \frac{c\sqrt{\lambda_{n,k}}}{2\pi} = \frac{j_{n,k} c}{2\pi R}$$

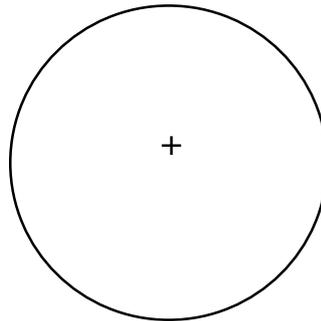
La frecuencia fundamental (i.e., la frecuencia más baja) corresponde a

$$(11) \quad \nu_{0,1} = \frac{j_{0,1} c}{2\pi R} = \frac{2,4048 c}{2\pi R}$$

Nótese que en general para un tambor circular, no se tiene que las frecuencias exitadas son un múltiplo entero de la frecuencia fundamental (como veíamos en el caso de las cuerdas vibrantes). En otras palabras, para el tambor no tenemos “armonía”, dada la estructura de los ceros de las funciones de Bessel. A continuación listamos las primeras 6 frecuencias propias más bajas y la correspondiente estructura nodal de sus funciones propias:

$$\nu_{0,1} = \frac{2,4048 c}{2\pi R},$$

(no degenerada)



$$\nu_{1,1} = \frac{3,8317 c}{2\pi R},$$

(con degeneración dos) y las siguientes dos posibilidades de estructura nodal: y

$$\nu_{2,1} = \frac{5,1356 c}{2\pi R},$$

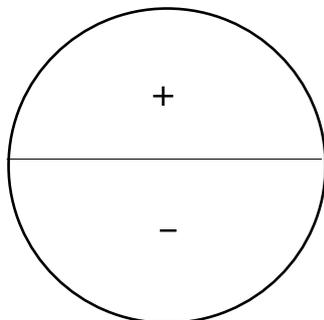


FIGURE 3. Una de las estructuras nodales asociadas a  $\nu_{1,1}$

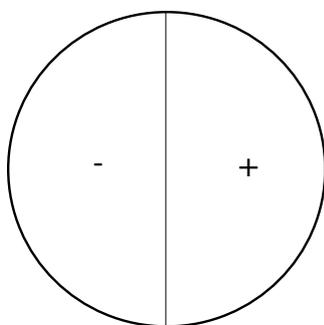


FIGURE 4. La otra estructura nodal asociada a  $\nu_{1,1}$

(con degeneración dos), una de cuyas posibles configuraciones nodales es:

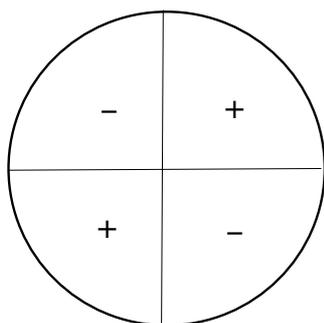


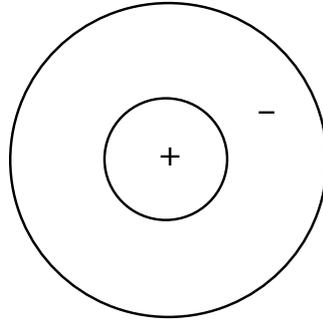
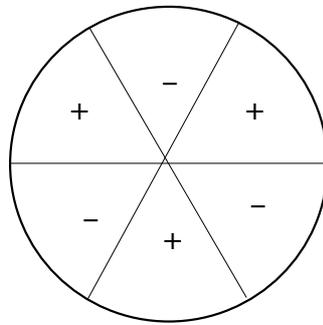
FIGURE 5. Una de las estructuras nodales asociadas a  $\nu_{2,1}$

$$\nu_{0,2} = \frac{5,5200 c}{2\pi R},$$

no degenerada, y cuya estructura nodal es

$$\nu_{3,1} = \frac{6,3802 c}{2\pi R},$$

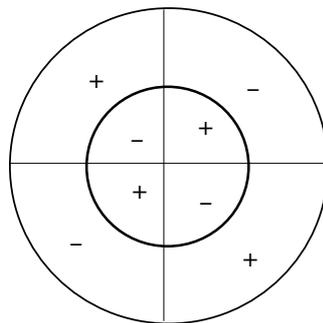
con degeneración doble, y una de cuyas estructuras nodales es

FIGURE 6. Estructura nodal asociada a  $\nu_{0,2}$ FIGURE 7. Estructura nodal asociada a  $\nu_{3,1}$ 

y

$$\nu_{1,2} = \frac{7,0156c}{2\pi R},$$

con degeneración doble, y una de cuyas estructuras nodales es

FIGURE 8. Estructura nodal asociada a  $\nu_{1,2}$