CLASE #1: **REPASO DE ALGEBRA LINEAL.**

Lunes 5 de Marzo de 2012

Introducción En esta primera clase haremos un repaso de las nociones elementales de Algebra Lineal. Veremos *espacios vectoriales*, *producto interno* y *espacio euclideos.*

————-+————-

Definición: Un conjunto V dotado de una operación *suma*, $+$, y de una operación *producto por escalar*, $\cdot$, en que

$$+ : V \times V \to V \qquad\qquad \cdot : \mathbb{C} \times V \to V$$

se llama *espacio vectorial* sobre los complejos (ó *espacio lineal* sobre los complejos) si se satisfacen las siguientes propiedades:

I: $\{V, +\}$ es un *grupo abeliano*, es decir,

I.a) *Asociatividad:* $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$, para todo $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$.

I.b) *Existencia del elemento identidad:* Existe $\vec{0} \in V$ de modo que $\vec{x}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{x} = \vec{x}$, para todo $\vec{x} \in V$.

I.c) *Elemento inverso:* Para todo $\vec{x} \in V$, existe $(-\vec{x}) \in V$ tal que $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.

I.d) *Conmutatividad:* $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$.

II) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$, para todo $\vec{x} \in V$, en que $1 \in \mathbb{C}$ es el elemento unidad en los complejos.

III) *Asociatividad:* $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{x}$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, y todo $\vec{x} \in V$.

IV.a) *Distributividad:* $(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, y para todo $\vec{x} \in V$.

IV.b) *Distributividad:* $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, $\vec{x}, \vec{y} \in V$.

De la misma manera se puede definir un espacio vectorial sobre los reales.

Ejemplos: La recta real, $\mathbb{R}$, el plano, $\mathbb{R}^2$, el espacio usual, $\mathbb{R}^3$, son ejemplos de espacios vectoriales reales. En general $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial real. Del mismo modo $\mathbb{C}^n$ es un espacio vectorial complejo. El conjunto de polinomios reales de grado n es un espacio vectorial real.

Independencia lineal: Decimos que dos vectores, $\vec{x}$ e $\vec{y}$ en V son *linealmente independientes* si

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = 0, \tag{1}$$

implica que $\alpha = \beta = 0$.

En general, decimos que un conjunto de vectores $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^n$ son *linealmente independientes* si

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = 0, \tag{2}$$

implica que $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots n$.

Dimensión de un espacio vectorial: Se define la dimensión de un espacio vectorial V, $\dim(V)$, como el número máximo de vectores linealmente independientes en V. La dimensión de un espacio vectorial es una cantidad intrínseca de V. Por el momento solo consideraremos espacio vectoriales de dimensión finita.

Base de un espacio vectorial: Dado un espacio vectorial, V, de dimensión finita, $\dim(V) = n$, una *base* para V es cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en V.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$, $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ son linealemnte independientes y forman base. La dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3. En el espacio vectorial, V, de polinomios reales de grado n, en x, los polinomios 1, x, x^2, $\ldots$, x^n, son linealmente independientes. Este espacio vectorial V tiene dimension n.

PRODUCTO INTERNO, Y ESPACIOS EUCLIDEOS:

Dado un espacio vectorial, V, sobre los complejos, definiremos *producto interno* sobre V a la aplicación:

$$(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{C} \tag{3}$$

que satisface las siguientes propiedades:

i) $(\ ,\ )$ es lineal en el segundo argumento, i.e.,

$$(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y}) + \beta(\vec{x}, \vec{z}),$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, y todo $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$.

ii) $\overline{(\vec{x}, \vec{y})} = (\vec{y}, \vec{x})$, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$.

iii) $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$, para todo $\vec{x} \in V$, y

iv) $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ si y solo si $\vec{x} = 0$.

Se llama *Espacio Euclideo* a todo espacio lineal de dimensión finita provisto de producto interno.

Ejemplo: $V = \mathbb{C}^3$, con el producto interno, $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n \overline{x}_i y_i$ es un espacio euclideo (verifique que el producto inteno así definido satisface las propiedades requeridas).

La Desigualdad de Schwarz: Si V es un espacio euclideo sobre los complejos, con producto interno $(\ ,\ )$ entonces se tiene

$$|(\vec{x},\vec{y})|^2 \leq (\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y}), \tag{4}$$

para todo $\vec{x},\vec{y} \in V$.

Demostración:

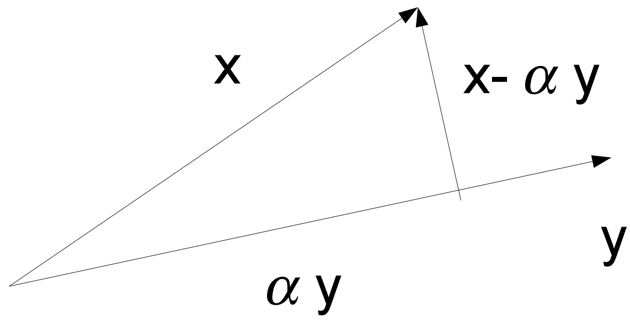

FIGURE 1. Desigualdad de Schwarz

Consideremos el vector $\vec{x} - \alpha\vec{y}$ de la figura y consideremos el largo de ese vector como función de α. Intuitivamente (ver figura), el largo de dicho vector es mínimo cuando $\vec{x} - \alpha\vec{y}$ es perpendicular a $\vec{y}$. Usaremos precisamente esta intuición para demostrar la desigualdad de Schwarz. Calculemos pues,

$$0 \leq (\vec{x}-\alpha\vec{y}, \vec{x}-\alpha\vec{y}) = (\vec{x},\vec{x}) - \overline{\alpha}(\vec{y},\vec{x}) - \alpha(\vec{x},\vec{y}) + |\alpha|^2(\vec{y},\vec{y}). \tag{5}$$

La desigualdad de Schwarz sigue de (5) eligiendo

$$\alpha = \frac{\overline{(\vec{x},\vec{y})}}{(\vec{y},\vec{y})}.$$

Reemplazando este valor de α en (5), usando la propiedad ii) del producto interno, obtenemos

$$0 \leq (\vec{x},\vec{x}) - \frac{|(\vec{x},\vec{y})|^2}{(\vec{y},\vec{y})}.$$

Ejemplo: Como aplicación de la desigualdad de Schwarz podemos demostrar que para cualquier colección de numeros complejos $\{z_i\}_{i=1}^n$, tenemos

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}. \tag{6}$$

En efecto, basta tomar el producto interno usual en los complejos (i.e., en $\mathbb{C}^n$): $(x,y) = \sum_{i=1}^n (\overline{x})_i y_i$, en que $x_i = 1$ para todo i, y $y_i = z_i$. Entonces, (6) sigue de inmediato de la desigualdad de Schwarz.

Norma de un Vector: Dado un espacio euclideo V uno puede definir el largo ó *norma* de un vector, $\vec{x} \in V$, como:

$$||\vec{x}|| \equiv \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}. \tag{7}$$

La *norma* de un vector satisface las siguientes propiedades,

i) $||\vec{x}|| \geq 0$ para todo $\vec{x} \in V$, y $||\vec{x}|| = 0$ si y solo si $\vec{x} = 0$.

ii) $||\alpha\vec{x}|| = |\alpha|||\vec{x}||$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, y todo $\vec{x} \in V$.

iii) *Desigualdad Triangular:*

$$||\vec{x} + \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||. \tag{8}$$

Las propiedades de la norma siguen de las propiedades del producto interno. En particular, la desigualdad triangular es una consecuencia de la desigualdad de Schwarz.

Ortogonalidad, Bases Ortonormales, Procedimiento de Gramm–Schmidt:

Decimos que dos vectores son ortogonales entre sí el prodcto interno entre ellos es cero. En otras palabras, $\vec{x} \perp \vec{y}$ sí y sólo sí $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$.

Consideremos un espacio euclideo de dimesnión n. Diremos que $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^n$ es una *base ortonormal* de V, si $\hat{e}_i \perp \hat{e}_j$, para todo $i \neq j$, y $||\hat{e}_i|| = 1$, para todo $1 \leq i \leq n$.

A partir de una base cualquiera de V es posible construir una base ortonormal de V, usando el algoritmo de Gramm–Schmidt que describimos a continuación:

Sea $\{\vec{f}_i\}_{i=1}^n$ la base original y construyamos la secuencia de vectores

$$\hat{e}_1 \equiv \frac{\vec{f}_1}{||\vec{f}_1||},$$

$$\vec{e}_2 = \vec{f}_2 - (\vec{f}_2, \hat{e}_1)\hat{e}_1,$$

y $\hat{e}_2 = \vec{e}_2/||\vec{e}_2||$ (i.e., para construir $\vec{e}_2$ simplemente tomamos el segundo vector de la base original y le sacamos su *proyección* a lo largo de $\hat{e}_1$).

$$\vec{e}_3 = \vec{f}_3 - (\vec{f}_3, \hat{e}_1)\hat{e}_1 - (\vec{f}_3, \hat{e}_2)\hat{e}_2,$$

y $\hat{e}_3 = \vec{e}_3/||\vec{e}_3||$ y así sucesivamente, hasta llegar a

$$\vec{e}_n = \vec{f}_n - \sum_{i=1}^{n-1} (\vec{f}_n, \hat{e}_i)\hat{e}_i.$$

Ejemplo: *Los polinomios de Legendre.* Uno puede considerar el conjunto de funciones continuas definidas en el intervalo $[-1, 1]$, $C([-1, 1])$. Es fácil demostrar que $C([-1, 1])$ es un espacio vectorial real. Se puede dotar a $C([-1, 1])$ del producto interno usual, i.e.,

$$(f, g) \equiv \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx.$$

Las funciones 1, x, x^2, $\cdots$ pertenecen a $C([-1, 1])$, pero no son ortogonales entre sí. Sin embargo, uno puede utilizar el procedimiento de Gramm–Schmidt para construir, a partir de la familia de funciones $1, x, x^2, \cdots$, un conjunto de funciones ortogonales (dejamos al lector esta construcción). Las funciones así obtenidas se conocen como *Polinomios de Legendre.* Los primeros polinomios de Legendre están dados por 1, x, $(3x^2 - 1)/2$, etc.

REFERENCIAS:

[1] I. M. Gel'fand, **Lectures on Linear Algebra**, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, **9**, Interscience Publishers, NY, 1961.

[2] H. Hochstadt, **The Functions of Mathematical Physics**, Dover, NY, 1986.

[3] S. Hassani, **Mathematical Physics: A Modern Introduction to its Foundations**, Springer, NY, 2000.