CLASE #11: **La ecuación de ondas en una dimensión; solución por el método de separación de variables (método de Bernoulli).**

Introducción

En esta clase introducimos el método de separación de variables para resolver la ecuación de ondas en una dimensión. La solución que encontraremos es conocida como solución de Bernoulli.

Supongamos una cuerda tensa de largo L, con sus extremos fijos, y consideremos vibraciones de pequeña amplitud en torno a la posición de equilibrio. Llamemos $u(x,t)$ al desplazamiento transversal de la cuerda, en el punto $0 < x < L$, en el instante de tiempo t. La ecuación que determina las pequeñas vibraciones transversales de la cuerda es la ecuación de ondas:

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} = u_{xx} \tag{1}$$

Aquí, el parámetro c (el cual veremos más adelante que corresponde a la velocidad de propagación de las perturbaciones de la cuerda) depende de la densidad lineal de la cuerda σ, y de la tensión τ a la que está sometida la cuerda. Veremos en el apéndice que

$$c = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}$$

La derivación de esta ecuación a partir de la segunda Ley de Newton, para un elemento de cuerda de largo dx es hecha en el apéndice. En realidad (1) es una ecuación de movimiento, en que el lado izquierdo es proporcional a la aceleración transversal de la cuerda. Para determinar el movimiento de la cuerda, necesitamos conocer además el estado inicial (posición inicial y velocidad inicial) de cada elemento de la cuerda, i.e., necesitamos especificar,

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{y} \qquad u_t(x,0) = g(x) \tag{2}$$

en que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones dadas, definidas en el intervalo $[0, L]$. Además de las condiciones iniciales debemos especificar las condiciones de borde. En este primer ejemplo usaremos condiciones de borde fijo, i.e.,

$$u(0,t) = 0 \qquad \text{y} \qquad u(L,t) = 0, \tag{3}$$

para todo $t \geq 0$.

Como un primer paso para encontrar la solución de (1), (2) y (3), estudiaremos una clase especial de soluciones que llamaremos los *modos normales* de vibración de la cuerda. Para ello, veamos si es posible encontrar soluciones a (1) de la forma

$$u(x,t) = \phi(x)h(t), \tag{4}$$

i.e., supongamos que podemos separar la dependencia de $u(x,t)$ en las dos variables independientes. Si reemplazamos esta expresión en (4), obtenemos,

$$\frac{1}{c^2}h''(t)\phi(x) = \phi''(x)h(t), \tag{5}$$

en que hemos usado la notación standard $h'(t) = dh/dt$, y $\phi'(x) = d\phi/dx$, etc. Dividiendo (5) por $h(t)\phi(x)$, obtenemos,

$$\frac{1}{c^2}\frac{h''(t)}{h(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = -\lambda, \tag{6}$$

en que hemos llamado $-\lambda$ a estos cuocientes. Nótese que el lado izquierdo de (6) sólo depende del tiempo (i.e., de t), en tanto que el lado derecho sólo depende de x. Como x y t son variables independientes, ésto sólo es posible si λ es una constante (independiente de x y de t). Usualmente esta constante se conoce como *constante de separación.* El signo menos que hemos introducido en la última igualdad en (6) es solo por conveniencia, como veremos a continuación. De (6) vemos que tanto la función $h(t)$ como la función $\phi(x)$ satisfacen ecuaciones diferenciales ordinarias (en este caso ecuaciones de segundo orden). La ecuación que satisface $\phi(x)$ está dada por

$$-\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = \lambda\phi(x). \tag{7}$$

Es conveniente recordar que queremos satisfacer las condiciones de borde (3). En particular, para las soluciones del tipo (4) esto significa que queremos imponer,

$$h(t)\phi(0) = 0, \qquad \text{y} \qquad h(t)\phi(L) = 0,$$

para todo t. Como en general $h(t) \neq 0$ (pues e lo contrario la solución (4) sería trivial), esto significa que, necesariamente, $\phi(0) = \phi(L) = 0$. Entonces, la función $\phi(x)$ debe satisfacer el problema de condiciones de contorno dado por (7) y las condiciones de borde $\phi(0) = \phi(L) = 0$. La solución general de la ecuación diferencial ordinaria (7) es,

$$\phi(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x). \tag{8}$$

Imponiendo la condición de borde $\phi(0) = 0$, encontramos $A = 0$. Por otra parte, la condición $\phi(L) = 0$ implica $\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0$, de modo que $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$. Entonces la ecuación (7), con las condiciones de borde $\phi(0) = \phi(L) = 0$ admite soluciones no triviales (i.e., no identicamente nulas) sí y solo sí,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \tag{9}$$

para $n = 1, 2, \ldots$. Es conveniente entender este problema de contrno como un problema de valores propios, en que los λ_n aquí encontrados son los valores propios del operador diferencial $\mathcal{L} \equiv -d^2/dx^2$ con condiciones de borde nulas en $x = 0$ y $x = L$. Las respectivas funciones propias están dadas por

$$\phi_n(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi\, n}{L}\right) \tag{10}$$

Si introducimos el producto interno usual para funciones en el intervalo $[0, L]$,

$$(f, g) = \int_0^L f(x)g(x)\,dx \tag{11}$$

entonces el operador $\mathcal{L}$ es formalmente autoadjunto en el conjunto de funciones $C^2[0, L]$ que se anulan en 0 y en L, i.e.,

$$(f, \mathcal{L}g) = (\mathcal{L}f, g),$$

(que se puede comprobar fácilmente integrando dos veces por partes. De hecho $\mathcal{L}$ es positivo definido, en el sentido que $(f, \{) > 0$ para funciones en el espacio mencionado. De estas dos propiedades se sigue que los valores propios λ_n son reales positivos, y que las respectivas funciones propias (i.e., los $\phi_n(x)$) son ortogonales entre sí, i.e.,

$$(\phi_n, \phi_m) = 0, \tag{12}$$

para $n \neq m$. Conviene normalizar estas autofunciones con respecto al producto interno introducido. El lector puede comprobar que las funciones propias debidamente normalizadas (i.e., $(\hat{\phi}_n, \phi_n) = 1$) están dadas por

$$\hat{\phi}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{13}$$

Una vez resuelto el problema para $\phi(x)$ procedemos a resolver la ecuación (6) para $h(t)$. Llamemos $\omega_n = c\sqrt{\lambda_n} = (n\,\pi\, c)/L$ (en que hemos usado (9) para obtener la última igualdad). Entonces podemos escribir (6) como,

$$h'' + \omega_n^2 h = 0, \tag{14}$$

cuya solución general está dada por

$$h_n(t) = E_n \cos\omega_n t + F_n \mathrm{sen}\,\omega_n t. \tag{15}$$

Hemos incluido el rótulo n (tanto en la función h como en las constantes E y F) para hacer hincapié en su dependencia en n a través de la frecuencia angular $\omega_n = (n\,\pi\, c)/L$. Nótese que $h_n(t)$ es una función periódica en el tiempo, de período

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2L}{n\,c}.$$

Como es habitual, llamemos ν_n a la frecuencia de estas soluciones (i.e., al inverso del período). Entonces,

$$\nu_n = n\left(\frac{c}{2L}\right) = n\,\nu_1. \tag{16}$$

Aquí, $\nu_1 = c/(2L)$ es la *frecuencia fundamental*, i.e., la frecuencia más baja, la que está asociada al *modo normal* $\phi_1(x) = \mathrm{sen}(\pi x/L)$. El hecho que la frecuencia asociada al modo normal enésimo es un múltiplo entero de la frecuencia fundamental (i.e., $\nu_n = n\nu_1$) es la base de la armonía. Nótese así mismo que el modo normal $\phi_1(x)$ solo se anula en los extremos (i.e., es positivo en el intervalo abierto $(0, L)$. Para el primer armónico (i.e., $n = 2$), el correspondiente modo normal

$$\phi_2(x) = \mathrm{sen}\,\frac{2\pi x}{L},$$

además de anularse en los bordes (para satisfacer las condiciones de contorno), seanula en $x = L/2$. La correspondiente solución de la ecuación de ondas, i.e.,

$$u_2(x, t) = h_2(t)\phi_2(x),$$

se anula en $x = L/2$ para todo instante de tiempo ($t \geq 0$). Se dice que $\phi_2(x)$ (y por lo tanto $u_2(x, t)$ tiene un *nodo* en $x = L/2$. De la misma manera uno puede comprobar que $\phi_n(x)$ tiene precisamente $(n - 1)$ nodos en el intervalo abierto $(0, L)$.

El problema de valores iniciales:

Habiendo encontrado las soluciones $u_n(x, t) = h_n(t)\phi_n(x)$, ahora podemos resolver el problema de las condiciones iniciales. La ecuación de ondas (i.e., (1) es una ecuación lineal, i.e., si $u_a(x, t)$ y $u_b(x, t)$ la satisfacen, entonces $\alpha u_a(x, t) + \beta u_b(x, t)$ también la satisface, para cualquier valor de las constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ya hemos encontrado un conjunto discreto de soluciones, i.e., los $u_n(x, t)$, para $n = 1, 2,$. Por la linealidad de la ecuación de ondas, la solución más general que podemos construir en base a estas soluciones u_n (i.e., en base a los *modos normales* de vibración) está dada por $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ la cual, usando als ecuaciones (13) y (15) podemos escribir como

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}(E_n \cos\omega_n t + F_n \mathrm{sen}\,\omega_n t)\hat{\phi}_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(E_n \cos\omega_n t + F_n \mathrm{sen}\,\omega_n t)\sqrt{\frac{2}{L}}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{17}$$

Veremos más abajo que los $\hat{\phi}_n(x)$ forma una base para las funciones en $C^2([0, L]$ que se anulan en $x = 0$ y $x = L$. Para finalizar nuestro problema de valores iniciales, tenemos que encontrar los coeficientes E_n y F_n en (17) de modo que la correspondiente función $u(x, t)$ satisfaga las condiciones iniciales, i.e., $u(x, 0) = f(x)$, y $u_t(x, 0) = g(x)$, para todo $x \in [0, L]$. A partir de (17) podemos calcular,

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n\hat{\phi}_n(x), \tag{18}$$

y,

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n F_n \hat{\phi}_n(x). \tag{19}$$

Usando el hecho que los $\hat{\phi}_n$ son ortonormales, tomando el producto interno de (18) con $\hat{\phi}_m$, obtenemos que

$$E_m = \int_0^L u(x,0)\,\hat{\phi}_m(x)\,dx = \int_0^L f(x)\,\hat{\phi}_m(x)\,dx \tag{20}$$

y, haciendo lo propio con la ecuación (19) encontramos,

$$F_m = \frac{1}{\omega_m}\int_0^L u_t(x,0)\,\hat{\phi}_m(x)\,dx = \frac{1}{\omega_m}\int_0^L g(x)\,\hat{\phi}_m(x)\,dx. \tag{21}$$

De este modo, la función $u(x,t)$ dada por (17) en que los coeficientes E_n y F_n están dados por (20) y (21) respectivamente satisface la ecuación de ondas, las condiciones de borde, y las condiciones iniciales. Esta solución se conoce como la solución de Bernoulli. En la próxima clase encontraremos otra forma de resolver la ecuación de ondas en una dimensión, que se conoce como *solución de D'Alambert.*