CLASE #12: **La ecuación de ondas en una dimensión; solución por el método de D'Alembert**

Introducción

En esta clase presentaremos el método de D'Alembert para la solución de la ecuación de ondas en una dimensión. En particular, la solución de D'Alembert para la ecuación de ondas en toda la recta está dada por la ecuación (15) más abajo.

Como vimos en la clase anterior, la ecuación de ondas en una dimensión está dada por

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} = u_{xx}, \tag{1}$$

en que el parámetro c, depende de la densidad de masa de la cuerda y de la tensión a la que está sometida. Aquí veremos que c es precisamente la velocidad de propagación de las ondas en una cuerda infinita (i.e., muy larga).

En la primera parte de esta clase discutiremos la solución de la ecuación de ondas en toda la recta real (i.e., para una cuerda infinita) con condiciones iniciales

$$u(x,0) = f(x), \tag{2}$$

y

$$u_t(x,0) = g(x), \tag{3}$$

respectivamente. En cuanto a las propiedades de regularidad de las funciones f y g supondremos que ambas son continuas y que tienen derivadas continuas por pedazos. Nos proponemos encontrar la solución $u(x,t)$ que satisface (1), (2) y (3). Con ese objetivo hagamos el cambio de variables $(x,t) \to (\xi,\eta)$, dado por

$$\xi = x + ct \qquad \text{y} \qquad \eta = x - ct, \tag{4}$$

respectivamente. De (4) encontramos de inmediato la transformación inversa, i.e.,

$$x = \frac{1}{2}(\xi+\eta) \qquad \text{y} \qquad t = \frac{1}{2c}(\xi-\eta). \tag{5}$$

Vamos a abusar de notación y llamaremos con el mismo símbolo a la solución u en estas nuevas coordenadas. Usando la regla de la cadena y (4, encontramos que que

$$u_x = u_\xi\frac{\partial\xi}{\partial x} + u_\eta\frac{\partial\eta}{\partial x} = u_\xi + u_\eta,$$

y repitiendo este cálculo una vez más obtenemos

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \tag{6}$$

(en que hemos usado que $u_{\xi\eta} = u_{\eta\xi}$). De la misma manera, podemos calcular,

$$u_t = u_\xi\frac{\partial\xi}{\partial t} + u_\eta\frac{\partial\eta}{\partial t} = c\left(u_\xi - u_\eta\right),$$

y haciendo el cálculo una vez más, obtenemos,

$$u_{tt} = c^2\left(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\right). \tag{7}$$

Reemplazando las expresiones para u_{xx} y u_{tt} obtenidas en (6) y (7) respectivamente en la ecuación de ondas (1), obtenemos de inmediato esta ecuación en las nuevas variables:

$$u_{\xi\eta} = 0 \tag{8}$$

cuya solución general es

$$u(\xi, \eta) = p(\xi) + q(\eta), \tag{9}$$

en que p y q son funciones arbitrarias de ξ y η respectivamente. A continuación tenemos que determinar estas funciones p y q a partir de los datos iniciales f y g. A partir de (4) y (9) tenemos en general que

$$u(x, t) = p(x + ct) + q(x - ct)). \tag{10}$$

Imponiendo la condición inicial (2) encontramos,

$$p(x) + q(x) = f(x) \tag{11}$$

Ahora, derivando (10) con respecto a t y luego evaluando en $t = 0$ e imponiendo (2) encontramos,

$$c(p'(x) - q'(x)) = g(x),$$

expresión que podemos integrar, para obtener,

$$p(x) - q(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds, \tag{12}$$

en que x_0 es un punto cualquiera de la recta real (i.e., corresponde a la constante de integración). A partir del sistema de ecuaciones (11) y (12) obtenemos las funciones p y q en términos de los datos iniciales f, y g. Así,

$$p(x) = \frac{1}{2} \left(f(x) + \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds \right). \tag{13}$$

y

$$q(x) = \frac{1}{2} \left(f(x) - \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds \right) = \frac{1}{2} \left(f(x) + \int_{x}^{x_0} g(s)\, ds \right) \tag{14}$$

respectivamente. Evaluando estas expresiones para p y q en $x+ct$ y $x-ct$ respectivamente, y reemplazando en (10) finalmente encontramos que la solución de la ecuación de ondas unidimensional (1), con los datos iniciales (2) y (3) respectivamente, está dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(f(x + ct) + f(x - ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds. \tag{15}$$

Esta es precisamente la solución de D'Alembert para la ecuación de ondas en $\mathbb{R}$. (ver comentarios bibliográficos al final de esta clase). El significado de los distintos términos de la solución de D'Alembert, es el siguiente: Si $f(x)$ es el perfil inicial para la peturbación inicial de los distintos puntos de la cuerda, $f(x - ct)$ represeta un perfil idéntico al inicial que se desplaza (manteniendo su forma) hacia la derecha, con velocidad c. Por ejemplo si pensamos que $f(x)$ es un perfil que tiene un máximo en un punto $\hat{x}$, en el tiempo t, $f(x - ct)$ tiene el máximo en $x - ct = \hat{x}$, i.e., en $x = \hat{x} + ct$. En otras palabras en un tiempo t el máximo se ha desplazado en una cantidad $c\,t$ hacia la derecha. De la misma manera, $f(x - ct)$ representa un perfil idéntico al inicial que se desplaza con velocidad c hacia la izquierda (manteniendo su forma). Entonces, dado el perfil inicial $f(x)$ para la posición de los distintos puntos de la cuerda, uno puede construir la evolución de este perfil geométricamente, dividiendo $f(x)$ en dos, y desplazando estas dos mitades rígidamente hacia la derecha y hacia la izquierda respectivamente. Una interpretación análoga se puede hacer para la evolución inducida por el término g. De esta interpretación física se esprende el hecho que c es la velocidad con que se propagan las perturbaciones iniciales en la cuerda.

Un aspecto importante de la solución de D'Alembert, es el hecho que la solución $u(x, t)$ para un tiempo t (cuando $g = 0$) solo depende del perfil inicial en las posiciones $x - ct$ y $x + ct$ respectivamente. Este hecho también es cierto para lasolución de la ecuación de ondas en cualquier dimensión (espacial) impar, i.e., en particular para dimensión 1 y 3. Esto no es cierto en dimensión 2 como veremos más adelante. Esta propiedad de las soluciones de la ecuación de onda (en dimensión impar) se conoce como "Principio de Huygens".

Método de D'Alembert para resolver la ecuación de ondas en una cuerda finita con condiciones de borde

Al principio de esta clase vimos como encontrar la propagación de perturbaciones en una cuerda infinita. A continuacin usaremos el método de D'Alembert para encontrar las soluciones al movimiento de una cuerda de largo L con condiciones de borde fijas en los extremos, i.e, al problema descrito por el sistema de ecuaciones:

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} = u_{xx}, \tag{16}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{y} \qquad u_t(x,0) = g(x), \tag{17}$$

y

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \tag{18}$$

para todo $x \in [0,L]$, y $t \geq 0$. Para poder usar el método de D'Alembert y al mismo tiempo satisfacer las condiciones de borde (17), extenderemos las funciones $f(x)$ y $g(x)$, las que en principio están solamente definidas en el itervalo $[0,L]$ a toda la recta real. Abusaremos de la notación y usaremos los mismos nombres, f y g para las funciones extendidas. Primero extendemos f a una función definida sobre el intervalo $[0,2L]$ del modo siguiente: $f(x)$ en el subintervalo $[0,L]$ y $-f(2L-x)$ para $x \in [L,2L]$. En palabras simples lo que hemos hecho para construir esta extensión es reflejar primero la función con respecto al eje x y luego esta función reflejada la reflejamos en torno al eje $x = L$ (i.e., hemos reflejado f en forma impar con respecto al punto $(x,y) = (L,0)$. Luego, extendemos la función, que obtuvimos del paso anterior, en forma periódica (con período $2L$) a toda la recta real, i.e., $f(x+n(2L)) = f(x)$, para todo $x \in [0,2L]$, en que $n \in \mathbb{Z}$. Es simple verificar (por construcción) que la función $f(x)$ extendida, satisface $f(0) = f(L) = 0$ (mas en general, que $f(nL) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. En cuanto a la extensión de g desde el intervalo original $[0,L]$ a toda la recta real, procedemos exactamente de la misma manera. Una vez que contamos ya con las extensiones de las funciones f y g a toda la recta real, la solución de nuestro problema (i.e., el sistema de ecuaciones (16), (17), y (18) está dada precisamente por la solución de D'Alembert (15), en que ahora f y g son nuestras funciones extendidas. Nótese que en (15) esta vez $(x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}^+$. Que la función dada por (15) satisface la ecuación diferencial (16) y las condiciones iniciales (12.17) es inmediato. Solamente necesitamos verificar que además satisface las condiciones de borde (18). En efecto, de (15) tenemos que

$$u(0,t) = \frac{1}{2}\left(f(ct) + f(-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{+ct} g(s)\,ds.$$

Perro, por construcción, tanto (las extensiones de) f y g son funciones impares, i.e., $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = -g(x)$. De aquí sigue de inmediato que $u(0,t) = 0$. Como las funciones extendidas tambiés son impares con respecto a $x = L$, sigue también que $u(L,t) = 0$ para todo $t \geq 0$.

Equivalencia de las soluciones de D'Alembert y de Bernoulli

En la clase pasada obtuvimos, mediante el método de separación de variables y la descomposición en modos normales, una solución alternativa de la ecuación de ondas en un segmento finito $[0,L]$ con condiciones de borde de Dirichlet. En esta sección demostraremos que ambas soluciones coinciden.

Notas Bibliográficas:

i) La solución original de D'Alembert se encuentra en el artículo, J. D'Alembert, *Suite des recherches sur la courbe que forme une corde tendüe mise en vibration*, Histoire de l'académie royale des sciences et belles lettres de Berlin **3**, 220–249 (1747); ["Investigaciones sobre la curva que una cuerda tensa forma al ser sometida a una vibración"]. A este artículo original le siguieron varios otros, e.g., J. D'Alembert, *Recherches sur la courbe que forme une corde tendüe mise en vibration*, Histoire de l'académie royale des sciences et belles lettres de Berlin **3**, 214–219 (1747);

y J. D'Alembert *Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendüe mise en vibration*, Histoire de l'académie royale des sciences et belles lettres de Berlin **6**, 355–360 (1750).

ii) Para una breve biografía de Jean D'Alembert, ver:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/D'Alembert.html

iii) Para la solución de D'Alembert, ver también: http://mathworld.wolfram.com/dAlembertsSolution.html

Para mayores detalles ver: Mark Pinsky, *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Applications*, McGraw-Hill, New York, 1991; en particular las páginas 137–147.