CLASE #13: **La ecuación de Hemholtz en dos dimensiones**

Introducción

En esta clase resolveremos el problema de valores propios y de funciones propias para el Laplaciano de Dirichlet en dos dimensiones para una membrana rectangular.

Consideremos una membrana rectangular de lados a y b, y resolvamos el problema de autovalores y autofunciones para el Laplaciano de Dirichlet para dicha membrana. La ecuación que determina los valores propios de dicha membrana está dada por

$$-\Delta u = \lambda u, \tag{1}$$

en la región $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < a; 0 < y < b\}$, y tal que $u = 0$ en el borde $\partial\Omega$ de dicha región. Para resolver este problema de valores propios conviene utilizar coordenadas cartesianas, en las cuales $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$. Para resolver este problema utilizaremos el Método de Separación de Variables que discutimos en la clase 11. Para tal efecto escribimos $u(x, y) = F(x)G(y)$, de modo que $\Delta u = F''(x)G(y)+F(x)G''(y)$. Entonces, (1) se escribe como

$$-F''(x)G(y) - F(x)G''(y) = \lambda F(x)G(y). \tag{2}$$

Dividiendo esta ecuación por $F(x)G(y)$ y rearreglando obtenemos,

$$-\frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda + \frac{G''(y)}{G(y)}. \tag{3}$$

El lado derecho de (3) sólo depende de y, en tanto el lado izquierdo sólo depende de x. Como x e y son variables independientes, esto implica que ambos lados de dicha ecuación deben ser independientes de x e y, i.e., existe una constante, digamos γ^2 tal que

$$-\frac{F''(x)}{F(x)} = \gamma^2, \tag{4}$$

i.e., $F''(x) + \gamma^2 F(x) = 0$. La solución general de esta ecuación está dada por

$$F(x) = A\cos(\gamma x) + B\mathrm{sen}\,\gamma x. \tag{5}$$

Como la solución $u(x, y) = F(x)G(y)$ debe anularse en la frontera de Ω, la función $F(x)$ debe anularse en $x = 0$ y en $x = a$. Imponiendo $F(0) = 0$, de (5) encontramos que $A = 0$. Por otra parte, $F(a) = 0$ implica que $B\,\mathrm{sen}\,(\gamma a) = 0$. Como $B \neq 0$ (pues de los contrario la solución u sería identicamente cero), tenemos que os posibles valores que puede adoptar γ están dados por

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{a}, \tag{6}$$

con $n = 1, 2, \ldots$ (nótese que $n = 0$ no está permitido, pues en ese caso la correspondiente solución u sería identicamente nula). Por otra parte, la ecuación para G, que obtenemos de (3) y (4) está dada por

$$G''(y) + (\gamma^2 - \lambda)G(y) = 0. \tag{7}$$

Llamando $\beta^2 = \gamma^2 - \lambda$, la solución general de (7) está dada por,

$$G(y) = C\cos(\beta y) + D\mathrm{sen}(\beta y). \tag{8}$$

Para que u satisfaga las condiciones de borde en la frontera, es necesario que G se anule en $y = 0$ y en $y = b$. La condición $G(0) = 0$ implica que $C = 0$, en tanto que la condición $G(b) = 0$ implica que los posibles valores que aume la constante de separación β están dados por

$$\beta_m = \frac{m\pi}{b}, \tag{9}$$

en que $m = 1, 2 \ldots.$ De (6), (7) y (9) obtenemos finalmente los autovalores del Lpalaciano de Dirichlet para la membrana rectangular de lados ay b, los cuales están dados por

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \tag{10}$$

en que $n, m = 1, 2, \ldots.$ El autovalor más bajo está dado por

$$\lambda_{1,1} = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Comentario: A partir de esta última expresión vemos que de todas las membranas de la misma área (i.e., tales que $ab = A$) la que tiene el menor primer autovalor de Dirichlet mas bajo (en otras palabras la membrana de menor frecuencia fundamental entre todas las membranas rectangulares de la misma área) es la membrana cuadrada (i.e., con $a = b = \sqrt{A}$. Para la membrana cuadrada de área A, $\lambda_{1,1} = (2\pi^2)/A \approx 19,74/A$.