CLASE #17: **Relaciones de subida y bajada para las funciones de Bessel, y su uso para calcular expansiones en serie de Fourier Bessel**

Introducción

En esta clase, a partir de la función generatriz, derivamos algunas relaciones de recurrencia para las funciones de Bessel. Luego usamos estas relaciones de recurrencia para obtener las expansiones en serie de Fourier Bessel de algunas funciones.

La función generatriz de las funciones de Bessel (ver Tarea 6, problema 5; ver también el Comentario Bibliográfico 1, al final de esta clase), está dada por,

$$\psi(x,t) \equiv e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x). \tag{1}$$

A partir de la función generatriz podemos derivar, de la manera usual, varias relaciones de recurrencia entre las funciones de Bessel de distinto orden. A continuación derivarems dos de ellas, las que combinadas nos permitir'an deducir relaciones *de subida* y *de bajada* para las funciones de Bessel.

Primero, derivamos ambos lados de la ecuación (1) con respecto a x, obtenemos,

$$\psi_x(x,t) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\psi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n'(x). \tag{2}$$

Reemplazando la expresión (1) para $\psi(x,t)$ en el lado izquierdo de (2) obtenemos,

$$\psi_x(x,t) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty} t^k J_k(x), \tag{3}$$

que podemos reescribir como

$$\psi_x(x,t) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} t^{k+1} J_k(x) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} t^{k-1} J_k(x)\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_{n-1}(x) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_{n+1}(x)\right]. \tag{4}$$

Para obtener la última igualdad hemos cambiado el índice de suma k por $n-1$ en la primera suma, y por $n+1$ en la segunda. Nótese que los límites de las sumas no cambian, porque estamos sumando entre menos infinito y mas infinito. A partir de (2) y (4) obtenemos que,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right) t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x) t^n. \tag{5}$$

Como las funciones t^n son linealmente independientes, os coeficientes que acompañan a iguales potencias de t a ambos lados de (5) tienen que ser iguales y de este modo obtenemos la relación de recurrencia,

$$\frac{1}{2}\left(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right) = J_n'(x), \tag{6}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Comentarios:

i) Cambiando t por $-1/t$ en (1), obtenemos que

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-t)^{-n} J_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n (-1)^n J_{-n}(x)$$

en que hemos cambiado el índice de suma n por $-n$ para obtener la última igualdad. Comparando iguales potencias de t^n de esta expresión y de (1) obtenemos $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ (en particular $J_{-1}(x) = -J_1(x)$, y reemplazando esto en (6) con $n = 0$ obtenemos.

$$\frac{dJ_0}{dx} = -J_1(x), \tag{7}$$

relación que usamos en la clase anterior.

ii) Del mismo modo, haciendo simultáneamente el cambio $x \to -x$ y $t \to -t$ en (1) podemos obtener que

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x). \tag{8}$$

A continuación derivaremos (1) con respecto a t para obtener una segunda relación de recurrencia, que combinada apropiadamente con (6) nos servirá para obtener las relaciones de subida y bajada para las funciones de Bessel. Derivando entonces ambos lados de (1) obtenemos,

$$\psi_t(x,t) = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\psi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n t^{n-1} J_n(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (m+1) t^m J_{m+1}(x), \tag{9}$$

en que hicimos el cambio de variable de suma $n \to m = n-1$) para obtener la última igualdad. Reemplazando la expresión (1) para $\psi(x,t)$ en la segunda igualdad de (9) obtenemos

$$\psi_t(x,t) = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) = \frac{x}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n-2} J_n(x)\right). \tag{10}$$

Cambiando el índice de suma en la última integral de $n \to m = n-2$, y reordenando tenemos que

$$\psi_t(x,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m \frac{x}{2}(J_m(x) - J_{m+2}(x)). \tag{11}$$

De (9) y (11) comparando los coeficientes de iguales potencias de t, finalmente obtenemos,

$$\frac{x}{2}(J_m(x) + J_{m+2}(x)) = (m+1)J_{m+1}(x).$$

Conviene evaluar esta relación de recurrencia en $m = n-1$, y de ese modo podemos escribir la relación de recurrencia

$$\frac{x}{2}(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)) = nJ_n(x). \tag{12}$$

Las relaciones de recurrencia (6) y (12) son relaciones de dos pasos (i.e., relacionan términos con $n+1$, n y $n-1$). Pero, a partir de ellas, se pueden obtener relaciones de un paso, que obtendremos a continuación. Multiplicando (6) por x y sumándole (12), obtenemos,

$$xJ_{n-1}(x) = nJ_n(x) + xJ_n'(x). \tag{13}$$

Multiplicando (13) por x^{n-1} obtenemos,

$$\frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^n J_{n-1}(x). \tag{14}$$

Por otra parte, multiplicando (6) por x y esta vez restándole (12) obtenemos,

$$xJ_{n+1}(x) = nJ_n(x) - xJ_n'(x). \tag{15}$$

Luego, multiplicando esta ecuación por x^{-n-1}, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-n} J_n(x)\right) = -x^n J_{n+1}(x). \tag{16}$$

Uso de las relaciones de súbida y bajada de las funciones de Bessel para evaluar los coeficientes de las series de Fourier–Bessel.

Las relaciones de subida y bajada (i.e., (16) y (14) respectivamente, son muy útiles para derivar distintas propiedades de las funciones de Bessel. Aquí las usaremos para obtener coeficientes de Fourier–Bessel de funciones definidas en el intervalo $(0, 1)$ (ver Apuntes de Clase 16). Vimos en la clase anterior que las funciones

$$\phi_\alpha(x) = \frac{\sqrt{2}}{J_1(\alpha)} J_0(\alpha x), \tag{17}$$

forman una base ortonormal para las funciones definidas en el intervalo $(0, 1)$ (ortonormal con respecto al producto interno $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\, x\, dx$). Aquí, como en la clase pasada, α denota uno de los ceros positivos de la función de Bessel de orden 0, i.e., genéricamente $\alpha = j_{0,k}$. Entonces, descomponíamos,

$$f(x) = \sum_\alpha c_\alpha \phi_\alpha(x), \tag{18}$$

(o si prefieren, $f(x) = \sum_{k=1}^\infty c_k \phi_k(x)$, cuando identificamos α con $j_{0,k}$; aquí continuaré usando la notación (18) que es la usual para series de Fourier–Bessel). En (18), el coeficiente c_α está dado en términos de $f(x)$ por,

$$c_\alpha = (\phi_\alpha, f) = \frac{\sqrt{2}}{J_1(\alpha)} \int_0^1 J_0(\alpha x) f(x)\, x\, dx, \tag{19}$$

i.e., c_α es la proyección de $f(x)$ a lo largo de $\phi_\alpha(x)$.

Encontremos la expansión en serie de Fourier–Bessel de la función $(1 - x^2)$. Para eso solo tenemos que encontrar los coeficientes de Fourier–Bessel,

$$c_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{J_1(\alpha)} \int_0^1 (1 - x^2) J_0(\alpha x)\, x\, dx. \tag{20}$$

Haciendo el cambio de variable $x \to s = \alpha x$ en la integral en (20) podemos escribir

$$I \equiv \int_0^1 (1 - x^2) J_0(\alpha x)\, x\, dx = \frac{1}{\alpha^4} \int_0^\alpha (\alpha^2 - s^2)(J_0(s)\, s)\, ds. \tag{21}$$

Ahora, usando (14) con $n = 0$ podemos escribir $sJ_0(s) = (sJ_1(s))'$. Reemplazando esta relación en (21) e integrando por partes (nótese que no hay términos de borde pues $(\alpha^2 - s^2)$ se anula en $x = s$, en tanto que $J_0(s)\, s$ se anula en 0) obtenemos,

$$I \equiv \frac{1}{\alpha^4} \int_0^\alpha (\alpha^2 - x^2) J_0(s)\, s\, ds = \frac{2}{\alpha^4} \int_0^\alpha (J_1(s)\, s^2)\, ds. \tag{22}$$

Usando nuevamente (14), pero esta vez con $n = 2$, tenemos,

$$s^2 J_1(s) = \frac{d}{ds}(s^2 J_2(s)),$$

y reemplazando esto en la última integral, luego usando el teorema fundamental del cálculo, finalmente obtenemos,

$$I \equiv \frac{2}{\alpha^2} J_2(\alpha). \tag{23}$$

Si evaluamos (12), con $n = 1$, en $x = \alpha$, tenemos que

$$J_2(\alpha) = \frac{2}{\alpha} J_1(\alpha),$$

de modo que, de (24) finalmente obtenemos,

$$I = \frac{4}{\alpha^3} J_1(\alpha).$$

Entonces, reemplazando en (21), tenemos que $c_\alpha = 4\sqrt{2}/\alpha^3$ y reemplazando esta expresión para c_α y (17) en (18), finalmente encontramos que

$$\frac{1-x^2}{8} \equiv \sum_\alpha \frac{J_0(\alpha x)}{\alpha^3 J_1(\alpha)}. \tag{24}$$

Usando la ortogonalidad de la base de funciones de Fourier Bessel con respecto al producto interno con peso x, podemos obtener reglas de suma para potencias recíprocas de los ceros de las funciones de Bessel. En particular, tomando el cuadrado de (24), y usando que

$$\int_0^1 J_0(\alpha x) J_0(\beta x)\, x\, dx = \frac{J_1(\alpha)^2}{2} \delta_{\alpha,\beta},$$

obtenemos que

$$\int_0^1 \left(\frac{1-x^2}{8}\right)^2 x\, dx = \sum_\alpha \frac{1}{2\alpha^6}. \tag{25}$$

Evaluando la integral del lado izquierdo de (25) finalmente tenemos que

$$\sum_\alpha \frac{1}{\alpha^6} = \frac{1}{24}. \tag{26}$$

Representación Integral de las Funciones de Bessel

Usando $t = e^{i\theta}$ (y por lo tanto $(1/t) = e^{-i\theta}$) en (1), obtenemos,

$$e^{ix\mathrm{sen}\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} J_n(x), \tag{27}$$

(en que hemos usado la formula de Euler, i.e., que $\mathrm{sen}\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/(2i)$). El lado derecho es precisamente la descomposición en serie de Fourier de la función periódica (de período 2π) $\exp(ix\mathrm{sen}\theta)$ (aquí, x es un parámetro). Multiplicando (27) por $\exp(-im\theta)$ e integrando ambos lados en θ entre 0 y 2π obtenemos (usando la ortogonalidad de la base de Fourier):

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\mathrm{sen}\theta} e^{-im\theta}. \tag{28}$$

Como $\exp(ix\mathrm{sen}\theta - im\theta) = \cos(x\mathrm{sen}\theta - m\theta) + i\mathrm{sen}(x\mathrm{sen}\theta - m\theta)$, y como la segunda función es impar en θ (y por lo tanto su integral entre $-\pi$ y π es nula, de (28) obtenemos,

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \,\mathrm{sen}\, \theta - m\, \theta). \tag{29}$$

A partir de (28) ó de (29) es fácil ver que

$$\| J_m(x)| \leq 1.$$

Comentarios Bibliográficos:

i) En toda su generalidad, las funciones de Bessel fueron introducidas en [1], como uan manera de representar el arco recorrido por un planeta en la órbita elíptica, como función del tiempo. Bessel uso precisamente la expresión (29) para definir $J_m(x)$.

ii) La función generatriz de las funciones de Bessel fue introducida por el astrónomo alemán Peter Andreas Hansen en 1843 (ver [3], pág. 100).

References

[1] F. W. Bessel, *Untersuchung des Theils der planetarischen Strungen* Abhandlungen Akademie der Wissenschaften (Math. Kl.) (1824), article 14, pp. 22-41.

[2] Frank Bowman, *Introduction to Bessel Functions*, Dover, NY, 1958.

[3] P. A. Hansen, *Ermittelung der absoluten Störungen in ellipsen von beliebiger excentrität un neigung*, Erster Theil, Schriften der Sternwarte Seeberg, Gotha, 1843.

[4] E. W. Hobson, *On the representation of a function by series of Bessel functions*, Proceedings of the London Mathematical Society **7**, 359–388 (1909).

[5] Harry Hochstadt, *The Mean Convergence of Fourier–Bessel Series*, SIAM Review **9**, 211–218 (1967). [Disponible en SIBUC, a través de la base de datos JSTOR].

[6] Mark Pinsky, *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Applications*, McGraw-Hill, New York, 1991. [This book has an appendix by Alfred Gray on Using Mathematica].

[7] G. N. Watson, *A treatise on the Theory of Bessel Functions, second edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.