CLASE #18: **La ecuación del calor**

Introducción

En esta clase, resolveremos un problema de valores iniciales para la ecuación de calor en tres dimensiones.

Consideremos el siguiente problema de valores iniciales relacionado con la ecuación del calor. Sea $u(\vec{x}, t)$ la solución de la ecuación del calor

$$u_t = K\Delta u, \tag{1}$$

para $\vec{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, en que Ω es un cilindro recto, de base circular, de radio R y largo L. Supongamos que ambas tapas del cilindro se mantienen a temperatura fija T_1 y T_2 respectivamente, y que el flujo de calor en el manto del cilindro es nulo. Finalmente, supongamos que la temperatura inicial $u(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$ es conocida. Queremos determinar $u(\vec{x}, t)$ para todo $t > 0$ y para todo $\vec{x} \in \Omega$.

Es importante notar que en este problema algunas de las condiciones de borde no son homogéneas. Conviene entonces buscar primero la siguiente solución del problema independiente del tiempo (que eventualmente será la solución de *regimen permanente* de la ecuación del calor): llamemos entonces $u_s(\vec{x})$ a la solución del problema

$$K\Delta u_s = 0, \tag{2}$$

en Ω, con $u_s = T_1$ en la tapa inferior y $u_s = T_2$ en la tapa superior, y el flujo de u_s por el manto del cilindro igual a cero (i.e., $\partial u_s/\partial n$). Supongamos que podemos encontrar tal solución u_s (que en realidad encontraremos explícitamente más abajo). Nótese que hemos impuesto que u_s no dependa del tiempo, i.e., $\partial u_s/\partial t = 0$.

Ahora introduzcamos $v(\vec{x}, t) = u(\vec{x}, t) - u_s(\vec{x})$. Como la ecuación del calor es una ecuación lineal, es fácil verificar que v satisface el problema de borde,

$$v_t = K\Delta v, \tag{3}$$

para $\vec{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, junto a las condiciones de contorno $v(\vec{x}, t) = 0$ en la tapa inferior, y también $v(\vec{x}, t) = 0$ en la tapa suerior, y $\partial v/\partial n = 0$ en el manto del cilindro. Finalmente v obedece la condición inicial $v(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}) - u_s(\vec{x})$.

Con el objeto de resolver el problema de valores iniciales para v, usamos el método de separación de variables. Para ello buscamos soluciones de la forma $v(\vec{x}, t) = h(t)\phi(\vec{x})$. Reemplazando esta expresión en (3), obtenemos

$$\frac{h_t}{K\,h} = \frac{\Delta\phi}{\phi} = -\lambda,$$

en que, como de costumbre, λ es la constante de separación. La ecuación $h_t = \lambda K h$ tiene la solución,

$$h(t) = h(0)\exp(-\lambda K\,t). \tag{4}$$

Por otra parte, $\phi(\vec{x})$ satisface la ecuación

$$-\Delta\phi = \lambda\phi \tag{5}$$

en Ω, junto a las condiciones de contorno

$$\phi = 0,$$

en ambas tapas, y

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0,$$

en el manto del cilindro. En otras palabras, λ es un autovalor del laplaciano en la región Ω, con condiciones de borde de Dirichlet en las tapas, y de Neumann en el manto.

Con el objeto de resolver este problema de valores propios y, dada la geometría de Ω conviene usar coordenadas cilíndricas: ρ, θ, z. Elegimos el eje z coincidiendo con el eje de simetría del cilindro. Ubicaremos las tapas del cilindro en $z = 0$ y $z = L$ respectivamente. El manto del cilindro entonces queda descrito por la ecuación $\rho = R$. Entonces Ω está descrito por las ecuaciones $0 \leq z \leq L$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, y $0 \leq \rho \leq R$.

El laplaciano en coordenadas cilíndricas está dado por,

$$\Delta\phi = \phi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\phi_\rho + \frac{1}{\rho^2}\phi_{\theta\theta} + \phi_{zz} \tag{6}$$

de modo que la función ϕ satisface,

$$-\left[\phi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\phi_\rho + \frac{1}{\rho^2}\phi_{\theta\theta} + \phi_{zz}\right] = \lambda\phi \tag{7}$$

en el interior del cilindro. Usando el método de separación de variables buscamos una solución de (7) de la forma $\phi(\vec{x}) = F(\rho)G(\theta)H(z)$. Reemplazando esta expresión en (7) y dividiendo por $F\,G\,H$ obtenemos,

$$\frac{F''}{F} + \frac{1}{\rho}\frac{F'}{F} + \frac{1}{\rho^2}\frac{G''}{G} + \frac{H''}{H} = \lambda. \tag{8}$$

El término H''/H solo depende de z y el resto solo depende de ρ y θ, de modo que introduciendo una nueva constante de separación tenemos

$$\frac{H''}{H} = -\gamma^2.$$

i.e.,

$$H'' + \gamma^2 H = 0. \tag{9}$$

La solución general de (9) es

$$H(z) = A\cos(\gamma z) + B\mathrm{sen}(\gamma z).$$

Imponiendo las condiciones de borde nulas en las tapas del cilindro, i.e., $H(0) = 0$, y $H(L) = 0$, encontramos que $A = 0$ y $\mathrm{sen}\gamma L = 0$ respectivamente. De aquí, se tienq eu los valores posibles de γ están dados por

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{L}, \tag{10}$$

en que $n = 1, 2, \ldots$. Las correspondientes funciones H están dadas por

$$H_n(z) = \mathrm{sen}(\frac{n\pi\, z}{L}). \tag{11}$$

Reemplazando (9) en (8) y multiplicando esta última ecuación por ρ^2, obtenemos,

$$\rho^2\frac{F''}{F} + \rho\frac{F'}{F} + \frac{G''}{G} = -(\lambda - \gamma_n^2)\rho^2. \tag{12}$$

En (12) el término G''/G es solo función de *theta* en tanto que el resto es solo función de ρ. Entonces tenemos que

$$\frac{G''}{G} = -\delta^2$$

i.e.,

$$G''(z) + \delta^2 G(z) = 0 \tag{13}$$

en que hemos introducido una nueva constante de separación, δ^2. La solución general de (13) está dada por,

$$G(\theta) = C\cos(\delta\theta + \alpha) = D\cos\theta + E\mathrm{sen}\theta, \tag{14}$$

en que C es la amplitud de la solución y α la fase (aquí, C y α, son constantes de integración; ó equivalentemente D y E son constantes de integración. Como la función $G(\theta)$ debe estar definida en forma unívoca, debe satisfacer $G(\theta + 2\pi) = G(\theta)$ (i.e., debe satisfacer *condiciones de borde periódicas*). Imponiendo está condición en nuestra solución general para $G(\theta)$ encontramos que $2\pi\delta = 2\pi\, m$ en que $m \in \mathbb{Z}$, de modo que $\delta = m \in \mathbb{Z}$. Vemos entonces de (14) que para $m = 1, 2, \ldots$ existen dos soluciones correspondiente a la misma $\delta_m^2 = m^2$, i.e., $\cos m\theta$ y $\operatorname{sen} m\theta$ (ó $\exp(im\theta)$ y $\exp(-im\theta)$). En cambio para $m = 0$ solo existe una función, 1 (i.e., $\cos 0$). Reemplazando $G''/G = -m^2$ en (12), y rearreglando un poco la ecuación resultante, tenemos la siguiene ecuación diferencial para $F(\rho)$, i.e.,

$$F'' + \frac{1}{\rho} F' + \left(\beta^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) = 0, \tag{15}$$

en que hemos introducido

$$\beta^2 = \lambda - \gamma_n^2 = \lambda - \left(\frac{n\,\pi}{L}\right)^2 .$$

La ecuación (16) es una ecuación de Bessel, cuya solución general está dada por

$$F(\rho) = P\, J_m(\beta\rho) + Q\, Y_m(\beta\rho). \tag{16}$$

Como $Y_m(x)$ es singular en $x = 0$, y dado que el eje del cilindro (i.e., $\rho = 0$) es parte del interior del mismo, debemos exigir que la constante de integración Q sea cero. Así, $F(\rho) = P\, J_m(\beta\rho)$.

References

[1] E. W. Hobson, *On the representation of a function by series of Bessel functions*, Proceedings of the London Mathematical Society **7**, 359–388 (1909).

[2] Harry Hochstadt, *The Mean Convergence of Fourier–Bessel Series*, SIAM Review **9**, 211–218 (1967). [Disponible en SIBUC, a través de la base de datos JSTOR].

[3] Mark Pinsky, *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Applications*, McGraw-Hill, New York, 1991. [This book has an appendix by Alfred Gray on Using Mathematica].
http://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionZeros.html

[4] G. N. Watson, *A treatise on the Theory of Bessel Functions, second edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.