CLASE # 20: **El núcleo de Poisson.**

Introducción

En esta clase, resolveremos el problema de Dirichlet para un disco en el plano.

Consideremos el problema de Dirichlet para un disco de radio R en el plano. Este consiste en encontrar una función escalar que satisface la ecuación de Laplace en el interior del disco y cuyos valores son dados en el bode del disco, i.e., encontrar u, tal que

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

en el interior del disco, y

$$u = f, \tag{2}$$

en el borde del mismo. Aquí, f es una función dada.

Dada la geometría del dominio donde queremos resolver el *problema de Dirichlet*, conviene usar coordenadas polares, centradas en el centro del disco. Llamemos ρ y θ , como de costumbre a las coordenadas polares. Aquí, $0 \leq \rho \leq R$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. El laplaciano en coordenadas polares está dado por,

$$\Delta u = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta}. \tag{3}$$

Usaremos el método de separación de variables para encontrar soluciones de $\Delta u = 0$ en el interior del círculo. Entonces buscamos soluciones de la forma $u(\rho, \theta) = F(\rho)G(\theta)$ de (1) en el interior del disco. Insertando este tipo de funciones en (1) con Δu dado por (3) tenemos,

$$G(F'' + \frac{1}{\rho} F') + F \frac{1}{\rho^2} G'' = 0. \tag{4}$$

Multiplicando (4) por $\rho^2/(F(\rho)G(\theta))$ obtenemos,

$$(F'' + \frac{1}{\rho} F') \frac{\rho^2}{F} + \frac{G''}{G} = 0. \tag{5}$$

El primer término en (5) depende solo de ρ, en tanto que el segundo depende solo de θ. Entonces, como ρ y θ son variables independientes, ambos términos son constantes. Llamemos $-\gamma^2$ a ala constante de separación. Entonces obtenemos,

$$G'' + \gamma^2 G = 0 \qquad \text{y} \qquad F'' + \frac{1}{\rho} F' - \frac{\gamma^2}{\rho^2} F = 0. \tag{6}$$

La solución general para $G(\theta)$ (de la primera ecuación) está dada por

$$G(\theta) = \mathcal{A} \cos(\gamma\theta + \alpha), \tag{7}$$

en que $\mathcal{A}$ (la amplitud) y α (la fase) son constantes de integración. La solución $u(\rho, \theta)$ de $\Delta u = 0$ tiene que ser univaluada. En particular esto implica que $u(\rho, \theta) = u(\rho, \theta + 2\pi)$. Entonces, para el tipo de soluciones que estamos buscando esto implica que G debe ser periódica en θ de período 2π. Entonces, de (7) obtenemos que $\gamma = n$, un entero, de modo que en general las soluciones para G son de la forma $\mathcal{A} \cos(n\theta + \alpha) = A \cos(n\theta) + B\text{sen}\,(n\theta)$. Conviene escribir la primera ecuación de (6) para G de la forma,

$$-\frac{d^2}{d\theta^2} G = \gamma^2 G, \tag{8}$$

en el intervalo $(0, 2\pi)$ con condiciones de borde periódica. Vista de esta manera, (8) es una ecuación de valores propios para el operador $-d^2/d\theta^2$ con condiciones de borde periódicas (i.e., o en otras palabras para el laplaciano sobre S^1). Tal como hemos determinado, los valores propios están dados por n^2, en que

$n = 0, 1, \ldots$. El valor propio $n = 0$ es no degenerado, y la función propia correspondiente es $G_0(\theta) = 1$ (i.e., una constante) en tanto que para $n \geq 1$ el valor propio n^2 es degenerado (existen dos funciones propias para este valor propio: $\operatorname{sen} n\theta$ y $\cos n\theta$. Alternativamente las funciones propias correspondientes a n^2 se pueden escribir como $\exp(in\theta)$ y $\exp(-in\theta)$. Vemos que las funciones propias del laplaciano en S^1son precisamente las funciones base de las series de Fourier.

Por otra parte, la ecuación para F (i.e., la segunda ecuación en (6) con $\gamma^2 = n^2$) está dada por,

$$F'' + \frac{1}{\rho}F' - \frac{n^2}{\rho^2}F = 0. \tag{9}$$

Nótese que la ecuación (9) es invariante de escala, i.e., si cambiamos ρ por $\beta\rho$ en que β es una constante cuaqluiera, la ecuación permanece invariante. Entonces conviene hacer el siguiente cambio de variable: $\rho \to \sigma = \log \rho$. Usando la regla de la cadena, tenemos de inmediato que:

$$\frac{dF}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{dF}{d\sigma},$$

y, derivando una vez más, usando la regla de la cadena, también tenemos,

$$\frac{d^2F}{d\rho^2} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{dF}{d\sigma} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2F}{d\sigma^2}.$$

Reemplazando estas dos expresiones en (9), y simplificando obtenemos,

$$\frac{d^2F}{d\sigma^2} = n^2 F, \tag{10}$$

cuya solución general es,

$$F(\sigma) = A\exp(n\sigma) + B\exp(-n\sigma),$$

en el caso $n \neq 0$, y ,

$$F(\sigma) = C + D\sigma,$$

en el caso $n = 0$. Volviendo a la variable original, i.e., reemplazando $\sigma = \log \rho$, finalmente tenemos que

$$F(\rho) = A\rho^n + B\rho^{-n}, \tag{11}$$

si $n \neq 0$, y

$$F(\rho) = C + D\log \rho, \tag{12}$$

si $n = 0$. En nuestro problema, el dominio (i.e., el círculo de radio R) incluye el orígen, y queremos soluciones regulares en todo el dominio, en particular en $\rho = 0$. La regularidad de la solución exige entonces que $D = B = 0$. Resumiendo, por el método de separación de variables hemos encontrado las soluciones:

$$\begin{aligned} u_0(\rho, \theta) &= a_0, \\ u_n(\rho, \theta) &= \rho^n \left(a_n e^{in\theta} + b_n e^{-in\theta}\right), \qquad \text{para } n = 1, 2 \ldots \end{aligned} \tag{13}$$

Como la ecuación $\Delta u = 0$ es lineal, la solución mas general que podemos construir a partir de los u_n y u_0 está dada por

$$u(\rho, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left(a_n e^{in\theta} + b_n e^{-in\theta}\right), \tag{14}$$

en que a_0, y a_n, b_n para $n = 1, 2, \ldots$ son constantes complejas cuyo valor determinamos a partir del dato de Dirichlet $f(\theta)$ en el borde. Imponiendo la condición de borde $u(R, \theta) = f(\theta)$ tenemos que,

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n \left(a_n e^{in\theta} + b_n e^{-in\theta}\right), \tag{15}$$

Nosotros sabemos que las funciones $e^{im\theta}$, $m \in \mathbb{Z}$ forman un conjunto completo de funciones para las funciones $f(\theta)$ de cuadrado integrable en S^1 (i.e., funciones periódicas en θ de período 2π), por lo que la condición de borde (15) puede ser satisfecha para toda función en $L^2(S^1)$. Usando la ortogonalidad de la base de Fourier, podemos encontrar facilmente los coeficientes a_0, a_n y b_n. Primero integramos ambos lados de (15) en la variable θ entre 0 y 2π. Como $\int_0^{2\pi} \exp(in\theta)\, d\theta = 0$ para todo $n \neq 0$, obtenemos que,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi. \tag{16}$$

Como la variable de integración en (**??**) es muda, conviene escribir la integral como en la última igualdad. Esto es conveniente más adelante. Luego multiplicamos (15) por $e^{-ik\theta}$, con $k = 1, 2 \ldots$. Usando el hecho que $\int_0^{2\pi} \exp(i(n-k)\theta)\, d\theta = 0$ si $n \neq k$, y es igual a 2π si $n = k$, obtenemos que

$$a_k R^k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-ik\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi) e^{-ik\varphi}\, d\varphi. \tag{17}$$

Nótese que para obtener (18) también usamos que $\int_0^{2\pi} \exp(i(-n-k)\theta)\, d\theta = 0$, para todo $n, k = 1, 2, \ldots$. Por otra parte, multiplicando ahora (15) por $e^{ik\theta}$ con $k = 1, 2, \ldots$ y procediendo como en el acso anterior, encontramos

$$b_k R^k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) e^{+ik\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi) e^{+ik\varphi}\, d\varphi. \tag{18}$$

Reemplazando las expresiones encontradas en (16), (18), y (19), para los coeficientes de Fourier, y reemplazándolas en (14) teniendo debido cuidado en cambiar k por n, y factorizando los términos comunes obtenemos,

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n e^{in(\theta-\varphi)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n e^{-in(\theta-\varphi)}\right] f(\varphi)\, d\varphi. \tag{19}$$

Nótese que las sumas que aparecen en el lado derecho de (19) son series geométricas (convergentes para $\rho < R$, i.e., en el interior del disco). Recordando que la suma de la serie geométrica $S = \sum_{n=1}^{\infty} r^n = r/(1-r)$ siempre que $|r| < 1$, a partir de (19) obtenemos,

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{(\rho/R)\exp(i(\theta-\varphi)}{1-(\rho/R)\exp(i(\theta-\varphi)} + \frac{(\rho/R)\exp(-i(\theta-\varphi)}{1-(\rho/R)\exp(-i(\theta-\varphi)}\right] f(\varphi)\, d\varphi. \tag{20}$$

Sumando los tres términos que aparecen en el integrando y luego de simplificar finalmente encontramos,

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2\rho\, R\, cos(\theta-\varphi)}\, f(\varphi)\, d\varphi. \tag{21}$$

Esta expresión, que es la solución del *problema de Dirichlet* en el disco, con dato de Dirichlet en el borde dados por la función dada $f(\theta)$ se puede escribir de la forma,

$$u(\rho,\theta) = \int_0^{2\pi} G(\rho, \theta-\varphi)\, f(\varphi)\, d\varphi. \tag{22}$$

en que

$$G(\rho,\theta-\varphi) = \frac{1}{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2\rho\, R\, cos(\theta-\varphi)} \tag{23}$$

La solución (22) es una representación integral para la solución $u(\rho,\theta)$ del problema de Dirichlet en el disco de radio R. El *núcleo*, $G(\rho,\theta-\varphi)$ de esta representación integral se conoce como núcleo (o más bien *función de Green*) de Poisson. El hecho que la función de Green en este caso depende de la diferencia entre θ y φ y no de cada una de estas variables en forma independiente es una consecuencia de la invariancia bajo rotaciones del dominio (i.e., del disco) de nuestro problema. Finalmente notemos que $G(0,\theta-\varphi)=1/(2\pi)$. Reemplazando este hecho en (22) vemos que

$$u(0,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi.$$

Es decir el valor de u en el centro del disco es igual al promedio de los valores de la función f en el borde del disco. Este hecho se puede demostrar en forma mucho mas general y se conoce como el principio del máximo. Como el promedio de una función es menor que su máximo y mayor que su mínimo, i.e.,

$$\min_{\theta\in[0,2\pi]} f(\theta)\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi \leq \max_{\theta\in[0,2\pi]} f(\theta)$$

entonces,

$$\min_{\theta\in[0,2\pi]} f(\theta)\leq u(\mathrm{O})\leq \max_{\theta\in[0,2\pi]} \mathrm{f}(\theta)$$

en que $u(\mathrm{O})$ es el valor de u en el centro del disco.