Clase del Miércoles 13 de Junio de 2012: **Ecuaciones Integrales.**

Introducción En esta clase estudiaremos las ecuaciones integrales de Fredholm y de Volterra.

—————-+—————-

Empezaremos por considerar la *ecuación de Fredholm de segunda especie*,

$$u(x) = \phi(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)u(y)\,dy. \tag{1}$$

Aquí, $\phi(x) \in C^0(a,b)$ es una función dada. La función $k(x,y)$, también es dada y se conoce como el *núcleo de la ecuación integral.* Aquí supondremos que $k(x,y)$ es una función continua en $(a,b)\times(a,b)$. Queremos resolver la ecuación (1) para $u(x)$. Estudiaremos en primer lugar el caso en que k es un producto de la forma

$$k(x,y) = s(x)s(y). \tag{2}$$

Si k es de la forma (2) diremos que es un *núcleo simple.* En el caso de núcleos simples es fácil resolver (1). De hecho, reemplazando (2) en (1), tenemos

$$u(x) = \phi(x) + \lambda s(x) \int_a^b s(y)u(y)\,dy. \tag{3}$$

Llamemos

$$A = \int_a^b s(y)u(y)\,dy. \tag{4}$$

que es simplemente un número que depende de la función u. En términos de A, la ecuación (3) se escribe como

$$u(x) = \phi(x) + \lambda\, A\, s(x), \tag{5}$$

de modo que u es una combinación lineal de ϕ y s. Todo el problema se reduce a encontrar el valor de A. Para ello, reemplazamos (5) en (4) y obtenemos

$$A\left(1 - \lambda \int_a^b s(x)^2\,dx\right) = \int_a^b s(x)\phi(x)\,dx. \tag{6}$$

Entonces si

$$\lambda \neq \frac{1}{\int_a^b s(x)^2\,dx},$$

la constante A está dada por

$$A = \frac{\int_a^b s(x)\phi(x)\,dx}{1 - \lambda \int_a^b s(x)^2\,dx}, \tag{7}$$

y la solución de la ecuación de Fredholm está dada por (5).

Ahora consideremos, para el mismo k (i.e., para el núcleo simple dado por (2), la ecuación de *Fredholm de primera especie*,

$$\lambda \int_a^b k(x,y)u(y)\,dy = u(x). \tag{8}$$

Si llamamos T al operador integral de núcleo k, la ecuación anterior es de la forma

$$T(u)(x) = \frac{1}{\lambda}u(x), \tag{9}$$

que es una ecuación de valores propios para el operador T. Reemplazando (2) en (8) vemos que u es solución de (8) si es de la forma

$$u(x) = B\, s(x), \tag{10}$$

en que

$$B = \lambda \int_a^b s(y)u(y)\, dy. \tag{11}$$

Reemplazando u, dado por (10) en (11) vemos que (8) tiene solución no trivial para u si y solo si,

$$\lambda = \frac{1}{\int_a^b s(x)^2\, dx}. \tag{12}$$

En otras palabras, cuando el núcleo es de la forma $k(x, y) = s(x)s(y)$ el operador integral T tiene un solo autovalor (dado por (12) y su correspondiente autofunción ($s(x)$)).

Si ahora resumimos estos dos casos en uno sólo, tenemos una ilustración de lo que se conoce habitualmente como *la alternativa de Fredholm*: Si λ no es un autovalor del oerador integral T con núcleo k, entonces existe una solución de la ecuación integral de Fredholm (1).

Método de Iteración: Series de Neumann

Consideremos la ecuación integral

$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^x u(y)\, dy. \tag{13}$$

Esta es un ejemplo de *ecuación de Volterra de segunda especie*. Este ejemplo es muy simple de resolver en forma cerrada reduciéndolo a una ecuación diferencial ordinaria. De hecho, si derivamos (13) con respecto a x, vemos que u satisface

$$\frac{du}{dx} = \lambda u,$$

y, por otra parte, evaluando (13) en $x = 0$, vemos que $u(0) = 1$. La solución de esta ecuación diferencial, con esta condición inicial es

$$u(x) = e^{\lambda x}. \tag{14}$$

A continuación, reobtendremos (14) usando lo que se conoce como el *método de iteración*, o de las *series de Neumann*.

Escribamos la solución deseada en series de potencia del parámetro λ, i.e.,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_{(n)}(x),) \tag{15}$$

y remplacemos en (13). Así obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_{(n)}(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \int_0^x u_{(n)}(y)\, dy.$$

y, redefiniendo el índice de la segunda suma tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_{(n)}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_0^x u_{(n-1)}(y)\, dy. \tag{16}$$

Igualando los coeficientes de iguales potencias de λ en la ecuación anterior tenemos,

$$u_{(0)}(x) = 1, \tag{17}$$

$$u_{(n)}(x) = \textstyle\int_0^x u_{(n-1)}(y)\, dy, \qquad \text{para } n = 1, 2, \ldots. \tag{18}$$

Resolviendo iterativamente (18) obtenemos

$$u_{(n)}(x) = \frac{x^n}{n!}, \tag{19}$$

y, finalmente, reemplazando en (15) tenemos,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{x^n}{n!} = e^{\lambda x}. \tag{20}$$

El método de iteración siempre converge (i.e., da una solución) en el caso de ecuaciones de Volterra de segunda especie. En cambio, para las ecuaciones de Fredholm solo converge si λ es suficientemente *pequeño*:

Resolvamos, por el método de iteración, la exuación de Fredholm de segunda especie,

$$u(x) = \phi(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\, u(y)\, dy. \tag{21}$$

Procedemos como en el caso anterior: escribiendo la solución en la forma (15), y reemplazando en (21) obtenemos la secuencia de ecuaciones,

$$u_{(0)}(x) = \phi(x), \tag{22}$$

$$u_{(n)}(x) = \textstyle\int_a^b k(x,y) u_{(n-1)}(y)\, dy. \tag{23}$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores encontramos

$$u_{(0)}(x) = \phi(x), \tag{24}$$

$$u_{(1)}(x) = \textstyle\int_a^b k(x,y)\phi(y)\, dy, \tag{25}$$

$$\ldots \tag{26}$$

$$u_{(n)}(x) = \textstyle\int_a^b k^{(n)}(x,y_n)\phi(y_n)\, dy_n, \tag{27}$$

en que el núcleo $k^{(n)}(x,z)$ (que se conoce como *núcleo iterado*) está dado por

$$k^{(n)}(x,z) = \int_a^b \ldots \int_a^b k(x,y_1)k(y_1,y_2)\ldots k(y_{n-1},z)\, dy_1\, dy_2\, \ldots\, dy_{n-1}. \tag{28}$$

LLamemos $S_n(x) = \sum_{m=0}^n \lambda^m u_{(m)}(x)$ a la suma parcial, que converge a la solución de la ecuación integral de Fredholm. Ahora vamos a estimar la norma de S_n. Usando la desigualdad triangular tenemos,

$$||S_n|| \leq ||\phi|| + \sum_{m=1}^{n} |\lambda|^m ||u_{(m)}||. \tag{29}$$

Para estimar la norma de $u_{(m)}$ podemos usar la relación de recurrencia (23) y la desigualdad de Schwarz. Usando la desigualdad de Schwarz, tenemos

$$\left[\int_a^b k(x,y) u_{(m-1)}(y)\, dy\right]^2 \leq \left(\int_a^b k(x,y)^2\, dy\right)\left(\int_a^b u_{(m-1)}^2(y)\, dy\right) \tag{30}$$

Integrando esta última ecuación en $x \in (a,b)$, usando la definición de la relación de recurrencia (23), obtenemos

$$||u_{(m)}||^2 \leq \left[\int_a^b \int_a^b k(x,y)^2\, dx\, dy\right] ||u_{(m-1)}||^2. \tag{31}$$

Conviene ahora definir

$$K = \sqrt{\int_a^b \int_a^b k(x,y)^2\, dx\, dy}. \tag{32}$$

En términos de K, a partir de (31) se obtiene la siguiente relación de recurrencia para las normas de las iteraciones sucesivas $u_{(n)}$:

$$||u_{(0)}|| = ||\phi||, \tag{33}$$

$$||u_{(m)}|| \leq K||u_{(m-1)}||, \qquad m \geq 1. \tag{34}$$

Iterando (34) obtenemos

$$||u_{(m)}|| \leq K^m ||\phi||. \tag{35}$$

Reemplazando esta última estimación en (29) obtenemos finalmente,

$$||S_n|| \leq \left(\sum_{m=0}^{n} |\lambda|^m K^m \right) ||\phi|| \leq \frac{1}{1-|\lambda|K} ||\phi||, \tag{36}$$

para valores de λ tales que

$$|\lambda| K < 1.$$

Así pués, las sumas parciales S_n convergen para valores suficientemente pequeños de λ, i.e., para valores λ tales que

$$|\lambda| < \frac{1}{K}. \tag{37}$$

Comentario: La constante K se conoce como la *norma de Hilbert–Schmidt* del operador integral T de nucleo k.

Propiedades Espectrales de Operadores Integrales

Consideremos el operador integral

$$T(u)(x) \equiv \lambda \int_a^b k(x,y)u(y)\,dy, \tag{38}$$

de *núcleo* $k(x,y)$. Llamemos K a la norma de Hilbert–Schmidt de T (supongamos que $K < \infty$). Entonces, el operador T mapea funciones de cuadrado integrable (en (a,b)) en funciones de cuadrado integrable. De hecho, tenemos,

$$||Tu|| \leq K||u||.$$

Si definimos el producto interno usual en (a,b), entonces, si el núcleo k es simétrico (i.e., si $k(x,y) = k(y,x)$) entonces el operador T es autoadjunto, en el sentido que

$$(u, Tv) = (Tu, v).$$

(Aquí estoy suponiendo núcleos y productos internos reales; si consideramos funciones complejas, tenemos que exigir que el núcleo satisfaga $k(x,y) = \overline{k(y,x)}$ para que el operador T sea autoadjunto).

Consideremos el *problema espectral*

$$T(u_i) = \frac{1}{\lambda_i} u_i \tag{39}$$

para el operador integral T. Aquí, por uso habitual en Teoría de Ecuaciones Integrales, los autovalores se denotan por $1/\lambda_i$.

Los resultados principales concernientes al problema espectral (39) se pueden resumir en el teorema siguiente:

Teorema 1 (Propiedades Espectrales del Operador T)**.** *i) Existe una sucesión de valores propios,* $\lambda_i > 0$.
ii) Las correspondientes funciones propias son ortogonales.
iii) Cada λ_i *tiene degeneración finita.*
iv) El único posible punto de acumulación de la secuencia $\{\lambda_i\}$ *es infinito.*
v)

$$\sum_i \frac{1}{\lambda_i^2} = \int_a^b \int_a^b k(x,y)^2\, dx\, dy = K^2.$$

Como hemos visto, es fácil demostrar la existencia de un autovalor y de una autofunción cuando el núcleo del operador T es simple (i.e., es de la forma $k(x, y = s(x)s(y))$. También es relativamente fácil hacerlo cuando el núcleo es una suma finita de núcleos simples, i.e., cuando es de la forma $k(x,y) = \sum_{m=0}^n s_m(x)s_m(y)$. En este último caso el problema espectral del operador integral se reduce al problema espectral de una matriz simétrica de $n \times n$. Si el núcleo $k(x,y)$ es una función continua en un intervalo (a,b) finito, por el Teorema de Weierstrass se puede aproximar por suma de núcleos simples. Entonces uno puede estudiar el espectro de los operadores integrales asociados a estos núcleos aproximados. Esto no lo vamos a hacer aquí. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, R. Courant, D. Hilbert, **Methods of Mathematical Physics, vol. I**, Interscience Publishers, Inc., NY, 1953, Chapter III, págs. 112–162. Aquí supodré que el operador T tiene una secuencia numerable de autovalores λ_i, y llamaremos u_i a las correspondienes autofunciones (que son ortonormales, pues T es autoadjunto).

Consideremos la siguiente desigualdad,

$$0 \leq I \equiv \int_a^b \int_a^b \left(k(x,y) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} u_i(x)u_i(y) \right)^2 dx\, dy. \tag{40}$$

Desarrollando el cuadrado tenemos,

$$I = K^2 - 2\sum_{i=1}^n \int_a^b \int_a^b k(x,y)\frac{1}{\lambda_i}u_i(x)u_i(y)\, dx\, dy + \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\lambda_i\lambda_j} \int_a^b \int_a^b u_i(x)u_i(y)u_j(x)u_j(y)\, dx\, dy. \tag{41}$$

Usando la ortonormalidad de las funciones u_i y el hecho que son propias de T con valor propio $1/\lambda_i$, a partir de (41) obtenemos

$$I = K^2 - 2\sum_{i=1}^n \int_a^b \frac{1}{\lambda_i^2} u_i(x)^2\, dx + \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\lambda_i\lambda_j}\delta_{i,j} \int_a^b u_i(y)u_j(y)\, dx\, dy. \tag{42}$$

De donde finalmente obtenemos,

$$0 \leq K^2 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2}, \tag{43}$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2} \leq K^2, \tag{44}$$

que es la *desigualdad de Bessel* para operadores integrales.

La desigualdad de Bessel vale para todo n. Si hay infinitos autovalores, tomando el límite $n \to \infty$ tenemos

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\lambda_i^2} \leq K^2, \tag{45}$$

De hecho, se puede demostrar que si se consideran todos los autovalores de T, se tiene la igualdad en (45).

De (45) observamos que si el operador interal T tiene norma de Hilbert–Schmidt finita (i.e., $K < \infty$) entonces, los λ_i solo pueden tener degeneración finita, y solo se pueden acumular en infinito.

Si los u_i forman *base* de las funciones de cuadrado intregrable en el intervalo (a, b), se tiene la siguiente identidad para el núcleo $k(x, y)$:

$$k(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(x)u_i(y)}{\lambda_i}. \tag{46}$$

La representación (46) para el núcleo k se conoce como *fórmula de Mercer.*

Para demostrar la fórmula de Mercer, asumiendo que las autofunciones u_i forman base, podemos proceder como sigue: consideramos $k(x, y)$ como una función de y (que depende del "parámetro" x), y expandámosla en términos de las funciones base u_i. Entonces,

$$k(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(y), \tag{47}$$

y dada la ortogonalidad de los u_i, los coeficientes están dados por

$$c_i = \int_a^b k(x,y)u_i(y)\,dy = \frac{1}{\lambda_i}u_i(x). \tag{48}$$

La primera igualdad en (48) sigue del hecho que los u_i son ortonormales (dice que los coeficientes c_i son la proyección ortogonal de $k(x, y)$ a lo largo de u_i) en tanto que la segunda igualdad sigue del hecho que los u_i son propios de T con valor propio $1/\lambda_i$. Reemplazando (48) en (47) obtenemos (46).

Una aplicación a funciones de Green

Consideremos el operador de Sturm–Liouville

$$Lu = -\frac{d^2u}{dx^2} \tag{49}$$

que actúa sobre funciones $u \in C^2(0, 1)$, que satisfacen las condiciones de borde $u(0) = u(1) = 0$. Como hemos visto en la clase anterior, el operador L se puede invertir, y su inverso se puede escribir como un operador integral. Así, si consideramos el problema

$$Lu = f, \tag{50}$$

en que f es una función dada, y u satisface $u(0) = u(1) = 0$, podemos resolver para u como

$$u(x) = L^{-1}(f)(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y)\,dy. \tag{51}$$

Así, el inverso L^{-1} se puede escribir como un operador integral. El núcleo del inverso de un operador diferencial se conoce típicamente como *función de Green.* Para el operador L en cuestión (dado por (49)) la función de Green (ver la clase anterior) está dada por

$$G(x,y) = x(1-y), \qquad \text{para } 0 \le x \le y, \tag{52}$$

$$G(x,y) = y(1-x), \qquad \text{para } y \le x \le 1. \tag{53}$$

Por otra parte las funciones propias de L satisfacen

$$Lu_n = \lambda_n u_n. \tag{54}$$

Debidamente normalizadas están dadas por

$$u_n(x) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(n\pi\, x), \tag{55}$$

en tanto que los autovalores están dados por

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \tag{56}$$

para $n = 1, 2, \ldots$. Invirtiendo (54), usando la función de Green, vemos que

$$\frac{1}{\lambda_n} u_n(x) = \int_0^1 G(x,y) u_n(y)\, dy, \tag{57}$$

en que $G(x,y)$ está dado por (53). Usando (53, 55, 56) en la fórmula de Mercer (46) obtenemos

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n\pi)^2} \mathrm{sen}(n\pi x) \mathrm{sen}(n\pi y) = \tag{58}$$

$$= x(1-y) \qquad \text{si } 0 \leq x \leq y, \tag{59}$$

$$= y(1-x) \qquad \text{si } y \leq x \leq 1. \tag{60}$$

Por otra parte, usando la igualdad de Bessel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \int_0^1 \int_0^1 G(x,y)^2\, dx\, dy,$$

obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Comentario: Para hacer la integral doble de $G(x,y)^2$ usamos la simetría de G (i.e., $G(x,y) = G(y,x)$). Así,

$$I \equiv \textstyle\int_0^1 \int_0^1 G(x,y)^2\, dx\, dy = 2 \int_0^1 \int_0^x G(x,y)^2\, dx\, dy = \tag{61}$$

$$= 2 \textstyle\int_0^1 \int_0^x y^2 (1-x)^2\, dy\, dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x^3 (1-x)^2\, dx = \frac{1}{90}. \tag{62}$$

REFERENCIAS:

[1] F.G. Tricomi, **Integral Equations**, Dover Publications, Inc., NY, 1985.

Notas bibliográficas: