CLASE #5: **EL TEOREMA DE WEIERSTRASS.**

Introducción

En esta clase discutiremos el Teorema de Weierstrass sobre la aproximación de funciones continuas reales definidas en un intervalo cerrado y acotado, por medio de polinomios.

—————-+—————-

Consideremos el espacio vectorial de funciones continuas reales definidas sobre el intervalo cerrado y acotado, $[a, b]$, el que denotaremos por $C([a, b])$. En 1885, Karl Weierstrass (1815-1897) demostró que toda función, $f \in C([a, b])$ se puede aproximar por polinomios, más precisamente

Teorema 1 (Weierstrass, 1885)**.** *Dado $\epsilon > 0$, existe $n(\epsilon)$ y un polinomio p_n tal que*

$$|f(x) - p_n(x)| < \epsilon, \tag{1}$$

para todo $x \in [a, b]$.

En esta clase demostraremos este Teorema, siguiendo la adaptación de la demostración de S. Bernstein (ver [1]). Esta demostración es constructiva, en el sentido que dada una función continua f, tenemos una familia explícita de polinomios que la aproximan. Estos polinomios se conocen como *polinomios de Bernstein.* Para simplificar los cálculos, solo consideraremos funciones definidas sobre el intervalo $[0, 1]$ (siempre se puede llevar un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ al intervalo $[0, 1]$ mediante una traslación y un escalamiento). Consideremos entonces $f \in C([0, 1])$, y definamos los polinomios

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}. \tag{2}$$

Nótese que cada uno de los términos de la suma en (2) es un polinomio en x, de grado n, de modo que $B_n(f, x)$ es un polinomio de grado n. En un momento vamos a demostrar que si n es suficientemente grande $B_n(f, x)$ es una buena aproximación de f, pero antes, como *precalentamiento* calcularemos los polinomios asociados a algunas funciones simples.

Primero calculemos $B_n(1, x)$, i.e., el polinomio asociado a la función constante 1. Para hacerlo, usaremos el Teorema del Binomio, i.e.,

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{3}$$

Eligiendo $y = 1 - x$ en (3), obtenemos

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

y si comparamos esta expresión con (2) en el caso en que $f = 1$, vemos de inmediato que

$$B_n(1, x) = 1. \tag{4}$$

Ahora, si derivamos (3) con respecto a x y multiplicamos el resultado por x obtenemos,

$$nx(x + y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k y^{n-k}, \tag{5}$$

que podemos reescribir (dividiendo por n y eligiendo $y = 1 - x$ como antes), como

$$x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k},$$

y, comparando con (2) vemos que

$$B_n(x,x) = x. \tag{6}$$

Vamos a repetir el procedimiento anterior una vez más. Partimos ahora de (5), derivamos nuevamente con respecto a x y multiplicamos el resultado por x y obtenemos

$$n\,x\,(x+y)^{n-1} + n(n-1)\,x^2\,(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^k y^{n-k}. \tag{7}$$

Tal como antes, elegimos $y = 1 - x$, y, esta vez, dividimos por n^2, para obtener

$$\frac{x}{n} + (n-1)\frac{x^2}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k},$$

y, comparando con (2) vemos que

$$B_n(x^2,x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}. \tag{8}$$

Esta vez, $B_n(x^2,x)$ no coincide con x^2. Sin embargo el *error* (i.e., la diferencia entre la función x^2 y el polinomio $B_n(x^2,x)$, que está dado por $x(1-x)/n$ es menor o igual a $1/(4n)$ en todo el intervalo $[0,1]$. Eligiendo n suficientemente grande, este error se puede hacer tan chico como uno desee.

Después de este *precalentamiento* podemos ir a la demostración del Teorema de Weierstrass. Vamos a utilizar las siguientes dos propiedades de las funciones continuas definidas sobre un intervalo cerrado y acotado:

i) Toda función continua sobre un intervalo cerrado y acotado es acotada (de hecho toda función continua sobre un intervalo cerrado y acotado alcanza su máximo y su mínimo en dicho intervalo), así pues, podemos asumir que existe una cota M, tal que

$$|f(x)| \le M, \tag{9}$$

para todo $x \in [0,1]$.

ii) Toda función continua sobre un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua, i.e., Para todo $\epsilon > 0$, existe δ (que sólo depende de ϵ) tal que

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon, \qquad \text{si } |x-y| < \delta. \tag{10}$$

Teniendo en cuenta la identidad,

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

y la definición (2) de los $B_n(f,x)$ podemos escribir el *error* (i.e., la diferencia entre la función f y el polinomio $B_n(f,x)$) como

$$B_n(f,x) - f(x)\cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f(\frac{k}{n}) - f(x) \right] x^k (1-x)^{n-k}, \tag{11}$$

Pero el módulo de una suma es menor o igual que la suma de los módulos de los sumandos, por lo tanto, a partir de (11) obtenemos,

$$|B_n(f,x) - f(x)| \le \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| x^k (1-x)^{n-k}. \tag{12}$$

Consideremos ahora un punto x arrbitrario, pero fijo, en el intervalo $[0,1]$. Nótese que cuando k varía entre 0 y n, la cantidad k/n varía entre 0 y 1. Si n es suficientemente grande k/n puede aproximarse bastante a x, para algunos valores de k. Separemos la suma en el lado derecho de (12) en dos partes, de acuerdo a la cercanía de k/n a x. Consideraremos entonces dos tipos de valores de k en $[0,n]$: los k *cercanos*, que satisfacen

$$|\frac{k}{n} - x| < \delta,$$

en que δ es el ancho de la ventana asociada a la ecuación (10), y los k *lejanos*, que satisfacen,

$$|\frac{k}{n} - x| \ge \delta.$$

Para los k *cercanos* tenemos por (10) que $|f(x) - f(k/n)| < \epsilon$, en tanto que para los k *lejanos* solo podemos afirmar que

$$|f(x) - f(\frac{k}{n})| < |f(x)| + |f(\frac{k}{n})| < 2M,$$

usando el hecho que f es acotada. Haciendo pues la descomposición, y usando estas dos últimas desigualdades en (12) obtenemos,

$$|B_n(f,x) - f(x)| \le \sum_{|(k/n)-x|<\delta} \binom{n}{k} \epsilon x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{|(k/n)-x|\ge\delta} \binom{n}{k} 2\,M x^k (1-x)^{n-k}. \tag{13}$$

Podemos mayorar la primera suma extendiendola a todos los valores de $1 \le k \le n$. En tanto que en la segunda suma usamos

$$1 \le \frac{(x-(k/n))^2}{\delta^2},$$

para escribir,

$$|B_n(f,x) - f(x)| \le \epsilon + 2\,M \sum_{|(k/n)-x|\ge\delta} \binom{n}{k} \frac{(x-(k/n))^2}{\delta^2} (x^k (1-x)^{n-k}. \tag{14}$$

y luego mayoramos la suma extendiéndola a todo $1 \le k \le n$. Así obtenemos,

$$\begin{aligned} |B_n(f,x) - f(x)| \le \quad & \epsilon + \tfrac{2\,M}{\delta^2} \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^2 - 2x\frac{k}{n} + (\frac{k}{n})^2\right) x^k (1-x)^{n-k} \\ & = \epsilon + \tfrac{2M}{\delta^2} \left(x^2 - 2xB_n(x,x) + B_n(x^2,x)\right), \end{aligned} \tag{15}$$

en que hemos usado (2) para reemplazar las tres sumas distintas que aparecen en (15) en términos de $B_n(f,x)$. Finalmente, usando los cálculos que hicimos en el *precalentamiento* tenemos $B_n(x,x) = x$ y $B_n(x^2,x) = x^2 + x(1-x)/n$, y reemplazando en (15) tenemos

$$|B_n(f,x) - f(x)| \le \epsilon + \frac{2\,M}{\delta^2\,n} x(1-x) \le \epsilon + \frac{M}{2\delta^2\,n} < 2\epsilon, \tag{16}$$

si elegimos $n \ge M/(2\delta^2\epsilon)$, lo cual concluye la demostración del Teorema de Weierstrass.

REFERENCIAS:

[1] H. Hochstadt, **The Functions of Mathematical Physics**, Dover Pubs., NY, 1986.

Notas bibliográficas: El artículo original de Weierstrass en que demuestra la densidad de los polinomios algebraicos en el espacio de funciones reales continuas definidas en un intervalo cerrado y acotado está publicado en [K. Weierstrass, *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen*, Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin, pp. 633–639, & 789–805, 1885]. La demostración del Teorema de Weierstrass que presentamos en esta clase está tomada del libro de Hochstadt y es una adaptación de la demostración original de S. Bernstein, en la que introduce lo que hoy conocemos como *polinomios de Bernstein.* La demostración original de Bernstein apareció en [S. N. Bernstein, *Démonstration du Théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des Probabilités*, Comm. Soc. Math. Kharkov **13**, 1-2 (1912/13)]. Los artículos de Bernstein y Weierstrass están disponibles en la página Web *History of Approximation Theory (HAT)* del Technion: http;//www.math.technion.ac.il/hat/papers.html. La técnica de Bernstein para demostrar el Teorema de Weierstrass es análoga a la demostración de varios teoremas sobre la ley de los grandes números en probabilidades. Ver por ejemplo el capítulo 1 del libro de Leo Breiman, *Probability*, Classics in Applied Mathematics **7**, SIAM, Philadelhia, 1992. Una demostración levemente diferente a la versión de H. Hochstadt que he expuesto en esta clase se encuentra en el libro de G. G. Lorentz, **Bernstein Polynomials**, AMS, Providence, 1986, el cual está dedicado a discutir todas las propiedades y aplicaciones de los polinomios de Bernstein (ver Teorema 1.1.1, en las páginas 5 y 6 de dicho libro que se puede consultar en línea en Google Books).

©Rafael Benguria D., 2012