CLASE #6: **METODO DE CUADRATURA DE GAUSS.**

Introducción

En esta clase estudiaremos una aplicación de polinomios ortogonales al cálculo de integrales definidas.

El *método de cuadratura de Gauss* es un excelente método numérico para evaluar integrales definidas de funciones, por medio de sumatorias simples y fáciles de implementar. Por otra parte, es una aplicación bastante interesante de los polinomios ortogonales.

Antes de ver el método de cuadratura de Gauss propiamente tal necesitamos introducir la *Interpolación de Lagrange:* Consideremos una función continua definida en un intervalo (a, b), y un polinomio cualquiera ϕ_n de grado n, con n raíces simples en el intervalo (a, b). El *método de interpolación de Lagrange* consiste en encontrar un polinomio de grado $n-1$ que coincida con la función $f(x)$ dada, precisamente en los ceros de ϕ_n. Este polinomio de interpolación está dado explícitamente por

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{n,i}) \frac{\phi(x)}{\phi'(x_{n,i})(x - x_{n,i})}, \tag{1}$$

en que la *abcisa* $x_{n,i}$ es el cero i–ésimo de ϕ_n.

Nótese que cada uno de los sumandos en (1) es un polinomio de grado $n-1$, pues cada uno de los factores, $\phi(x)_n/(x - x_{n,i})$ es un polinomio de grado $n-1$ dado que $x_{n,i}$ es precisamente una raíz de $\phi_n(x)$. Por otra parte, tenemos ya sea,

$$\lim_{x \to x_{n,k}} \frac{\phi_n(x)}{\phi_n'(x_{n,i})(x - x_{n,i})} = 0, \tag{2}$$

si $k \neq i$, ó

$$\lim_{x \to x_{n,k}} \frac{\phi_n(x)}{\phi_n'(x_{n,k})(x - x_{n,k})} = 1, \tag{3}$$

donde hemos usado l'Hôpital para evaluar este último límite.

Consideremos el espacio de funciones $L^2([a, b], w(x)\,dx)$, i.e., funciones reales de cuadrado integrable en el intervalo $[a, b]$ con respecto a la función de peso dada $w(x) > 0$. Llamemos $\{\phi_n\}$, a la familia de polinomios ortogonales (construidos a partir de las potencias 1, x, x^2, ..., usando el método de Gramm–Schmidt con el producto interno usual, i.e., $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx$). Hemos visto más arriba que el polinomio ϕ_n (de grado n) tiene precisamente n ceros simples en el intervalo (a, b). Llamemos $x_{n,i}$, $i = 1, \ldots, n$ a estos ceros.

Consideremos ahora una función $f(x)$ que sea un polinomio cualquiera (pero fijo) de grado $2n - 1$. Llamemos $F(x)$ a la función que interpola a $f(x)$ a través del polinomio ϕ_n (i.e., la función definida a partir de $f(x)$ por (1)).

Llamemos

$$r(x) \equiv \frac{f(x) - F(x)}{\phi_n(x)}. \tag{4}$$

Notemos las siguientes propiedades de $r(x)$ así definida: i) Como la función de interpolación, $F(x)$, coincide con la función original $f(x)$ en cada uno de los ceros del polinomio $\phi_n(x)$ usado en la interpolación, el cuociente $r(x)$ es continuo en el intervalo $[a,b]$ (los ceros del denominador se cancelan con los del numerador); ii) Debido a lo anterior, y como $f(x)$ es un polinomio de grado $2n-1$, $F(x)$ de grado $n-1$ y $\phi_n(x)$ de grado n, se puede observar de inmediato que $r(x)$ es un polinomio de grado $(2n-1)-n = n-1$.

Ahora, de (4) tenemos,

$$f(x) = F(x) + r(x)\phi_n(x). \tag{5}$$

Si multiplicamos (5) por el peso $w(x)$ e integramos en (a,b), obtenemos de inmediato que

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx = \int_a^b F(x)w(x)\,dx. \tag{6}$$

Para obtener (6) hemos usado que $\int_a^b r(x)\phi_n(x)w(x)\,dx = 0$, que sigue del hecho que $r(x)$ es un polinomio de grado $n-1$, de modo que se puede expresar como una combinación lineal de ϕ_0, ϕ_1, $\dots$, ϕ_{n-1} todos los cuales son ortogonales a ϕ_n.

Finalmente, reemplazando la expresión de $F(x)$ dada por (1) en (6), e intercambiando la suma por la integral, obtenemos

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{n,i} f(x_{n,i}), \tag{7}$$

en que los *pesos* quedan dados por

$$\lambda_{n,i} = \int_a^b \frac{\phi(x)}{\phi'(x_{n,i})(x - x_{n,i})}\,dx. \tag{8}$$

Ejemplo 1: Usemos el método de cuadratura de Gauss para evaluar la siguiente integral:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{3+x}. \tag{9}$$

La integral anterior es muy simple de evaluar en forma exacta. De hecho tenemos,

$$I = \log(3+x)\,\Big|_{-1}^{1} = \log 2 \approx 0,6930\dots \tag{10}$$

Ahora usaremos el método de cuadratura de Gauss para estimar I. Nótese que la integral en cuestión está hecha sobre el intervalo $(-1,1)$, de modo que la podemos pensar de la forma

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,w(x)\,dx,$$

en que $f(x) = 1/(3+x)$ y el peso $w(x) = 1$. Los polinomios apropiados son por lo tanto los polinomios de Legendre. Usemos entonces el Método de Cuadratura de Gauss con el polinomio (de Legendre) de segundo grado

$$\phi_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

Nótemos que, tal como se espera, ϕ_2 tiene exactamente dos ceros simples en el intervalo $(-1,1)$, dados por

$$x_{2,1} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad y \qquad x_{2,2} = +\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

En cuanto a los *pesos* correspondientes, tenemos,

$$\lambda_{2,1} = \int_{-1}^{1} \frac{3x^2-1}{(x-x_{2,1})6x_{2,1}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{3}\int_{-1}^{1}(x + \frac{\sqrt{3}}{3})\,dx = 1. \tag{11}$$

Análogamente se puede encontrar $\lambda_{2,2} = 1$. Antes de continuar, notemos que si usamos el método de cuadratura de Gauss escogiendo ϕ_2, sólo obtendríamos un resultado exacto si la función f fuese un polinomio de grado $2n - 1$ (i.e., 3 en este ejemplo). En nuestro caso la función $f(x) = 1/(3 + x)$ no es ni siquiera un polinomio, así es que el método de cuadratura sólo dará un resultado aproximado. Veremos que el valor aproximado es bastante satisfactorio. (En general se puede estimar el error). Luego de este comentario, usando cuadratura, tenemos la siguiente estimación,

(12)
$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3+x} \approx \lambda_{2,1} f(x_{2,1}) + \lambda_{2,2} f(x_{2,2}) = f(\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{-\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{3+\sqrt{3}/3} + \frac{1}{3-\sqrt{3}/3} = \frac{9}{13} \approx 0,6923\ldots$$

resultado que difiere en un uno por mil del resultado exacto.

Ejemplo 2: Usemos ahora el método de cuadratura de Gauss para evaluar la siguiente integral:

$$J = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{3+x^2}. \tag{13}$$

La integral anterior también es muy simple de evaluar en forma exacta. De hecho tenemos,

$$J = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0.6046 \tag{14}$$

Ahora usaremos el método de cuadratura de Gauss para estimar J. Nótese que la integral en cuestión está hecha sobre el intervalo $(-1, 1)$, de modo que la podemos pensar de la forma

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\, w(x)\, dx,$$

en que $f(x) = 1/(3 + x^2)$ y el peso $w(x) = 1$. Los polinomios apropiados son por lo tanto los polinomios de Legendre. Usemos entonces el Método de Cuadratura de Gauss, pero esta vez con el polinomio (de Legendre) de tercer grado, cuyos *pesos* y *abcisas* están dados por

$$\lambda_{3,1} = \frac{5}{9}, \qquad x_{3,1} = -\frac{\sqrt{15}}{5},$$

$$\lambda_{3,2} = \frac{8}{9}, \qquad x_{3,2} = 0,$$

y

$$\lambda_{3,3} = \frac{5}{9}, \qquad x_{3,1} = +\frac{\sqrt{15}}{5},$$

Por lo tanto, usando cuadratura, tenemos la siguiente estimación,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3+x^2} \approx \lambda_{3,1} f(x_{3,1}) + \lambda_{3,2} f(x_{3,2}) + \lambda_{3,3} f(x_{3,3}) = \frac{8}{27} + \frac{25}{81} = \frac{49}{81} \approx 0,6049\ldots \tag{15}$$

resultado que difiere en menos de un uno por mil del resultado exacto (14).

REFERENCIAS:

[1] H. Hochstadt, **The Functions of Mathematical Physics**, Dover Pubs., NY, 1986.
[2] Ver, http://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_quadrature, donde pueden encontrar referencias a tablas de ceros (abcisas) y pesos para distintos tipos de cuadraturas.

Notas históricas: El artículo original de Gauss sobre el método de cuadratura se puede ver en sus obras completas [Gauss, C.F., *Methodus nova integralium valores per aprox. inveniendi*, en **Werke**, **Vol. 3**, pp. 163].