CLASE #7: **LOS POLINOMIOS DE JACOBI, LEGENDRE Y TCHEBYCHEFF:**

Introducción

En esta clase introduciremos la familia de polinomios de Jacobi, que incluye a los polinomios de Legendre y de Tchebycheff. Los polinomios de Jacobi constituyen una familia de polinomios ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$ con respecto al peso $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, en que $\alpha, \beta > -1$. Para introducir esta familia de polinomios ortogonales usaremos la formula de Rodrigues. Al fin de esta clase también introduciremos, de un modo similar, los polinomios de Laguerre y los polinomios de Hermite.

Antes de iniciar el estudio de estas tres familias de polinomios ortogonales, demostraremos tres propiedades generales de los polinomios ortogonales (con respecto al peso $w(x) > 0$, en el intervalo (a, b)) obtenidos a partir de la familia $1, x, x^2 \dots$ mediante el procedimiento de Gram–Schmidt.

Propiedad 1: Si llamamos $\phi_n(x)$ al enésimo polinomio ortogonal obtenido de esta manera, entonces, ϕ_n tiene exactamente n raíces reales simples en (a, b).

Demostración: Supongamos, por contradicción que $\phi_n(x)$ tiene sólo $k < n$ raíces reales en $[a, b]$, de multiplicidad impar (i.e., simples, o de multiplicidad 3, ó 5, etc. Llamemos, $x_1, \dots, x^k$ a estas raíces. Entonces, tendríamos que,

$$\phi_n(x)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k) > 0,$$

para todo $x \in [a, b]$ salvo en los puntos x_i en que este producto se anula. Entonces, por un lado tendríamos que

$$\int_a^b \phi_n(x)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k)\, w(x)\, dx > 0.$$

Pero, sabemos que x^j es ortogonal a $\phi_n(x)$ si $j < n$. De modo que $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k)$ es ortogonal a ϕ_n si $k < n$, y por lo tanto,

$$\int_a^b \phi_n(x)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k)\, w(x)\, dx = 0.$$

lo que es una contradicción. Por lo tamto ϕ_n tiene exactamente n raíces reales simples en $[a, b]$.

Propiedad 2: Si llamamos $\phi_n(x)$ al enésimo polinomio ortogonal obtenido de esta manera, entonces, y si llamamos $k_n \neq 0$ al coeficiente de la potencia x^n de $\phi_n(x)$ (i.e., $\phi_n(x) = k_n x^n + \dots$), entonces tenemos la siguiente relación de recurrencia de segundo orden:

$$\phi_{n+1} - (A_n x + B_n)\phi_n(x) = C_n \phi_{n-1}(x). \tag{1}$$

en que

$$A_n = \frac{k_{n+1}}{k_n}. \tag{2}$$

Demostración: Si definimos A_n como en (2) entonces, la combinación $\phi_{n+1}(x) - A_n\, x\phi_n(x)$ es de la forma $k_{n+1}x^{n+1} - k_n(k_{n+1}/k_n)x\, x^n + v_n(x) = v_n(x)$ en que v_n es un polinomio de grado n en x. Entonces podemos escribir

$$\phi_{n+1} - (A_n x)\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k \phi_k(x). \tag{3}$$

Tomemos el producto interno de (3) con $\phi_j(x)$, en que $0lj \leq n$. Desde luego ϕ_{n+1} es ortogonal a ϕ_j para todo $0 \leq j \leq n$, y, además, en el lado derecho el único término que sobrevive es el término con $k = j$ (también por ortogonalidad). De este modo, de (3) obtenemos,

$$\beta_j = -A_n(\phi_j, x\phi_n)_w = -A_n(x\phi_j, \phi_n)_w.$$

Como ϕ_j es un polinomio de grado j, $x\phi_j$ es un polinomio de grado $j+1$, y va a ser ortogonal a ϕ_n para toso $j+1 < n$. Así, $\beta_j = 0$ para todo $j = 0, 1, \ldots, n-2$, i.e., existen solo dos coeficientes que son distintos de cero: β_{n-1} al cual llamaremos B_n y β_n al cual llamaremos C_n. De este modo concluimos que

$$\phi_{n+1} - (A_n x)\phi_n(x) = B_n\phi_n(x) + C_n\phi_{n-1},$$

que es lo que queríamos demostrar. Dejamos como ejercicio al lector demostrar que $C_n = A_n/A_{n-1}$, para $n \geq 1$ y $C_0 = 0$.

Comentario: El recíproco de la propiedad 2 se conoce como el Teorema de Favard: *una sucesión de polinomios que satisfacen una relación de recurrencia de segundo orden como la dada por (3) es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto algún producto interno apropiado.* Ver: J. Favard, *Sur les polynomes de Tchebicheff*, C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 2052–2053 (1935). En realidad, el Teorema de Favard se conocía desde el tiempo de Stieljes, mucho antes del artículo de Favard.

Propiedad 3: *Propiedad de entrelazamiento***,** entre dos cero de ϕ_n siempre existe un cero de ϕ_{n+1}.

Demostración: Vamos a demostrar esta propiedad haciendo uso de la siguiente identidad (que se demuestra en el apéndice):

$$\frac{k_n}{k_{n+1}}\left[\phi_n(x)\phi'_{n+1}(x) - \phi'_n(x)\phi_{n+1}(x)\right] = \sum_{k=0}^{n} \phi_k^2(x) > 0. \tag{4}$$

Consideremos dos ceros consecutivos de $\phi_n(x)$ en el intervalo de definición (a, b), digamos $a < \alpha < \beta < b$. Como se trata dedos ceros consecutivos, y como (por la propiedad 1, los ceros son simples, tendremos que $\phi'(\alpha)$ es de distinto signo que $\phi'(\beta)$. Evaluando (4) en α y β respectivamente, tendremos que

$$-\phi'_n(\alpha)\phi_{n+1}(\alpha) > 0,$$

y,

$$-\phi'_n(\beta)\phi_{n+1}(\beta) > 0.$$

Como $\phi'(\alpha)$ y $\phi'(\beta)$ son de distinto signo, entonces también lo son, $\phi_{n+1}(\alpha)$ y $\phi_{n+1}(\beta)$. Pero, ϕ_{n+1} es una función continua (de hecho es un polinomio), y como $\phi_{n+1}(\alpha)$ y $\phi_{n+1}(\beta)$ son de distinto signo tiene que haber un cero en el intervalo (α, β), que era lo que se quería demostrar.

Consideremos el espacio de funciones reales de cuadrado integrable con respecto a un peso $w(x) > 0$ en el intervalo $[-1, 1]$: $L^2([-1, 1], w(x)\,dx)$, i.e., $f \in L^2([-1, 1], w(x)\,dx)$, si

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)\,w(x)\,dx < \infty \tag{5}$$

Como hemos visto en clases anteriores, podemos dotar a este espacio del producto interno

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)\,dx. \tag{6}$$

Usando el método de Gram–Schmidt podemos en principio construir, a partir de la secuencia de funciones $1, x, x^2, x^3, \ldots$ una familia de polinomios ortogonales con respecto a este producto interno, que denotaremos genericamente por $\{\phi_n(x)\}$. El método de Gram–Schmidt, aunque simple, es bastante tedioso en general. Veremos a continuación que para algunas funciones de peso $w(x)$ bien especiales podemos construir fácilmente la correspondiente familia de polinomios ortogonales, usando una manera constructiva que se debe a Olinde Rodrigues (1795-1851).

FORMULA DE RODRIGUES:

Dado el peso $w(x) > 0$, definamos las funciones

$$\phi_n(x) = \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^n \, w(x)\right] \tag{7}$$

Es relativamente simple, a partir de la ecuación (7) (que se conoce como *Fórmula de Rodrigues*) demostrar que las funciones $\phi_n(x)$ así obtenidas son ortogonales (con respecto al producto interno (6)) a las potencias x^k, para $k < n$.

En efecto,

$$(x^k, \phi^n) = \int_{-1}^{1} x^k \left(\frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^n \, w(x)\right] \right) w(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x^k \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^n \, w(x)\right] \, dx. \tag{8}$$

Dado que $k < n$, si integramos la última integral por parte k veces obtenemos

$$(x^k, \phi_n(x)) = \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \left[(1-x^2)^n w\right] \, dx = 0.$$

Los términos de borde (en ± 1) que se obtienen en cada integración por partes se anulan precisamente por presencia del factor $(1-x^2)^n$ en la fórmula de Rodrigues. Aunque las funciones $\phi_n(x)$, definidas por (7) son ortogonales a las potencias x^k, $k < n$, no es claro para nada que sean polinomios. De hecho solo para funciones de peso, $w(x)$, muy especiales las funciones definidas por (7) serán efectivamente polinomios de grado n. Para $n = 0$, se tiene de (7) que $\phi_0(x) = 1$, que es un polinomio de grado 0. Para $n = 1$, se tiene de (7) que

$$\phi_1(x) = -2\,x + (1-x^2)\frac{w'}{w}. \tag{9}$$

que en general no es un polinomio de grado 1. Exigiendo que efectivamente $\phi_1(x)$ sea un polinomio de grado 1 impone restricciones en $w(x)$. De hecho, imponiendo que $\phi_1(x) = Ax + B$ (i.e., que sea un polinomio genérico de grado 1), se obtiene a partir de (9) la siguiente eqcuación diferencial ordinaria para $w(x)$:

$$\frac{w'}{w} = \frac{1}{1-x^2}\left((A+2)x + B\right) = -\frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x}, \tag{10}$$

con $\alpha = -(2+A+B)/2$ y $\beta = (B-2-A)/2$. Integrando (10) obtenemos

$$w(x) = K(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \tag{11}$$

El valor de la constante K es irrelevante (salvo que tiene que ser positiva) y elegimos $K = 1$. Para la función de peso $w(x)$ dada por (11) no solo $\phi_1(x)$ es un polinomio de grado 1. De hecho, todos los $\phi_n(x)$ dados a través de la *fórmula de Rodrigues* (7) son polinomios, y $\phi_n(x)$ es un polinomio de grado n. En efecto, de (7), usando la expresión (11) tenemos,

$$\phi_n(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}. \tag{12}$$

Utilizando la regla de Leibniz (para la derivada enésima del producto de dos funciones), i.e.,

$$\frac{d^n}{dx^n}(f\,g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k f}{dx^k} \frac{d^{n-k} g}{dx^{n-k}} \tag{13}$$

en (12) obtenemos,

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[(1-x)^{-\alpha} \frac{d^k}{dx^k} (1-x)^{\alpha+n} \right] \left[(1+x)^{-\beta} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (1+x)^{\beta+n} \right]. \tag{14}$$

En la expresión anterior, el primer paréntesis es un polinomio de grado $n-k$ y el segundo paréntesis es un polinomio de grado k, por lo que cada uno de los sumandos es un polinomio de grado n, y por lo tanto $\phi_n(x)$ dado por (14) es, efectivamente, un polinomio de grado n. En resumen, la familia de polinomios definida a través de la fórmula de Rodrigues (7) con la función de peso $w(x)$ dada por (11) (con la restricción $\alpha, \beta > -1$ para asegurar que efectivamente los términos de borde se anulen al integrar por partes en (8)) es una familia de polinomios ortogonales en $[-1, 1]$ con respecto al producto interno $w(x)$. Esta familia se conoce como la familia de *Polinomios de Jacobi.* Tradicionalmente se introduce un factor de normalización para estos polinomios. Así, tenemos,

POLINOMIOS DE JACOBI:

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left((1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right), \tag{15}$$

con $\alpha, \beta > -1$. Dentro de la familia de polinomios de Jacobi hay dos subfamilias de polinomios ortogonlaes

que son muy útiles en física: i) Los *Polinomios de Legendre*, que corresponden al caso $\alpha = \beta = 0$, y ii) Los *Polinomios de Tchebycheff* que corresponden a $\alpha = \beta = -1/2$.

POLINOMIOS DE LEGENDRE

$$P^n_{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n, \tag{16}$$

Nota: El factor $(-1)^n/(2^n n!)$, en la fórmula de los Polinomios de Legendre se elige de modo que todos los Polinomios de Legendre están normalizado de modo que $P_n(+1) = 1$.

POLINOMIOS DE TCHEBYCHEFF

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} (1-x^2)^{+1/2} \frac{d^n}{dx^n} \left((1-x^2)^{n-(1/2)} \right), \tag{17}$$

LOS POLINOMIOS ORTOGONALES EN MAPLE: Todas estás familias de polinomios ortogonales están implementados en *Maple10* (y en otros softwares de manipulación matemática). En Maple10, basta usar el comando *with(orthopoly);* para cargar la librería de polinomios ortogonales. Una vez hecho esto, el Polinomio de Legendre de grado n, se puede invocar haciendo $P(n, x)$; el de Hermite de grado n se llama $H(n, x)$, el de Tchebycheff $T(n, x)$, etc.

Apéndice: "La formula de Christoffel–Darboux".

Una función que juega un papel importante en la teoría de polinomios ortogonales es el núcleo

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \phi_k(x)\phi_k(y) \tag{18}$$

Esta suma puede ser calculada en forma cerrada. El resultado, que se conoce como formula de Christoffel–Darboux (que fue publicada originalmente en el libro: G. Szegö, **Orthogonal Polynomials**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1939) está dada por:

$$K_n(x,y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \left[\frac{\phi_n(y)\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)\phi_{n+1}(y)}{x-y} \right]. \tag{19}$$

Demostraremos (19) por inducción, usando la relación de recurrencia (1). En el primer paso de la inducción, i.e., en el término $m = 0$, usamos que (por definición de los coeficientes k_n), y por el hecho que ϕ_0 es un polinomio de grado 0 y ϕ_1 es un polinomio de grado 1 tenemos que

$$\phi_0(x) = k_0,$$

y

$$\phi_1(x) = k_1 x + a,$$

en que a es una constante. Reemplazando estas expresiones en (19) verificamos de inmediato que esta ecuación se satisface en el caso $k = 0$. Supongamos que se satisface para el caso n, y basados en eso demostramos el caso $n+1$. Llamemos $D_n(x,y)$ al lado derecho de (19). Recordando que $A_n = k_{n+1}/k_n$, tenemos de la definición de D_n,

$$\begin{aligned} D_{n+1} - D_n = \quad & \tfrac{1}{A_{n+1}} \left[\tfrac{\phi_{n+1}(y)\phi_{n+2}(x) - \phi_{n+1}(x)\phi_{n+2}(y)}{x-y} \right] \\ & - \tfrac{1}{A_n} \left[\tfrac{\phi_n(y)\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)\phi_{n+1}(y)}{x-y} \right], \end{aligned} \tag{20}$$

y, reemplazando ϕ_{n+2} en términos de ϕ_{n+1} y ϕ_n, en (20) usando la relación de recurrencia (1), encontramos, que

$$D_{n+1} - D_n = \phi_{n+1}(y)\phi_{n+1}(x),$$

que es precisamente igual a la diferencia $K_{n+1}(x,y) - K_n(x,y)$, que era lo que queríamos demostrar.

A partir de (19), tomando el límite $y \to x$, y suando la regla de L'Hopital para evaluar el cuociente indeterminado en la suma del lado derecho obtenemos precisamnete la ecuación (4) que usamos más arriba para demostrar la propiedad de entrelazamiento de los ceros de polinomios ortogonales sucesivos.

El nombre de Christoffel–Darboux está tomado de las contribuciones originales: i) E. B. Christoffel, *Über die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben*, J. Reine Angew. Math. **55** (1858), 6182; y ii) G. Darboux, *Mémoire sur lapproximation des fonctions de trés-grands nombres, et sur une classe étendue de developpements en série, Liouville J. (3)* **4** *(1878), 556; 377416.*

REFERENCIAS:

[1] H. Hochstadt, **The Functions of Mathematical Physics**, Dover Pubs., NY, 1986.