CLASE #8: **LOS POLINOMIOS DE LAGUERRE Y HERMITE:**

Introducción

En esta clase introduciremos la familia de polinomios generalizados de Laguerre y los polinomios de Hermite, siguiendo un método análogo al usado en la clase anterior para introducir los polinomios de Jacobi.

—————-+—————-

Polinomios generalizados de Laguerre:

Consideremos el espacio de funciones reales de cuadrado integrables con respecto a un peso $w(x) > 0$ en el intervalo $(0, \infty)$: $L^2((0, \infty), w(x)\, dx)$, i.e., $f \in L^2((0, \infty), w(x)\, dx)$, si

$$\int_0^\infty f^2(x)\, w(x)\, dx < \infty \tag{1}$$

Como hemos visto en clases anteriores, podemos dotar a este espacio del producto interno

$$(f, g) = \int_0^\infty f(x) g(x) w(x)\, dx. \tag{2}$$

Usando el método de Gram–Schmidt podemos en principio construir, a partir de la secuencia de funciones $1, x, x^2, x^3, \dots$ una familia de polinomios ortogonales con respecto a este producto interno, que denotaremos genericamente por $\{\phi_n(x)\}$. El método de Gram–Schmidt, aunque simple, es bastante tedioso en general. Veremos a continuación que para algunas funciones de peso $w(x)$ bien especiales podemos construir fácilmente la correspondiente familia de polinomios ortogonales, usando una manera constructiva que se debe a Olinde Rodrigues.

FORMULA DE RODRIGUES:

Dado el peso $w(x) > 0$, definamos las funciones

$$\phi_n(x) = \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left[x^n\, w(x)\right] \tag{3}$$

Es relativamente simple, a partir de la ecuación (3) (que se conoce como *Fórmula de Rodrigues*) demostrar que las funciones $\phi_n(x)$ así obtenidas son ortogonales (con respecto al producto interno (2) a las potencias x^k, para $k < n$.

En efecto,

$$(x^k, \phi^n) = \int_0^\infty x^k \left(\frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left[x^n\, w(x)\right] \right) w(x)\, dx = \int_0^\infty x^k \frac{d^n}{dx^n} \left[x^n\, w(x)\right]\, dx. \tag{4}$$

Dado que $k < n$, si integramos la última integral por parte k veces obtenemos

$$(x^k, \phi_n(x)) = \int_0^\infty \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \left[x^n w(x)\right]\, dx = 0. \tag{5}$$

Al integrar por partes en (4) surgen dos tipos de términos de borde. Los términos de borde en $x = 0$ se anulan por la presencia del factor x^n. Por otra parte, suponemos que la función de peso $w(x)$ va rapidamente a cero en infinito, y por lo tanto los términos de borde en infinito se anulan.

Aunque las funciones $\phi_n(x)$, definidas por (3) son ortogonales a las potencias x^k, $k < n$, no es claro para nada que sean polinomios. De hecho solo para funciones de peso, $w(x)$, muy especiales las funciones definidas por (3) serán efectivamente polinomios de grado n.

Para $n = 0$, se tiene de (3) que $\phi_0(x) = 1$, que es un polinomio de grado 0. Para $n = 1$, se tiene de (3) que

$$\phi_1(x) = 1 + x\,\frac{w'}{w}. \tag{6}$$

Imponiendo que $\phi_1(x) = A + Bx$ (i.e., que sea un polinomio genérico de grado 1, se obtiene a partir de (6) la siguiente ecuación diferencial ordinaria para $w(x)$:

$$\frac{w'}{w} = B + \frac{A-1}{x}. \tag{7}$$

Integrando (7) obtenemos

$$w(x) = K x^{(A-1)} e^{Bx} \tag{8}$$

El valor de la constante K es irrelevante (salvo que tiene que ser positiva) y la elegimos $K = 1$. Por otra parte, debemos exigir que el peso se anule cuando $x \to \infty$ (para que se anulen los términos de borde en la integración por partes en (4). Por tal motivo, debemos exigir que $B < 0$. Por otra parte llamaremos $\alpha = A - 1$, y para asegurar la convergencia de las integrales por parte en (4) debemos tener que $\alpha > -1$. Así pues, la función de peso $w(x)$ que asegura que ϕ_1 es un polinomio de grado 1, está dada por

$$w(x) = x^{\alpha} e^{-x}. \tag{9}$$

Uno puede demostrar, tal como lo hicimos en la clase anterior para el caso de los polinomios de Jacobi, que las funciones ϕ_n que se obtienen de la *fórmula de Rodrigues* (3) con el peso dado por (9) son efectivamente polinomios de grado n, ortogonales con respecto al producto interno (2), polinomios que (salvo una constante de normalización) se conocen como *polinomios generalizados de Laguerre*.

Los *polinomios generalizados de Laguerre* están definidos como

$$L_{n,\alpha}(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^{x} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{\alpha+n} e^{-x}\right), \tag{10}$$

para $\alpha > -1$. Los *polinomios de Laguerre* L_n están dados por $L_{n,\alpha}$ con $\alpha = 0$, i.e., por la expresión

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^{x} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n} e^{-x}\right). \tag{11}$$

Los primeros polinomios de Laguerre están dados por

$$L_0(x) = 1, \qquad L_1(x) = 1 - x, \qquad L_2(x) = \frac{1}{2}(2 - 4x + x^2), \qquad L_3(x) = \frac{1}{6}(6 - 18x + 9x^2 - x^3).$$

MAPLE puede resultarles útil para calcular todo tipo de propiedades de los polinomios ortogonales. Para accesar los polinomios clásicos basta usar el comando "with(orthopoly)". En MAPLE, los polinomios de Legendre se llaman $P(n,x)$, los de Laguerre, $L(n,x)$, los de Hermite, $H(n,x)$, etc.

Finalmente, estudiaremos una familia de polinomios ortogonales en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Polinomios de Hermite:

Consideremos el espacio de funciones reales de cuadrado integrables con respecto a un peso $w(x) > 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$: $L^2((-\infty,\infty), w(x)\,dx)$, i.e., $f \in L^2((-\infty,\infty), w(x)\,dx)$, si

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, w(x)\, dx < \infty \tag{12}$$

Como hemos visto en clases anteriores, podemos dotar a este espacio del producto interno

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) w(x)\, dx. \tag{13}$$

Usando el método de Gramm–Schmidt podemos en principio construir, a partir de la secuencia de funciones $1, x, x^2, x^3, \ldots$ una familia de polinomios ortogonales con respecto a este producto interno, que denotaremos genericamente por $\{\phi_n(x)\}$. Tal como en el caso de los polinomios de Jacobi y de los generalizados de Laguerre, la manera más simple de obtener una expresión para estos polinomios ortogonales es a través de una fórmula de Rodrigues.

FORMULA DE RODRIGUES:

Dado el peso $w(x) > 0$, definamos esta vez las funciones

$$\phi_n(x) = \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} [w(x)] \tag{14}$$

Es relativamente simple, a partir de la ecuación (14) demostrar que las funciones $\phi_n(x)$ así obtenidas son ortogonales (con respecto al producto interno (13) a las potencias x^k, para $k < n$.

En efecto,

$$(x^k, \phi^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \left(\frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n}(w(x)) \right) w(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{d^n}{dx^n}(w(x))\, dx. \tag{15}$$

Dado que $k < n$, si integramos la última integral por parte k veces obtenemos

$$(x^k, \phi_n(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(w(x))\, dx = 0. \tag{16}$$

Al integrar por partes en (15) surgen, en principio, términos de borde en $\pm\infty$. Sin embargo, si suponemos que la función de peso $w(x)$ va rapidamente a cero en $\pm\infty$, estos términos de borde en infinito se anulan.

Aunque las funciones $\phi_n(x)$, definidas por (14) son ortogonales a las potencias x^k, $k < n$, no es claro para nada que sean polinomios. De hecho solo para funciones de peso, $w(x)$, muy especiales las funciones definidas por (14) serán efectivamente polinomios de grado n.

Para $n = 0$, se tiene de (14) que $\phi_0(x) = 1$, que es un polinomio de grado 0. Para $n = 1$, se tiene de (14) que

$$\phi_1(x) = \frac{w'}{w}. \tag{17}$$

Imponiendo que $\phi_1(x) = A + Bx$ (i.e., que sea un polinomio genérico de grado 1, se obtiene a partir de (6) la siguiente ecuación diferencial ordinaria para $w(x)$:

$$\frac{w'}{w} = A + B\, x. \tag{18}$$

Sin pérdida de generalidad, dado que estamos considerando funciones en el intervalo $(-\infty, \infty)$, podemos efectuar una traslación de coordenadas, de modo que $A + Bx$ sea simplemente Bx. En estas coordenadas, la ecuación (17) tiene la forma,

$$\frac{w'}{w} = Bx,$$

que intregrando nos conduce a la función de peso

$$w(x) = Ke^{Bx^2/2}.$$

Como necesitamos que la función de peso se anule en $\pm\infty$, necesariamente debemos tener $B < 0$. Mediante una dilatación de coordenadas siempre podemos asumir que $B = -1$. Además, como en los casos anteriores, elegimos $K = 1$. Así pues, la función de peso estará dada por

$$w(x) = e^{-x^2/2}. \tag{19}$$

Uno puede demostrar, tal como lo hicimos en la clase anterior para el caso de los polinomios de Jacobi, que las funciones ϕ_n que se obtienen de la *fórmula de Rodrigues* (14) con el peso dado por (19) son efectivamente polinomios de grado n, ortogonales con respecto al producto interno (13), polinomios que (salvo una constante de normalización) se conocen como *polinomios de Hermite*.

Los *polinomios de Hermite* están definidos como

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2/2} \right). \tag{20}$$

Los primeros polinomios de Hermitee están dados por

$$H_0(x) = 1, \qquad H_1(x) = x, \qquad H_2(x) = x^2 - 1, \qquad H_3(x) = x^3 - 3x.$$

REFERENCIAS:

[1] H. Hochstadt, **The Functions of Mathematical Physics**, Dover Pubs., NY, 1986.

Notas históricas: