CLASE #9: **POLINOMIOS ORTOGONALES (Continuación): ECUACION DIFERENCIAL DE LOS POLINOMIOS ORTOGONALES / FUNCIONES GENERATRICES.**

Introducción

En esta clase continuaremos nuestra exposición a los polinomios ortogonales. En primer lugar deduciremos la forma de la ecuación diferencial que satisfacen los polinomios de Jacobi. Luego discutiremos las funciones generatrices, en particular, usaremos la función generatriz de los polinomios de Legendre para deducir algunas de las propiedades de esta familia de polinomios. En la próxima clase usaremos la Fórmula de Rodrigues y el Teorema de Cauchy de variable compleja para deducir la función generatriz de los polinomios de Hermite.

Todas las familias de polinomios ortogonales que hemos visto hasta ahora satisfacen ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, que pueden ser interpretadas como ecuaciones de valores y funciones propias. Son estas ecuaciones diferenciales las que aparecen en diversas aplicaciones de la física. Por ejemplo, la ecuación diferencial que satisfacen los polinomios de Hermite aparece en la solución del oscilador armónico en Mecánica Cuántica. A continuación revisaremos un método simple para deducir la ecuación que satisfacen los polinomios de Jacobi (que incluyen a los de Tchebycheff y de Legendre). Este método se puede usar en forma similar para deducir la ecuación que satisfacen las otras dos familias de polinomios ortogonales que hemos visto, i.e., Laguerre generalizado y Hermite.

Denotemos por ϕ_n al enésimo polinomio de Jacobi (que como hemos visto son la familia de polinomios ortogonales en el intervalo $(-1,1)$ con respecto al peso $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$.

Consideremos la expresión

$$\frac{d}{dx}\left(w(x)(1-x^2)\frac{d}{dx}(\phi_n(x))\right), \tag{1}$$

la que podemos pensar como el resultado de la acción del operador lineal $\mathcal{L}$ definido como

$$\mathcal{L} \equiv \frac{d}{dx}\left(w(x)(1-x^2)\frac{d}{dx}(\;)\right), \tag{2}$$

sobre $\phi_n(x)$.

Observemos primero que $\mathcal{L}(\phi_n)$ es igual a $w(x)$ veces un polinomio de grado n. En efecto, usando la función de peso $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ de los polinomios de Jacobi, y calculando explícitamente las derivadas que ocurren en (1) tenemos

$$\mathcal{L}(\phi_n(x)) = w(x)\left[(1-x^2)\phi_n'' + (\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x)\,\phi_n'\right]. \tag{3}$$

Podemos notar que el factor que aparece entre paréntesis [..] es un polinomio de grado n y por lo tanto puede ser expresado como una combinación de $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$, i.e.,

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)w(x)\frac{d\phi_n}{dx}\right) = w(x)\sum_{k=0}^{n} c_k\,\phi_k(x). \tag{4}$$

Si podemos demostrar que los coeficientes c_k son nulos para $0 \le k < n$, entonces (4) será una ecuación diferencial de segundo orden para ϕ_n. Para demostrar que, efectivamente los coeficientes c_k se anulan para $k < n$, multiplicamos la ecuación (4) por $\phi_k(x)$ (con $0 \le k \le n$), e integramos sobre el intervalo

$(-1,1)$. Por la ortogonalidad de los polinomios ϕ_k con respecto al producto interno con peso $w(x)$ en el intervalo $(-1,1)$, vemos que el lado derecho de (4) se convierte en

$$LD = c_k(\phi_k, \phi_k) \tag{5}$$

en tanto que el lado izquierdo se convierte en

$$LI = \int_{-1}^{1} \phi_k(x) \frac{d}{dx}\left((1-x^2)w(x)\frac{d\phi_n}{dx}\right) dx. \tag{6}$$

Integrando dos veces por parte la expresión anterior, obtenemos

$$LI = \int_{-1}^{1} \left[\frac{d}{dx}\left((1-x^2)w(x)\frac{d\phi_k}{dx}\right)\right] \phi_n(x)\, dx. \tag{7}$$

Nótese que los términos de borde se anulan por la presencia del factor $(1-x^2)$. Repitiendo el mismo argumento que nos condujo a la ecuación (4), podemos concluir que el término entre paréntesis $[\dots]$ en (7) es un polinomio de grado k, que puede por lo tanto escribirse como combinación lineal de $\phi_0, \dots, \phi_k$. Usando la ortogonalidad de los polinomios, vemos que si $k < n$, $LI = 0$. Como $LI = LD$, de aquí y de (5) concluimos que $c_k = 0$, para todo $k = 0, \dots, n-1$, que era lo que queríamos demostrar. Para concluir esta sección calcularemos el valor de c_n. De las ecuaciones (3) y (4), usando el hecho que $c_k = 0$ si $k \neq n$, tenemos

$$\left[(1-x^2)\phi_n'' + (\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x)\,\phi_n'\right] = c_n\phi_n. \tag{8}$$

Como ambos lados de (8) son polinomios de grado n, basta fijarse en el coeficiente del término de más alto grado en ambos lados. Si llamamos k_n al coeficiente que acompaña a x^n en $\phi_n(x)$ (i.e., $\phi_n(x) = k_n x^n + \dots$), el término de más alto grado a la derecha de (8) es

$$-k_n\left[n^2 + n + n(\alpha+\beta)\right] x^n,$$

y en el lado izquierdo es

$$k_n c_n x^n.$$

Igualando los coeficientes, finalmente obtenemos,

$$c_n = -\left[n(n+1) + n(\alpha+\beta)\right]. \tag{9}$$

Como hemos dicho en las clases anteriores, tanto los polinomios de Legendre como los polinomios de Tchebycheff son casos especiales de los polinomios de Jacobi. Los polinomios de Legendre corresponden al caso $\alpha = \beta = 0$ en tanto que los de Tchebycheff corresponden a $\alpha = \beta = -1/2$.

Así, de (8) y (9) vemos que la ecuación diferencial que satisfacen los polinomios de Legendre está dada por

$$(1-x^2)P_n'' - 2\,xP_n' = -n(n+1)P_n(x), \tag{10}$$

o, alternativamente

$$-\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n\right] = n(n+1)P_n(x). \tag{11}$$

Por otra parte los polinomios de Tchebycheff satisfacen

$$(1-x^2)T_n'' - \,xT_n' = -n^2T_n(x). \tag{12}$$

FUNCIONES GENERATRICES:

Una de las herramientas más útiles para deducir las propiedades de las familias de polinomios ortogonales son las funciones generatrices. En la próxima clase veremos como utilizar el Teorema de Cauchy de variable compleja para deducir, a partir de las fórmulas de Rodrigues, las expresiones analíticas cerradas para las funciones generatrices. A continuación definiremos la función generatriz para los polinomios de Legendre, y usando la expresión cerrada para esta función generatriz ilustraremos como obtener, por ejemplo, la relación de recurrencia para estos polinomios. La función generatriz de los polinomios de Legendre se define como,

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x), \tag{13}$$

para todo $-1 \leq x \leq 1$ y para todo $-1 < t < 1$. Es decir, los polinomios de Legendre $P_n(x)$ son los coeficientes del desarrollo en serie de Taylor de la función $\psi(\ ,t)$. Se puede demostrar (ver el método empleado en la próxima clase) que

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2\,t\,x+t^2}}. \tag{14}$$

Veamos como a partir de (13) y (14) podemos deducir la relación de recurrencia para los $P_n(x)$. Derivando $\psi(x,t)$ dado por (14) con respecto a t, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = (x-t)\frac{\psi(x,t)}{1-2tx+t^2}. \tag{15}$$

Por otra parte, de (13) tenemos,

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,t^{n-1}P_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,t^{n-1}P_n(x). \tag{16}$$

Igualando (15) y (16) tenemos

$$\frac{x-t}{1-2tx+t^2}\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,t^{n-1}P_n(x). \tag{17}$$

Multiplicando la ecuación anterior por $(1-2tx+t^2)$, y reemplazando $\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)$ obtenemos,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-t)t^n P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-2tx+t^2)n\,t^{n-1}P_n(x). \tag{18}$$

Finalmente, rearreglamos todas las sumas que aparecen en (18) de modo que los exponentes de t sean todos iguales. De este modo obtenemos

$$x\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} t^n P_{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n P_{n+1}(x) - \sum_{n=1}^{\infty}(2\,n\,x)P_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(x). \tag{19}$$

Como las distintas potencias de t^n son linealmente independientes, sus respectivos coeficientes deben ser iguales, y por lo tanto se tiene

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + n\,P_{n-1}(x) = 0 \tag{20}$$

para $n \geq 1$ y $P_1(x) = x\,P_0(x)$. Como $P_0(x) = 1$, a partir de esta relación de recurrencia se pueden obtener rápidamente los polinomios de Legendre de cualquier grado.
Por otra parte, derivando la función generatriz con respecto a x, obtenemos

$$(1-2xt+t^2)\frac{\partial\psi}{\partial x} = \psi\,t,$$

y, comparando con (15) podemos deducir que

$$t\frac{\partial\psi}{\partial t} = -(t-x)\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{21}$$

de donde se deduce, procediendo como en la derivación de (20), que

$$xP_n' - P_{n-1}' = nP_n, \tag{22}$$

para todo $n \geq 1$. Integrando (22) entre 0 y 1, obtenemos de inmediato

$$\int_0^1 xP_n'\,dx = P_{n-1}(1) - P_{n-1}(0) + n\int_0^1 P_n(x)\,dx.$$

Integrando el término de la izquierda por partes, y usando que $P_n(1) = 1$, finalmente obtenemos,

$$\int_0^1 P_n(x)\,dx = \frac{1}{n+1}P_{n-1}(0). \tag{23}$$

Sin embargo, avaluando la expresión de la función generatriz en $x = 0$, obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)t^n,$$

y expandiendo el lado derecho (en serie de potencias en t^2) obtenemos finalmente que $P_0(0) = 1$,

$$P_{2k+1}(0) = 0,$$

para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$ y

$$P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{[k!2^k]^2},$$

para $k = 1, 2, 3, \ldots$.