Solución de la Tarea 4

Problema 20: Los Polinomios de Hermite

La fórmula de Rodrigues vista en clases para los $H_n(x)$ es

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right) \tag{1}$$

Si llamamos $\psi(x,t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) t^n/n!$, usando (1) obtenemos

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{x^2} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right), \tag{2}$$

y, utilizando el Teorema de Cauchy,

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{x^2} \frac{1}{2\pi\, i} t^n \oint_C \frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}}\, dz, \tag{3}$$

en que C es un contorno cualquiera en el plano complejo que encierra a x. Mas adelante elegiremos el contorno C de tal manera que al intercambiar el orden de la integral y la suma, la suma geométrica que obtengamos converja, para todo z en el contorno C. Suponiendo que esto ocurre, intercambiamos el orden y obtenemos,

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \tfrac{1}{2\pi\, i} \oint_C e^{x^2-z^2} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{(z-x)^{n+1}}\, dz & (4)\\ &= \tfrac{1}{2\pi\, i} t^n \oint_C e^{x^2-z^2} \tfrac{1}{z-(x-t)}, & (5) \end{aligned}$$

siempre que $|t/(z-x)| < 1$ para asegurar la convergencia de la serie geométrica. En cuanto a la elección del contorno C para que se satisfaga la condición anterior se puede hacer del modo siguiente: basta tomar un círculo de radio ρ alrededor del punto x

b) Como

$$\psi(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n,$$

y puesto que (como vimos en clases por medio de la fórmula de Rodrigues) $(H_n, H_m) = 0$ si $n \neq m$ (con respecto al producto interno de peso $w(x) = \exp(-x^2)$, entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x,t) e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{4xt-2t^2-x^2}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^2 t^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)^2 e^{-x^2}\, dx. \tag{6}$$

El lado izquierdo de (6) está dado por

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-2t)^2} e^{2t^2}\, dx = \sqrt{\pi} e^{2t^2} = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\, t^{2n}}{n!}. \tag{7}$$

Comparando los desarrollos en serie de (6) y (7) obtenemos de inmediato

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)^2 e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \tag{8}$$

c) i) usemos la función generatriz,

$$\psi(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}. \tag{9}$$

Derivando (9) con respecto a x y t respectivamente tenemos

$$\psi_x = 2t\psi, \tag{10}$$

y

$$\psi_x = 2(x-t)\psi. \tag{11}$$

Derivando el lado derecho de (9) con respecto a t tenemos

$$\psi_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nH_n(x)}{n!} t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n+1}t^n}{n!} + H_1(x). \tag{12}$$

Por otra parte, de (**??**) y del lado derecho de (9) se tiene

$$2(x-t)\psi = 2(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \left[\frac{2x\, H_n(x)}{n!} - \frac{2H_{n-1}(x)}{(n-1)!}\right] + 2x\, H_0(x).) \tag{13}$$

De (**??**), (12) y (13), igualando los coeficientes de iguales potencias de t, obtenemos

$$H_1 = 2x\, H_0 \tag{14}$$

y

$$H_{n+1}(x) = 2x\, H_0(x) - 2nH_{n-1}(x), \tag{15}$$

e) Basta demostrar que $H_{n+1}(x) = (2x - \frac{d}{dx})H_n(x)$, y usar inducción. De la fórmula de Rodrigues (1) tenemos

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= (-1)^{n+1} e^{x^2} \tfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} \\ &= e^{x^2}(-1)^{n+1} \tfrac{d}{dx}\left(\tfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\right) \\ &= e^{x^2}(-1)^{n+1} \tfrac{d}{dx}\left(e^{-x^2}(-1)^n\, H_n\right) \\ &= -\tfrac{d\, H_n}{dx} + 2xH_n = (2x - \tfrac{d}{dx})H_n(x). \end{aligned} \tag{16}$$

Nótese que en la tercera igualdad usamos la fórmula de Rodrigues (1) nuevamente. Para completar la inducción basta verificar que $(2x - d/dx)1 = 2x$ es efectivamente $H_1(x)$.

Nota: $(2x - d/dx)$ es el *operador de subida* que se discute habitualmente en Mecánica Cuñtica al tratar la solución del oscilador armónico

f) Usando la relación de recurrencia (15) tenemos

$$xH_n = \frac{1}{2}H_{n+1} + nH_{n-1}, \tag{17}$$

de modo que

$$x^2H_n^2 = \frac{1}{4}H_{n+1}^2 + n^2H_{n-1}^2 + nH_{n-1}H_{n+1}. \tag{18}$$

Multiplicando (18) por e^{-x^2}, e integrando en x entre $-\infty$ y $+\infty$, utilizando la ortogonalidad de los polinomios de Hermite para índices distintos y que de acuerdo a (8)

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)^2 e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}2^n\,n!,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,H_n(x)H_n(x)\,e^{-x^2}\,dx &= \tfrac{1}{4}\sqrt{\pi}2^{n+1}(n+1)! + n^2 2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}\\ &= \sqrt{\pi}2^{n-1}n!(2n+1). \end{aligned} \tag{19}$$

Expresión para los primeros polinomios de Hermite: Los seis primeros polinomios de Hermite están dados por:

$$H_0(x) = 1,$$

$$H_1(x) = 2x,$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2,$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 12,$$

y

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x.$$

En la figura () hemos dibujado (usando Maple) los cuatro primeros polinomios de Hermite.

Notas adicionales:

i) Los polinomios Ortogonales con MAPLE 6: Es muy simple usar los polinomios ortogonales clásicos en MAPLE 6. Basta utilizar el comando *with(orthopoly);* para cargar la *librería* de polinomios ortogoales. Dentro de esta *librería* $P(n,x)$ denota el polinomio de Legendre de orden n evaluado en x. Análogamente, $H(n,x)$ representa el polinomio de Hermite de orden n, $L(n,x)$ el de Laguerre de orden n, $T(n,x)$ el de Tchebycheff de Primera Clase y $U(n,x)$ el de Segunda Clase. Finalmente $G(n,x)$ representa el polinomio de Gegenbauer de grado n.

ii) Usando la función generatriz es muy simple calcular el valor de los polinomios de Hermite en el origen. Evaluando (9) en $x = 0$ tenemos

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(0)\frac{t^n}{n!}.$$

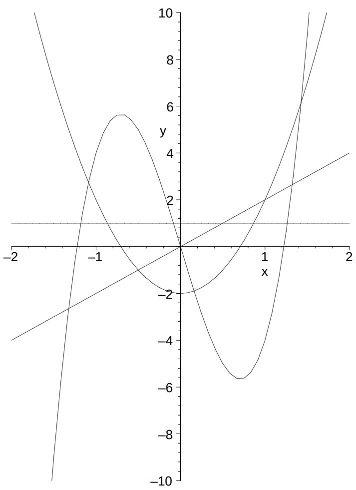

Figure 1: Gráfico de los primeros 4 polinomios de Hermite

El desarrollo en serie de Mac Laurin de e^{-t^2} está dado por

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2\,k} \frac{1}{k!}.$$

Comparando estas dos últimas expresiones obtenemos de inmediato

$$H_{2k+1}(0) = 0,$$

y

$$H_k(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{k!}.$$

Problema 21: Los Polinomios de Laguerre

a) La fórmula de Rodrigues para los polinomios de Laguerre, vista en clases, es

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^n\right) \tag{20}$$

Entonces,

$$\psi(x,t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n e^x \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^n\right), \tag{21}$$

y, utilizando el Teorema de Cauchy,

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi\, i} \sum_{n=0}^{\infty} t^n e^x \oint_C \frac{e^{-z} z^n}{(z-x)^{n+1}}\, dz, \tag{22}$$

en que C es un contorno cualquiera en el plano complejo que encierra a x. Mas adelante elegiremos el contorno C de tal manera que al intercambiar el orden de la integral y la suma, la suma geométrica que obtengamos converja, para todo z en el contorno C. Suponiendo que esto ocurre, intercambiamos el orden y obtenemos,

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{-z}e^{x}}{z-x-zt)}\,dz, \tag{23}$$

siempre que $|tz/(z-x)| < 1$ para asegurar la convergencia de la serie geométrica. En cuanto a la elección del contorno C para que se satisfaga la condición anterior se puede hacer del modo siguiente: basta tomar un círculo de radio ρ alrededor del punto x de modo que $\rho > t|x|/(1-t)$. Aquí, $0 \le t \le 1$. Entonces, $|z-x| = \rho$ y $|tz| = |tx + t\rho\exp(i\theta)| \le t|x| + t\rho \ \le \rho$. Finalmente, haciendo la integral (**??**), usando el Teorema de los Residuos, puesto que existe solamente un polo simple ($z = x/(1-t)$) en el dominio encerrado por C, obtenemos

$$\psi(x,t) = e^{x}e^{-x/(1-t)}\frac{1}{1-t} = \frac{1}{1-t}\exp(-\frac{xt}{1-t}), \tag{24}$$

para todo $0 \le t < 1$ y para todo $0 \le x < \infty$.

b) Norma de los L_n: Como es habitual, conviene calcular

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}\psi(x,t)^2\,dx \quad &= \textstyle\int_0^\infty e^{-x}\frac{\exp-\frac{2xt}{1-t}}{(1-t)^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{\exp-x\,\frac{1+t}{1-t}}{(1-t)^2}\,dx = \\ &= \textstyle\frac{1-t}{1+t}\frac{1}{(1-t)^2} = \frac{1}{1-t^2}.\end{aligned} \tag{25}$$

Por otra parte, como $\psi(x,t) = \sum_{n=0}^\infty L_n(x)t^n$ y puesto que los L_n son mutuamente ortogonales con respecto al producto interno de peso $w(x) = e^{-x}$ tenemos

$$\int_0^\infty e^{-x}\psi^2(x,t)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^\infty e^{-x}L_n^2(x)\,dx\right)t^{2n}. \tag{26}$$

Comparando (25) con (26) obtenemos

$$\int_0^\infty e^{-x}L_n^2(x)\,dx = 1. \tag{27}$$

c) Algunas relaciones de recurrencia:

i) De la expresión para función generatriz dada por (25), obtenemos de inmediato

$$(1-t)\psi_x = -t\psi, \tag{28}$$

y utilizando la expresión (21) para $\psi(x,t)$, reagrupando términos y calculando el coeficiente de t^n, tenemos

$$L'_n - L'_{n-1} = -L_{n-1}, \tag{29}$$

para todo $n \ge 1$. Nótese que sumando (29) en n desde $n = 1$ hasta $k+1$ obtenemos

$$\sum_{n=0}^{k} L_n(x) = -L'_{k+1}(x). \tag{30}$$

ii) Derivando la expresión (25), para la función generatriz ψ, con respecto a t tenemos así mismo

$$(1-t)^2\psi_t = (1-t)\psi - x\psi. \tag{31}$$

Usando la expansión de ψ en polinomios de Laguerre en (30), colectando los términos en iguales potencias de t nos conduce a la relación de recurrencia

$$(n+1)L_{n+1} - [(2n+1)-x]\,L_n + nL_{n-1} = 0, \tag{32}$$

para todo $n \geq 1$.

iii) Ahora combinando (28) y (31) se tiene

$$(1-t)t\psi_t = t\psi + x\psi_x, \tag{33}$$

y usando la expansión de ψ en términos de los polinomios de Laguerre, e igualando los coeficientes de iguales potencias de t, encontramos

$$n(L_n - L_{n-1}) = xL_n', \tag{34}$$

para $n \geq 1$. Nótese que combinando (29) y (34) se tiene de inmediato

$$(xL_n')' = -nL_{n-1}, \tag{35}$$

para $n \geq 1$.

d) Ecuación Diferencial para los $L_n(x)$: Usaremos el método discutido en clase en conexión con los Polinomios de Jacobi. Consideremos, en forma análoga al caso de los polinomios de Jacobi,

$$\frac{d}{dx}\left(w(x)xL_n'\right) = w(x)\left(xL_n'' + (1-x)L_n'\right) = w(x)\sum_{k=0}^{n}\alpha_k L_k, \tag{36}$$

en que aquí el peso $w(x) = \exp(-x)$ y la última igualdad sigue del hecho que $xL_n'' + (1-x)L_n'$ es un polinomio de grado n. Multiplicando (36) por L_j, $j \leq k$, usando la ortogonalidad de los polinomios de Laguerre con respecto al producto interno de peso $w(x) = \exp(-x)$, encontramos

$$\alpha_j = \int_0^\infty L_j \frac{d}{dx}\left(e^{-x}xL_n'\right)\,dx. \tag{37}$$

Integrando dos veces por parte la expresión anterior, usando que $e^{-x}x$ es cero en 0 y en ∞, encontramos

$$\alpha_j = \int_0^\infty L_n' \frac{d}{dx}\left(e^{-x}xL_j'\right)\,dx. \tag{38}$$

Pero, por el mismo argumento usado en la derivación de (36), $d(\exp(-x)x\,L_j')/dx$ es un polinomio de grado j. Así, por la ortogonalidad de los polinomios de Laguerre, de (38) tenemos que $\alpha_j = 0$ si $j < n$, de modo que solamente α_n es distinto de cero en (36) y por lo tanto,

$$xL_n'' + (1-x)L_n' = \alpha_n L_n. \tag{39}$$

Para encontrar el valor de α_n, dado que ambos lados de la ecuación (39) son polinomios de grado n, los coeficientes de todas sus potencias deben ser iguales, en particular el coeficiente de x^n. De este modo, si escribimos

$$L_n = k_n x^n + \dots \tag{40}$$

y lo reemplazamos en (39), colectando el coeficiente de x^n en ambos lados de (39) encontramos $\alpha_n = n$, de modo que los polinomios de Laguerre obedecen la ecuación

$$-xL_n'' - (1-x)L_n' = nL_n. \tag{41}$$

Expresión para los primeros polinomios de Laguerre: Los cinco primeros polinomios de Laguerre están dados por:

$$L_0(x) = 1,$$

$$L_1(x) = 1 - x,$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 2\right)$$

$$L_3(x) = \frac{1}{6}\left(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6\right),$$

$$L_4(x) = \frac{1}{24}\left(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24\right).$$

En la figura () hemos dibujado (usando Maple) los cinco primeros polinomios de Laguerre.

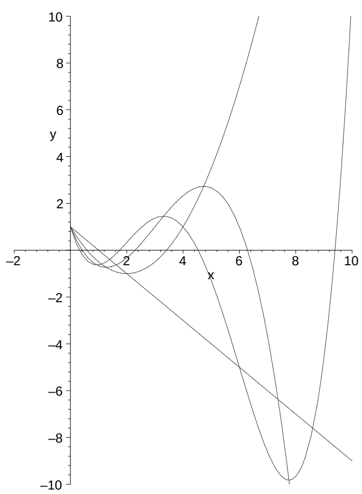

Figure 2: Gráfico de los primeros cinco polinomios de Laguerre

Problema 22: Los polinomios de Tchebycheff de Primera Clase

Expresión para los primeros polinomios de Tchebycheff de Primera Clase: Los seis primeros polinomios de Tchebycheff están dados por:

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_2(x) = \frac{1}{2}\left(2x^2 - 1\right),$$

$$T_3(x) = \frac{1}{4}\left(4x^3 - 3x\right),$$

$$T_4(x) = \frac{1}{8}\left(8x^4 - 8x^2 + 1\right),$$

y

$$T_5(x) = \frac{1}{16}\left(16x^5 - 20x^3 + 5x\right)$$

En la figura () hemos dibujado (usando Maple) los cinco primeros polinomios de Tchebycheff.

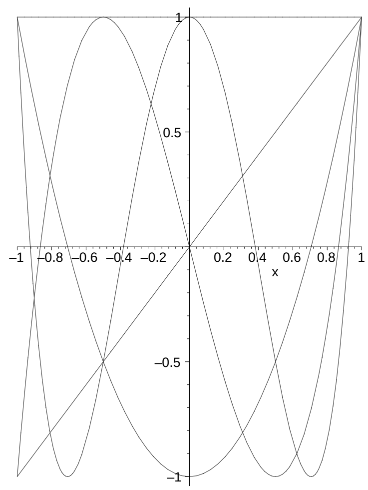

Figure 3: Gráfico de los primeros cinco polinomios de Tchebycheff

Solución del Problema 23:

Escribimos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \tag{42}$$

Como los polinomios de Legendre, $P_n(x)$ son ortogonales entre sí, i.e., $(P_n, P_m) = 0$ si $n \neq m$, si multiplicamos (42) por $P_m(x)$ e integramos en x entre -1 y 1, obtenemos

$$a_m = \frac{(f, P_m)}{(P_m, P_m)}. \tag{43}$$

Para la función f de este problema tenemos

$$(f, P_m) = \int_0^1 P_m(x)\, dx. \tag{44}$$

En clase vimos que el cuadrado de la norma de los polinomios de Legendre está dada por

$$(P_m, P_m) = \frac{2}{2m+1}. \tag{45}$$

Los polinomios de Legendre satisfacen la siguiente relación de recurrencia (discutida en clases)

$$xP'_n - P'_{n-1} = n\, P_n,$$

para $n = 1, 2, \ldots$. Si integramos la relación anterior en x entre 0 y 1 obtenemos

$$\int_0^1 xP'_n(x)\, dx = P_{n-1}(1) - P_{n-1} + n \int_0^1 P_n(x)\, dx.$$

Integrando por partes el lado izquierdo, y usando que $P_n(1) = 1$ para todo n tenemos finalmente

$$\int_0^1 P_n(x)\, dx = \frac{1}{n+1} P_{n-1}(0), \tag{46}$$

para todo $n \geq 1$. Como $P_(0)(x) = 0$, tenemos además que

$$\int_0^1 P_0(x)\, dx = 1.$$

Entonces, reemplazando (44), (45) y (46) en (43) tenemos

$$a_m = \frac{2m+1}{2(m+1)} P_{m-1}(0), \tag{47}$$

para $m \geq 1$ y

$$a_0 = \frac{1}{2}. \tag{48}$$

Los polinomios de Legendre tienen paridad $(-1)^n$ (i.e., los polinomios de índice par son pares con respecto al origen y los polinomios de índice impar son impares con respecto al origen) de modo que

$$P_{2k+1}(0) = 0, \tag{49}$$

para todo k. Usando la función generatriz de los polinomios de Legendre $\psi(x,t) = 1/\sqrt{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$, evaluada en $x = 0$ obtenemos

$$P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{(k! 2^k)^2}, \tag{50}$$

Finalmente, de (47), (48), (49) y (50), obtenemos los coeficientes de la expansión de $f(x)$ en serie de Polinomios de Legendre:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \tag{51}$$

$$a_{2k} = 0, \tag{52}$$

$k = 1, 2, \ldots$, y

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{(4k+3)}{4(k+1)} \frac{(2k)!}{(k! 2^k)^2}, \tag{53}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$. Debido a que la función f tiene una discontinuidad (en $x = 0$) los coeficientes a_m de la expansión, convergen lentamente a 0. De hecho, para valores grandes de k, podemos utilizar la aproximación de Stirling para $k!$ (ver nota adicional al final de este problema) para concluir que

$$a_{2k+1} \approx (-1)^k \frac{1}{\sqrt{\pi k}},$$

para valores grandes de k.

En la figura siguiente he graficado la suma de los primeros 10 términos no nulos de la serie (42). Se observa la oscilación característica de la serie en torno a $x = 0$ (fenómeno de Gibbs).

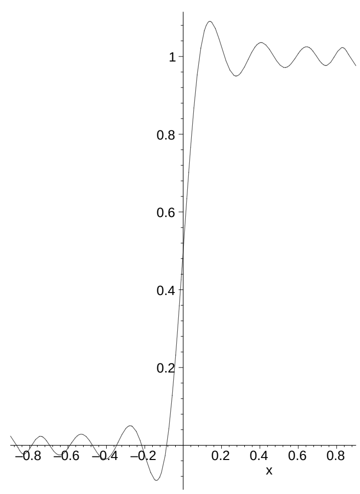

Figure 4: Aproximación de $f(x)$ por la serie (42).

Notas adicionales: Aproximación de Stirling (muy útil en Probabilidades y Mecánica Estadística): Si $n > 1$ es un entero, entonces

$$\exp\left(\frac{1}{12n + (1/4)}\right) < \frac{n!}{\sqrt{2\,\pi\,n}\,\exp(-n) n^n} < \exp\left(\frac{1}{12n}\right),$$

de modo que

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{n!}{\sqrt{2\,\pi\,n}\,\exp(-n) n^n} \right] = 1,$$

resultado que fue demostrado por James Stirling en 1764. Para ver una demostración del Teorema de Stirling, ver, e.g., el libro de K.R. Stromberg, **Introduction to Classical Real Analysis**, Wadsworth International Group, Belmont, California, 1981. Usualmente en Mecánica Estadística el Teorema de Stirling se usa para proximar

$$log(n!) \approx n \log n - n$$

para valores grandes de n.

Problema 24:
Se trata de demostrar la siguiente relación integral para los Polinomios de Legendre en términos de los Polinomios de Hermite:

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^n H_n(x\, t)\, dt. \tag{54}$$

Esta es una representación integral para los Polinomios de Legendre en términos de los Polinomios de Hermite. Existen muchas maneras de demostrar este resultado. La más simple, quizás, es utilizando las funciones generatrices tanto de los polinomios de Hermite como de Legendre. Basta demostrar que utilizando la representación integral en cuestión par los polinomios de Legendre, si sumamos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xs + s^2}}, \tag{55}$$

i.e., obtenemos la función generatriz de los polinomios de Legendre.

Si multiplicamos (54) por s^n y sumamos, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) s^n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ts)^n H_n(x\, t)}{n!} \right] dt, \tag{56}$$

y, usando la función generatriz de los polinomios de Hermite, podemos escribir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ts)^n H_n(x\, t)}{n!} = e^{2x\, t^2\, s - t^2 s^2}. \tag{57}$$

Reemplazando (57) en el lado derecho de (56) obtenemos,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) s^n = \frac{1}{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \left(e^{2xt^2 s - t^2 s^2} \right) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\, dt, \tag{58}$$

en que $a = 1 - 2sx + s^2$. Pero $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-at^2)\, dt = \sqrt{\pi/a}$, de modo que finalmente

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) s^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2sx + s^2}}, \tag{59}$$

que es precisamente la función generatriz de los polinomios de Legendre.

Solución del Problema 25:

Usamos la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Laguerre L_n^α, i.e.,

$$L_n^\alpha = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x} x^{n+\alpha}\right). \tag{60}$$

De este modo

$$L_{n+1}^\alpha = \frac{1}{(n+1)!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(e^{-x} x^{n+1+\alpha}\right).,\tag{61}$$

y

$$L_n^{\alpha+1} = \frac{1}{n!} x^{-\alpha-1} e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x} x^{n+\alpha+1}\right). \tag{62}$$

Si llamamos

$$\phi = \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x} x^{n+\alpha+1}\right), \tag{63}$$

al factor común que aparece en (61) y (62), obtenemos de (61)

$$\frac{d}{dx} L_{n+1}^\alpha = \frac{1}{(n+1)!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^2\phi}{dx^2} \tag{64}$$

Pero, de (62) y (63)

$$\phi = n! L_n^{\alpha+1} x^{\alpha+1} e^{-x}, \tag{65}$$

de modo que

$$\frac{d\phi}{dx} = n! L_n^{\alpha+1}\left[(\alpha+1)x^\alpha e^{-x} - x^{\alpha+1}e^{-x}\right] + x^{\alpha+1}e^{-x} n! \frac{dL_n^{\alpha+1}}{dx} \tag{66}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dx^2} \quad &= n! 2 \tfrac{dL_n^{\alpha+1}}{dx}\left[(\alpha+1)x^\alpha e^{-x} - x^{\alpha+1}e^{-x}\right] + x^{\alpha+1}e^{-x} n! \tfrac{d^2 L_n^{\alpha+1}}{dx^2} \\ &+ n! L_n^{\alpha+1}\left[\alpha(\alpha+1)x^{\alpha-1}e^{-x} - 2(\alpha+1)x^\alpha e^{-x} + x^{\alpha+1}e^{-x}\right].\end{aligned} \tag{67}$$

Reemplazando (66) y (67) en (**??**) obtenemos, luego de simplificar,

$$\frac{dL_{n+1}^\alpha}{dx} = \frac{1}{n+1}\left(x \frac{d^2}{dx^2} L_n^{\alpha+1} + (\alpha+2-x)\frac{dL_n^{\alpha+1}}{dx} - L_n^{\alpha+1}\right) \tag{68}$$

Sin embargo, la ecuación diferencial de los polinomios de Laguerre L_n^α es

$$x \frac{d^2}{dx^2} L_n^\alpha + (\alpha+1-x)\frac{dL_n^\alpha}{dx} + n\, L_n^\alpha. \tag{69}$$

Usando la ecuación diferencial (69) (con α reemplazado por $\alpha+1$) en (68) obtenemos finalmente

$$\frac{dL_{n+1}^\alpha}{dx} = \frac{1}{n+1}(-n-1) L_n^{alpha+1} = -L_n^{\alpha+1},$$

que era lo que se pedía demostrar.

Representación Integral para los polinomios de Hermite:

Una propiedad útil de los polinomios de Hermite es la siguiente representación integral (ver, e.g., E. Merzbacher, **Quantum Mechanics**, Wiley International Edition, Tokyo, 1961, prob. V, pp. 77):

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x+iu)^n e^{-u^2}\, du. \tag{70}$$

Hay muchas maneras de demostrar esta representación integral. Quizás la más simple es demostrar que si uno define las funciones por medio de (70), multiplica por $t^n/n!$ y suma en n desde 0 hasta ∞ se obtiene precisamente la función generatriz de los polinomios de Hermite. El único inconveniente de este tipo de demostración es que no es una demostración constructiva. Sea

$$I \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x+iu)^n e^{-u^2}\, du. \right) \frac{t^n}{n!}. \tag{71}$$

Entonces queremos demostrar que $I = \exp(2tx - t^2)$.

Intercambiando el orden de las operaciones de integral y suma en (71), haciendo la suma, obtenemos

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2t(x+iu)-u^2}\, du.) \tag{72}$$

Pero,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2tiu-u^2}\, du = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u-ti)^2}\, du \right) e^{-t^2} = \sqrt{\pi} e^{-t^2}.) \tag{73}$$

(Mediante una deformación elemental del contorno de intregración, utilizando el Teorema de Cauchy, el hecho que $\exp(-z^2)$ es una función entera, y que para valores grandes de R e y fijo, $\exp(-(R+iy)^2 \to 0$ se transforma la integral del segundo miembro de (73) en la intrgral de una gaussiana). Finalmente el resultado sigue de (72) y (73).

Nota: Es evidente, de la representación integral (70) que el lado derecho es un polinomio de grado n en x.

Problema 26:

Usaremos la representación integral de los polinomios de Hermite

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x+iu)^n e^{-u^2}\, du. \tag{74}$$

(ver problema anterior). Usando (74) dos veces obtenemos

$$G(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} t^n}{\pi n!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x+iu)^n (y+iv)^n e^{-u^2-v^2}\, du\, dv. \tag{75}$$

Intercambiando el orden de la suma y de la integración, y sumando la serie que resulta obtenemos

$$\begin{aligned} G(x,y,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp 4(x+iu)((y+iv)t) - u^2 - v^2\, du\, dv \\ &= e^{4xyt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp -4uvt + 4iuyt + 4ivxt - u^2 - v^2\, du\, dv. \end{aligned} \tag{76}$$

Luego hacemos primero la integral en u, (completando cuadrados y deformando contornos en el plano complejo, usando el Teorema de Cauchy). Así, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp -4uvt + 4iuyt - u^2 = \sqrt{\pi} \exp 4v^2t^2 - 4y^2t^2 - 8ivyt^2. \tag{77}$$

Reemplazando (77) en (76) obtenemos

$$G(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{4xyt - 4y^2t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2(1-4t^2)+4ivxt-8ivyt^2}\, dv. \tag{78}$$

Si $t^2 < 1/4$, completando el cuadrado en (78) y deformando contornos en el plano complejo, usando que la función e^{-z^2} es entera, y haciendo la integral de la gaussiana resultante, obtenemos

$$G(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{1-4t^2}} e^{4xyt-4y^2t^2} \exp \frac{-4x^2t^2 - 16y^2t^4 + 16xyt^3}{1-4t^2}$$

Reagrupando términos en la exponencial, obtenemos finalmente

$$G(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{1-4\,t^2}} \exp \frac{4xy\,t - 4t^2(x^2+y^2)}{1-4t^2}. \tag{79}$$

Indicaciones:

i) En este ejercicio hemos hecho uso repetido de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\,u^2}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

con $a > 0$.

ii) Quizás es mas conveniente definir $\tau = 2t$ en (79) y de este modo la expresión para $G(x, y, \tau)$ toma la forma más simple

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) H_n(y) (\frac{\tau}{2})^n = \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \exp \frac{2xy\tau - \tau^2(x^2+y^2)}{1-\tau^2}.$$

Nota Bibliográfica: Esta expresión para $G(x, y, t)$ juega un papel importante en el cálculo de integrales funcionales (proceso de Ornstein–Uhlenbeck). Esta expresión para $G(x, y, t)$ se conoce como fórmula de Mehler. Ver, e.g., el libro de Barry Simon, **Functional Intregration and Quantum Physics**, Academic Press, NY, 1979, pp. 38 y las referencias allí mencionadas. De acuerdo a Barry Simon, esta formula fue derivada por J. Doob, **Stochastic Processes**, Wiley, NY, 1953; sin embargo sería conveniente revisar los artículos originales de Ornstein y Uhlenbeck o los libros de Mark Kac.

Rafael Benguria, 6 de Mayo, 2002.