Facultad de Física, P. Universidad Católica de Chile
FIZ–2520: Métodos Matemáticos de la Física II
Curso: R. Benguria, Semestre Primavera 2001
Tarea # 4
Fecha de Entrega: Jueves 12 de abril, 2001.

Instrucciones: Haga uno de entre los problemas 18, y 19. Haga el problema 21. Haga uno de entre los problemas 22, 23, 24. El problema 25 es el problema de desafío de esta semana.

18. Polinomios de Hermite. Los polinomios de Hermite están definidos como el conjunto de polinomios ortogonales en $L^2(-\infty,\infty); e^{-x^2/2}\,dx)$. a) Demuestre que $\psi(x,t) \equiv e^{2tx-t^2}$, es la función generatriz de los polinomios de Hermite $H_n(x)$, en el sentido que

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) t^n}{n!}.$$

b) Encuentre $||H_n||^2 = (H_n, H_n)_{e^{-x^2}}$.
c) Demuestre las siguientes realaciones de recurrencia para los $L_n(x)$:
(i) $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$, $n \geq 1$,
(ii) $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$, $n \geq 1$
d) Demuestre que H_n satisface la ecuación diferencial

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

e) Demuestre que

$$\left(2x - \frac{d}{dx}\right)^2 1 = H_n(x).$$

f) Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} H_n(x) H_n(x)\,dx.$$

Esta última integral aparece en el calculo del desplazamiento promedio de un oscilador en mecánica cuántica.
Advertencia: En distintos libros existen distintas convenciones para definir los polinomios de Hermite y otros. En este problema estamos usando la misma convención que las referencias [1] y [3].

19. Polinomios de Laguerre. Los polinomios de Laguerre están definidos como el conjunto de polinomios ortogonales en $L^2([0,\infty); e^{-x}\,dx)$. a) Demuestre que $\psi(x,t) \equiv e^{-xt/(1-t)}(1-t)^{-1}$, $0 \leq t < 1$ es la función generatriz de los polinomios de Laguerre $L_n(x)$.
b) Encuentre $||L_n||^2 = (L_n, L_n)_{e^{-x}}$.

c) Demuestre las siguientes relaciones de recurrencia para los $L_n(x)$:
(i) $L_{n+1} + n^2 L_{n-1} - (2n+1-x)L_n = 0$, $n \geq 1$,
(ii) $L_n' = nL_n - n^2 L_{n-1}, n \geq 1$.
d) Verifique que $L_n(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n = 0.$$

20. Polinomios de Tchebycheff. Los polinomios de Tchebycheff están definidos como el conjunto de polinomios ortogonales en $L^2([-1,1];(1-x^2)^{-1/2}\,dx)$. Repita el problema anterior para estos polinomios haciendo los cambios siguientes
a)

$$\psi(x,t) \equiv \frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)(2t)^n.$$

b) Encuentre $||T_n||^2 = (T_n, T_n)_{1/\sqrt{1-x^2}}$.
c) Demuestre que $T_0(x) = 1$, y que $T_n(x) = 2^{1-n}\cos(n \arccos x)$, $n \geq 1$.
d)

$$T_{n+1}(x) - xT_n(x) + \frac{1}{4}T_{n-1} = 0, n \geq 2$$

.
e) Verifique que T_n satisface,

$$(1-x^2)T_n'' - xT_n' + n^2 T_n = 0.$$

21. Desarrolle la función $f(x) = 0$ si $-1 \leq x \leq 0$, $f(x) = 1$ si $0 < x \leq 1$ en serie de polinomios de Legendre.

22. Demuestre que

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{n!}\int_0^{\infty} e^{-t^2/2} t^n H_n(xt)\,dt.$$

23. Muestre que

$$\frac{d}{dx}L_{n+1}^{\alpha}(x) = -L_n^{\alpha+1}(x).$$

24. Derive la siguiente función generatriz

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)H_n(y)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\exp\left[2xy - t^2(x^2+y^2)\right]/(2(1-t^2))$$

25.
a) Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Demuestre que $e^{-ax} \in L^2(0,\infty; e^{-x}\,dx)$.
b) Para todo entero $n \geq 0$ encuentre

$$c_{n,a} = (e^{-ax}, L_n(x))/(L_n, L_n),$$

en que $(\cdot,\cdot)$ es el producto interno en $L^2(0,\infty; e^{-x}\,dx)$.

c) Considere luego la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,a} L_n(x)$. Demuestre que esta serie converge en el sentido de la norma de $L^2(0,\infty; e^{-x}\,dx)$, i.e.,

$$\lim_{N\to\infty} ||e^{-ax} - \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,a} L_n(x)|| = 0.$$

d) Demuestre que las funciones e^{-nx}, n entero no negativo, forman un conjunto completo en $L^2(0,\infty; e^{-x}\,dx)$, es decir que toda función en dicho espacio puede ser aproximada tanto como se desee en el sentido de la norma por combinaciones lineales finitas de e^{-nx}. Para demostrar esto, use un cambio de variables apropiado y el Teorema de Weierstrass.
e) Finalmente deduzca que los L_n forman un sistema completo en $L^2(0,\infty; e^{-x}\,dx)$.

Referencias:

1. Richard Courant y David Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, volume 1, Interscience, NY, 1953. **2.** Harry Hochstadt, *The functions of mathematical physics*, Dover, NY, 1986.

3. G.B. Arfken, y H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists, 4th edition*, Academic Press, San Diego, 1995. Capítulo 13.

Notas históricas: Charles Hermite nació en Dieuze, región de Lorena el 24 de diciembre de 1822. Luego de estudiar en Nancy, se mudó a París donde estudió primero en el Collège Henri y luego en 1840–1841 en el prestigioso Collège Louis–Le–Grand, donde tuvo como profesor de matemáticas a Louis Richard (1795–1849) quién años antes fue el profesor de Galois. Debido a un problema físico en un pie, se le rechazó como alumno en l'Ecole Polytechnique. En 1856 fue nombrado miembro de la Academia de Ciencias y en 1869 Profesor en la Sorbonne y en l'Ecole Polytechnique. Entre sus alumnos destacan Henri Poincaré, Gosta Mittag–Leffler y Jacques Hadamard. Murió en Paris, hace poco mas de un siglo, el 14 de enero de 1901. Trabajó en teoría de números, en funcines elípticas, etc. Demostró que es posible obtener las raíces de los polinomios de quinto grado en términos de funciones elípticas. Hermite demostró que "e" es trascendental (i.e., no es un entero algebraico). Hermite es recordado en matemáticas por los polinomios que llevan su nombre, por las matrices hermíticas, etc. (ver http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/ history/Mathematicians/Hermite.html).