

R. BENGURIA

MECANICA ANALITICA

OTOÑO 1982

Referencias

- [1] R. Courant, D. Hilbert : "Methods of Math. Physics" vol. 1. John Wiley, Cap. IV, pág 164
- [2] L. Elsgoltz : "Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional". Ed. MIR, Moscú (1969).

For a reasonable history of CV one can use:

Herman H. Goldstine

"A history of the calculus of variations
from the 17th through the 19th century"

Studies in the History of Maths. & Physical Sciences 5

Springer-Verlag, NY 1980

§ 1. Máximos y Mínimos de Funciones; Metodo de Multiplicadores de Lagrange; Pts. Estacionarios.

El cálculo de variaciones es una extensión natural de la teoría elemental de máximos y mínimos, la que empezaremos por recordar.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. El problema usual de "máximos y mínimos" consiste en determinar un pto. $x_0 \in \Omega$ para el cual f tiene un máximo (ó mínimo; en general se habla de pto. extremos) c/a a todos los pto. en una vecindad de x_0 , contenido en Ω .

La solución a este problema clásico es la siguiente:

" Toda fn. f , continua sobre un dominio cerrado y acotado de \mathbb{R}^N posee un máximo y un mínimo en dicho dominio "

NOTAS:

- (i) Si reemplazamos \mathbb{R}^N por otro espacio la condición de que el dominio sea cerrado y acotado \rightarrow "dominio compacto". En \mathbb{R}^N compacto \equiv cerrado y acotado (Teo. de Heine Borel)
- (ii) El máximo y/o el mínimo pueden ocurrir tanto en Ω como en su frontera $\partial\Omega$.
- (iii) Que el dominio sea cerrado y acotado es esencial, como se ve en los siguientes contraejemplos:
 - La fn. $f(x) = \frac{1}{x}$ en el dominio $[0, \infty)$ no tiene mínimo.
 - La fn. $f(x) = x$ en el dominio $[0, 1)$ no tiene máximo.

Comentarios:

Desde luego es importante que la fn. f sea continua.

Por ej.:

$$f(x) = \begin{cases} -1-x & \text{para } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

definida en el dominio $[-1, 1]$ (cerrado y acotado), no posee mínimo en dicho intervalo.

Si la fn. f es diferenciable en G y si un extremo se alcanza en un pto. $x_0 \in \text{int}(\Omega)$ entonces las derivadas de f , $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ se anulan necesariamente en x_0 . (i.e. $\nabla f|_{x_0} = 0$).

El recíproco no es cierto, como puede apreciarse con la fn. $f(x) = x^3$ en el intervalo $[-1, 1]$. $\nabla f|_0 = 0$ pero 0 no es extremo.

Los puntos para los cuales $\nabla f = 0$ se llaman PTOS. ESTACIONARIOS. (Así, todos los ptos. EXTREMOS que ocurren en $\text{int}(\Omega)$ son ESTACIONARIOS, pero el recíproco no es cierto).

METODO DE MULTIPLICADORES DE LAGRANGE : MINIMIZACION CON RESTRICCIONES :

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio cerrado y acotado y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Sea $x_0 \in \text{int}(\Omega)$ un extremo de f . Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ una curva diferenciable cualquiera que pasa por x_0 . Consideremos la restricción de f sobre γ . Ya que x_0 es un extremo de f , tendremos

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{x_0} = \nabla f \cdot \left. \frac{dx}{dt} \right|_{x_0} = 0 \tag{1}$$

En (1), $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x_0}$ es la tangente a la curva γ en el pto. x_0 . Como esto debe valer cualquiera que sea la curva γ , $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x_0}$ es un elemento arbitrario de \mathbb{R}^N . La única forma que (1) sea cierto para todo γ es entonces que

$$\nabla f|_{x_0} = 0, \tag{2}$$

condición que ya habíamos mencionado anteriormente. Todo esto es válido solo si no hay ligazones (ó restricciones):

Supongamos ahora que deseamos extremar la fn. $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ en el caso en que no todas las variables sean independientes. Es decir, se desea extremar la restricción de f al subconjunto de Ω definido a través de las ligazones siguientes:



$$\begin{cases} g_1(\vec{x}) = 0 \\ g_2(\vec{x}) = 0 \\ \vdots \\ g_l(\vec{x}) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Supongamos que $x_0 \in$ restricción de Ω dado por (3) es un extremo de f en dicha restricción $l < N$. Sea ahora una curva $\gamma: [0, 1] \rightarrow$ (restricción de Ω dada por las ecs. (3)) que pase por x_0 , diferenciable, pero de otro modo arbitraria. Tal como antes,

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{x_0} = \nabla f \cdot \left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{x_0} = 0 \quad (4)$$

en que $\left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{x_0}$ denota la tge. a la curva γ en el pto. x_0 . Ahora, no es posible concluir como antes que $\nabla f|_{x_0} = 0$, pues ahora al "barrer" las posibles curvas γ , $\left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{x_0}$ no genera todo \mathbb{R}^N . En efecto, como todo punto de

la curva γ debe estar contenido en la restricción a Ω dada por las ecs. (3), debe tenerse que⁽²⁾

$$\left. \frac{dg_i}{dt} \right|_{x_0} = \nabla g_i \cdot \left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{x_0} = 0 \quad 1 \leq i \leq l \quad (5)$$

Así, la tge. $\left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{x_0}$ debe ser \perp a $\nabla g_i|_{x_0} \quad \forall 1 \leq i \leq l$. O sea

al "barrer" en γ 's, $\left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{x_0}$ es arbitrario en el complemento de $\text{span}(\nabla g_i)$ ⁽¹⁾

Entonces, de la ec. (4) vemos que $\nabla f|_{x_0}$ debe ser perpendicular a cualquier vector en el complemento de $\text{span}(\nabla g_i)$ o sea, $\nabla f|_{x_0} \in \text{span}(\nabla g_i)$, i.e.

(1) Aquí denotamos por $\text{span}(\nabla g_i)$ al Espacio Vectorial generado por los vectores $\nabla g_i|_{x_0}$.

(2) De hecho la ecu. (5) es cierta no sólo para x_0 sino que también para cualquier otro pto. de γ .



$$\nabla f|_{x_0} = - \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla g_i|_{x_0} \quad (6)$$

(el signo "-" lo pongo solo por conveniencia), en que λ_i denota la componente de $\nabla f|_{x_0}$ a lo largo de $\nabla g_i|_{x_0}$. Los λ_i se llaman comunmente MULTIPLICADORES DE LAGRANGE, y deben ser determinados a posteriori. Las incógnitas en el problema son:

$$\left. \begin{array}{l} - N \text{ componentes de } x_0 \\ - l \text{ multiplicadores de Lagrange: } \lambda_i \end{array} \right\} N+l \text{ incógnitas}$$

y tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} - N \text{ ecuaciones dadas por (6)} \\ - l \text{ ecuaciones dadas por las restricciones (3)} \end{array} \right\} N+l \text{ ecs.}$$

y así, en principio el problema se puede resolver. Se acostumbra a escribir (6) como

$$\nabla \left(f + \sum_{i=1}^l \lambda_i g_i \right) \Big|_{x_0} = 0 \quad (7)$$

y así, el problema de minimizar f en Ω sujeto a las restricciones $g_i = 0$ nos lleva a encontrar los pts. estacionarios de la nueva fn.

$$f + \sum_{i=1}^l \lambda_i g_i$$

Ejercicios:

- [1] "Dado un Δ de lados a, b, c y superficie S , halle un pto. P , en su interior tal que la suma de los cuadrados de las distancias de P a $\frac{1}{2}$ de los lados sea un mínimo"

Solución: Sean α, β y γ respectivamente los segmentos que unen a P perpendicularmente con los lados $a, b,$ y c respectivamente (ver fig. 1)

Handwritten text, possibly bleed-through from the reverse side of the page, appearing as a vertical line of faint, illegible characters along the right edge.

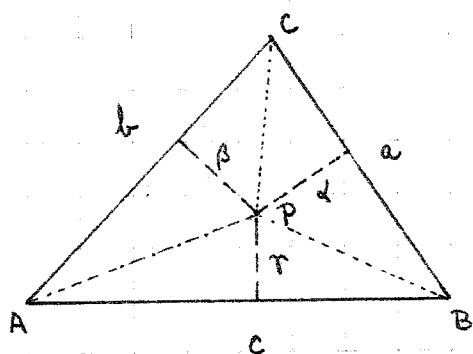


fig # 1

De la figura tenemos

$$S = \text{área del } \Delta = \text{área } \Delta_{ABP} + \text{área } \Delta_{PBC} + \text{área } \Delta_{CAP}$$

$$\text{área } \Delta_{ABP} = \frac{1}{2} \gamma c, \text{ etc.}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} (\gamma c + a \alpha + \beta b)$$

Entonces, se trata de extremar la función

$$f(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \text{ sujeta a la restricción}$$

$$g(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2} (\gamma c + a \alpha + \beta b) - S = 0. \quad (8)$$

Las condiciones necesarias de extremo son que :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (f + \lambda g) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} (f + \lambda g) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (f + \lambda g) = 0$$

Introduciendo las expresiones de f y g en las ecs. (9) obtenemos

$$2\alpha + \frac{\lambda}{2} a = 0$$

$$2\gamma + \frac{\lambda}{2} c = 0$$

$$2\beta + \frac{\lambda}{2} b = 0$$

i.e., $\alpha = -\frac{\lambda}{4} a$, $\beta = -\frac{\lambda}{4} b$, $\gamma = -\frac{\lambda}{4} c$. Solo nos resta determinar el multiplicador de Lagrange λ . Introduciendo los valores de α, β, γ en la restricción (8) obtenemos

$$\lambda = -8 \cdot S \cdot (a^2 + b^2 + c^2)^{-1}$$

Así, los valores de α, β, γ que extreman (?) f sometido a (8) son:

$$\hat{\alpha} = 2 \cdot S \cdot a (a^2 + b^2 + c^2)^{-1}; \quad \hat{\beta} = 2 \cdot S \cdot b (a^2 + b^2 + c^2)^{-1}; \quad \hat{\gamma} = 2 \cdot S \cdot c (a^2 + b^2 + c^2)^{-1}$$

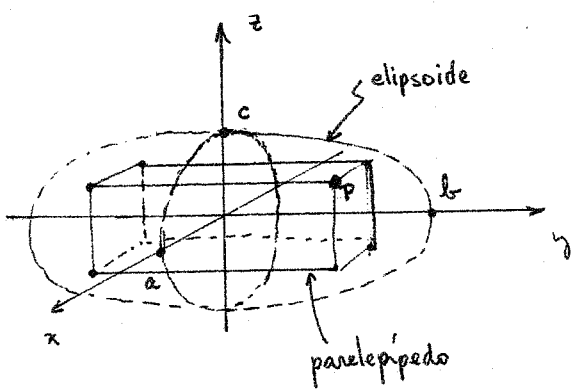
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

$$f(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}) = 4 \cdot S^2 (a^2 + b^2 + c^2)^{-1}$$

En realidad solo hemos verificado que $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ es un pto. estacionario. Para determinar si se trata de un mínimo, deben verificarse condiciones sobre las 2^{as} derivadas. En este problema es local mas o menos evidente que se trata de un mínimo.

[2] Hallar el paralelepípedo rectangular de volumen máximo que puede inscribirse en el elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{10}$$



Sea $P(x, y, z)$ el vértice del paralelepípedo en el octante positivo. Como el elipsoide es completamente simétrico c/a a los 3 ejes, la única manera de inscribir un paralelepípedo recto es que éste tenga lados // a los ejes.

Luego, los vértices del paralelepípedo serán

- $P : (x, y, z)$ y los otros 7 pto. obtenidos por reflexión, i.e.
- $-x, y, z$
 - $x, y, -z$
 - $x, -y, z$
 - $-x, y, -z$
 - $-x, -y, z$
 - $-x, -y, -z$
 - $x, -y, -z$

Obviamente si $P \in$ elipsoide todos estos otros puntos también están en el elipsoide. El volumen de este paralelepípedo recto es :

$$V(x, y, z) = 8x \cdot y \cdot z \tag{11}$$

Entonces se trata de maximizar (11) sometido a la ligazón (10)

La condición para que $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ sea estacionario es que:

$$\frac{\partial}{\partial x} (V + \lambda g) \Big|_{(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})} = 0, \text{ etc.} \quad (12)$$

en que

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Introduciendo V y g en (12) obtenemos

$$8 \hat{y} \cdot \hat{z} + 2\lambda \frac{\hat{x}}{a^2} = 0 \quad (13a)$$

$$8 \hat{x} \cdot \hat{z} + 2\lambda \frac{\hat{y}}{b^2} = 0 \quad (13b)$$

$$8 \hat{x} \cdot \hat{y} + 2\lambda \frac{\hat{z}}{c^2} = 0 \quad (13c)$$

Multiplicando a) $\cdot \hat{x}$, b) $\cdot \hat{y}$, c) $\cdot \hat{z}$ y sumando, luego usando (10) y (11) obtenemos:

$$3V + 2\lambda = 0 \quad ; \quad \hat{z} = \left[-\frac{c^2}{2\lambda} \cdot V \right]^{1/2}$$

$$\hat{x} = \left[-\frac{a^2}{2\lambda} \cdot V \right]^{1/2} \quad ; \quad \hat{y} = \left[-\frac{b^2}{2\lambda} \cdot V \right]^{1/2}$$

pero $\lambda = -\frac{3}{2}V$, \therefore

$$\begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} a \\ \hat{y} = \frac{1}{\sqrt{3}} b \\ \hat{z} = \frac{1}{\sqrt{3}} c \end{cases}$$

y el volumen máximo es, $V(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \frac{8}{3\sqrt{3}} abc$.

NOTA: De nuevo es válido el comentario al final del problema [1].-

[3] "ANILLOS DE UN PLANETA"

[NOTA BIB.: este problema está tomado de los apuntes de Mecánica Clásica de R. TABENSKY, (1967)]

Una masa "m" de gas y fragmentos rodea una estrella de masa "M". El radio de la estrella es despreciable frente a las distancias a las partículas de gas y fragmentos. El material que rodea a la estrella tiene inicialmente un momento angular total L y energía total "E". Suponga que "m" << "M" de modo que el campo gravitacional debido a la masa "m" es despreciable frente al producido por la estrella. Debido a roce interno, el material que rodea a la estrella pierde continuamente energía mecánica. Demuestre que existe un máximo de energía "ΔE" que puede ser perdida por esta causa, y cuando esto ha sucedido, el material forma un anillo circular alrededor de la estrella (pero no necesariamente uniformemente distribuido.) Encuentre ΔE y el radio del anillo.

Solución: Consideremos la energía total "E"; está compuesta de energía mecánica (cinética y potencial) y de la energía que se pierde por fricción ΔE, es decir, E = E_mec + ΔE. Sea T la energía cinética y V la potencial. E_mec = T + V y usando coordenadas cilíndricas (aquí el índice "i" rotula c/partícula de gas y fragmentos) tenemos

(14)
$$E = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{r}_i^2 + r_i^2 \dot{\theta}_i^2 + \dot{z}_i^2) - \sum_i G \cdot M \frac{m_i}{(r_i^2 + z_i^2)^{1/2}} + \Delta E$$

(c/partícula esta rotulada por su masa m_i, posición (r_i, θ_i, z_i) y velocidad (ṙ_i, r_i ḡ_i, ḡ_i)). Como no se ejercen torques externos el momentum angular total se conserva (se trata de un problema de fuerzas centrales); es decir

(15)
$$L = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\theta}_i = \text{cte.}$$

Se trata, entonces, de minimizar E_mec sujeto a la ligazón (15). Debemos encontrar pts. estacionarios de la fn. E_mec + λ L

es decir un "punto" de coordenadas $(\hat{r}_i, \hat{\theta}_i, \hat{z}_i; \dot{\hat{r}}_i, \dot{\hat{\theta}}_i, \dot{\hat{z}}_i)$ tal que

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{r}_i} (E_{mec} + \lambda L) \\ \vdots \\ etc \end{aligned} \right|_{(\hat{r} \dots)} = 0 \quad (16)$$

(se entiende que $E_{mec} + \lambda L$ es una fn. de las 6N coordenadas $r_i, \theta_i, z_i, \dot{r}_i, \dot{\theta}_i, \dot{z}_i$ en que i recorre las partículas de gas, que suponemos son N).

Introduciendo (14) y (15) en (16) obtenemos las siguientes ecs.:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i} (E_{mec} + \lambda L) = 0 \Rightarrow m_i \dot{r}_i \dot{\theta}_i^2 + GM \frac{m_i z_i}{(r_i^2 + z_i^2)^{3/2}} + \lambda m_i r_i \dot{\theta}_i^{-2} = 0 \quad (17a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_i} (\quad) = 0 \Rightarrow \text{"trivial"} \quad (17b)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i} (\quad) = 0 \Rightarrow GM \frac{m_i z_i}{(r_i^2 + z_i^2)^{3/2}} = 0 \quad (17c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{r}_i} (\quad) = 0 \Rightarrow m_i \dot{r}_i = 0 \quad (17d)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_i} (\quad) = 0 \Rightarrow m_i r_i^2 \dot{\theta}_i + \lambda m_i r_i^2 = 0 \quad (17e)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{z}_i} (\quad) = 0 \Rightarrow m_i \dot{z}_i = 0 \quad (17f)$$

De estas 5 ecs. se deduce que

$$r_i = cte = \left(\frac{GM}{\lambda^2} \right)^{1/3} \quad (\text{esto se deduce de (17a)}).$$

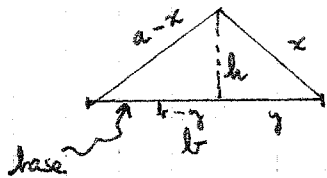
$$z_i = cte = 0$$

$$\dot{\theta}_i = -\lambda$$

Ejercicio: (Courant & Hilbert; ref. [1] pág 165 (a)).

"De todos los Δ^s con base dada el Δ isósceles es el que tiene área máxima"

Solución:



Como el área es: $S = \frac{1}{2}bh$, maximizar S es equivalente a maximizar h ó h^2 .

Del dibujo:

$$h^2 = x^2 - y^2$$

Por otra parte $(a-x)^2 = h^2 + (b-y)^2$. De estas dos expresiones tenemos $a^2 - 2ax = b^2 - 2by$; De aquí $y = \frac{b^2 - a^2 + 2ax}{2b}$. Entonces

$$h^2 = x^2 - \left(\frac{a^2 - 2ax - b^2}{2b} \right)^2. \text{ Maximizar } h^2 \Rightarrow \frac{\partial h^2}{\partial x} = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2} //$$

+

Así pues, el material de gas y fragmentos se distribuye en un anillo ($r_i = r_0, z_i = 0$) y se puede calcular su radio ($r_i = (\frac{GM}{\lambda^2})^{1/3}$) y la pérdida de energía mecánica ΔE .

Es preciso, todavía, obtener λ en fn. de E y L . Reemplazando el valor de r_i y de $\dot{\theta}_i$ en (15) obtenemos

$$L = \sum_i m_i \left(\frac{MG}{\lambda^2} \right)^{2/3} (-\lambda)$$

de donde

$$\lambda = - \frac{m^3 M^2 G^2}{L^3} \quad (\text{aquí } m \equiv \sum_i m_i)$$

de aquí, el radio del anillo es:

$$r = \left(\frac{GM}{\lambda^2} \right)^{1/3} = \frac{L^2}{m^2 M G} \quad \text{ec. (14)}$$

y reemplazando en la expresión de la energía se obtiene

$$\Delta E = E + \frac{1}{2} \frac{m^3 M^2 G^2}{L^2} \quad //$$

NOTA: Para otros problemas, ver ref. [1], pgs. 165-167.
[Ver a la vuelta de la pág. 9]

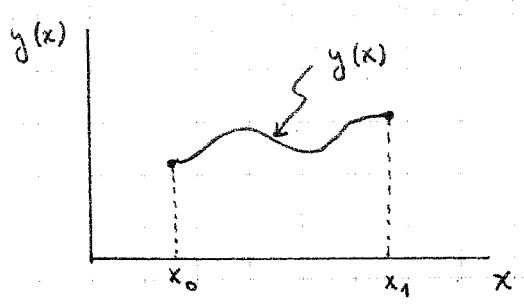
§2. FUNCIONALES: El cálculo de variaciones también se origina en la búsqueda de extremos ó de puntos estacionarios. Su meta, sin embargo, es encontrar extremos de "funcionales", en vez de extremos de funciones en \mathbb{R}^N (i.e., que dependen de un nº finito de variables). Un "funcional" es una cantidad que depende de una (ó mas) funciones. En otras palabras el dominio de un funcional es un cto. o espacio de fns. admisibles, en vez de una región o subcjo. de \mathbb{R}^N .

Nota Bibliográfica:

La historia del "Cálculo de Variaciones" puede verse en: G. A. Bliss; "Calculus of Variations" Chicago, 1925. Ver también E. T. Bell, "Men of Mathematics", Simon & Schuster, 1937, págs. 133 & 134. El origen del Cálculo de Variaciones se remonta a 1696, año en que Juan Bernoulli, 1° (1667-1748) en una carta propuso el problema de encontrar las líneas de deslizamiento más rápidas (BRAQUISTÓCRONAS). (ver págs. 131³⁵ de estos apuntes). Este problema fue resuelto por el propio Juan Bernoulli, 1°, su hermano Jacobo 1° y varios otros el año 1697. Previamente Fermat había formulado otro problema variacional en óptica geométrica: "un rayo de luz sigue aquella trayectoria a lo largo de la cual se demora el menor tiempo (entre dos puntos dados)". (ver pág 165 y 170, ref. [1]) (circa 1650).

Ver Goldstine op. cit.

Ejemplo:



La "longitud" L de una curva $y = y(x)$ entre los valores x_0 y x_1 es un ejemplo simple de fncal.

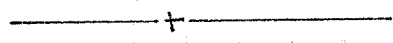
$$L[y(x)] \equiv \int_{x_0}^{x_1} (1 + y'^2(x))^{1/2} dx \quad (18)$$

$$y' \equiv \frac{dy}{dx}$$

Así a c/curva $y(x)$ definida entre x_0 y x_1 , este funcional "L" le asigna el valor $L[y(x)]$ que depende de todo el gráfico de la fn. $y(x)$. El espacio de fns. admisibles, o dominio del fncal. L , consiste de todas las fns. continuas en $[x_0, x_1]$ con derivada continua por pedazos en ese intervalo.

Este tipo de "funcionales" aparece en muchos problemas de física, en particular en Mecánica que es lo que aquí nos preocupa.

Comentario: Aunque un "funcional" no se puede expresar como una fn. en un n° finito de variables puede considerarse como una "fn. en un n° infinito de variables". En efecto supongamos que en (18) expresamos las "fns. argumentos" $y(x)$ en series de Fourier. El funcional $L[y(x)]$ depende entonces de los coeficientes de dicha expansión, que son un n° infinito de variables.



§ 3. CALCULO VARIACIONAL : El cálculo variacional estudia los métodos que permiten hallar los extremos (valores máximos y mínimos) de los funcionales (ó en general los pto. estacionarios de éstos) mediante la búsqueda de las "fns. argumentos", dentro del espacio de fns. admisibles, para las cuales el funcional toma el valor estacionario ó extremo.

NOTA: En rigor, deberíamos preocuparnos en detalle del espacio de fns. admisibles para c/fncal. Luego definir una topología en dicho espacio en la cual el fncal. sea continuo y el dominio compacto para ase-

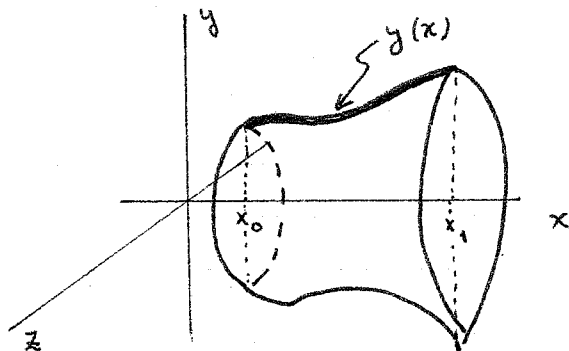
NOTA BIBLIOGRAFICA :

Una discusión interesante sobre el principio de Fermat se encuentra en el libro de R. Feynman, "Lectures on Physics" vol. 1 (Add. Wesley 1975) sección 26.3. Ahí se pueden encontrar numerosas aplicaciones.

guar la existencia de tales extremos. En este curso dejaremos de lado este "tipo de preocupaciones".

A continuación daremos una lista de ejemplos que ilustran el problema del Cálculo de Variaciones:

i) Superficie Mínima de Revolución:



Supongamos que la curva $y(x) \geq 0$; $x \in [x_0, x_1]$ es rotada alrededor del eje x , como se ve en la figura. La superficie resultante, acotada por los planos $x=x_0$ y $x=x_1$ tiene el área

$$S[y(x)] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \underbrace{\sqrt{1+(y')^2}}_{\substack{ds \\ \uparrow \\ \text{elemento de longitud} \\ \text{de la curva } y(x)}} dx \quad (19)$$

Un problema variacional entonces es encontrar la curva $y(x)$ que minimiza el funcional $S[y(x)]$ con valores dados de y en los extremos " x_0 " y " x_1 " (i.e. $y(x_0)$, $y(x_1)$ fijos).

ii) Principio de Fermat: "Traectoria de un rayo de luz en un medio inhomogéneo en 2-dim." (Ver nota Bibl. a la vuelta de la pág. 11).

De acuerdo al principio de Fermat la trayectoria de un rayo de luz en un medio bidimensional inhomogéneo en el cual la velocidad de la luz es $c(x,y)$, es aquella que minimiza el funcional

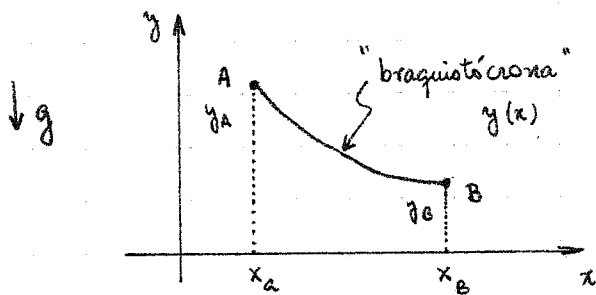
$$T[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{c(x,y)} \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_{ds} dx$$



Se entiende que x_0, x_1 i $y(x_0)$ e $y(x_1)$ estan fijos ;
 $[(x_0, y(x_0)), (x_1, y(x_1))$ son los extremos del rayo]. Es decir
 para ir del pto. $(x_0, y(x_0))$ al pto. $(x_1, y(x_1))$ el rayo
 (o mejor la luz) sigue aquello trayectoria que minimiza el tiempo
 de viaje. -

iii) PROBLEMA DE LA BRAQUISTÓCRONA ⁽¹⁾ (ver nota bibliográfica a la vuelta

de la pág. 10) : en este problema se exige determinar la línea que une
 dos puntos A y B que no pertenecen a una misma recta ver-



tical, que posea la propiedad que un punto material
 se deslice sin roce por dicha curva, por la influen-
 cia de la gravedad, partiendo del reposo desde A
 hasta B en el menor tiempo posible:

Si el pto. material parte del reposo desde
 A, cuando se encuentre a una altura
 y tendrá la velocidad

$$|\vec{v}| = [2g(y_A - y)]^{1/2} \quad (20)$$

[(20) es una consecuencia inmediata de la conservación de la energía :
 $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + mgh$]. Así, el tiempo que se demora el pto. en
 caer de A a B es:

$$T[y(x)] = \int_{x_A}^{x_B} \underbrace{\left[\frac{1 + y'^2}{2g(y_A - y)} \right]^{1/2}}_{= \frac{ds}{|\vec{v}|}} dx \quad (21)$$

(1) ó "líneas de deslizamiento más rápido".



Entonces el problema de la braquistócrona equivale a encontrar la curva $y(x)$ que minimiza $T[y(x)]$ manteniendo fijo los extremos A y B.

(1)
 (iv) CURVAS GEODESICAS: Sobre una superficie dada, encontrar la curva de longitud mínima entre dos puntos dados. Si parametrizamos la superficie dada en forma paramétrica: $x = x(u, v)$; $y = y(u, v)$ & $z = z(u, v)$ en coordenadas rectangulares y denotamos por

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \quad g = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \quad (22)$$

entonces la longitud L de una curva, sobre la superficie dada, definida por la ecuación $v = v(u)$ que une los pto. con parámetros u_0 y u_1 es:

$$L[v(u)] = \int_{u_0}^{u_1} \left(e + 2f \frac{dv}{du} + g \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \right)^{1/2} du. \quad (23)$$

Entonces, una "geodésica" es aquella curva que minimiza el funcional $L[v(u)]$.

Comentario: En un plano las geodésicas son las líneas rectas; en una esfera son los círculos máximos. Pero en el caso de la esfera se debe tener un poco de cuidado: si dos pto. no son antípodales, existen dos geodésicas que los unen pero una de ellas tiene distancia mínima y la otra máxima. Si el pto. inicial y el final son antípodales, entonces existen ∞^s geodésicas. También se debe tener cuidado en el caso de un

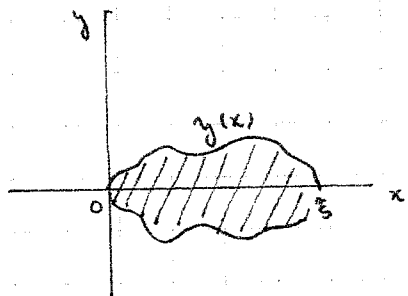
(1) Nota Bibliográfica: Ver el libro D. Struik: "Geometría Diferencial Clásica" 2ª ed.; AGUILAR (1961) págs. 160-165

(2) Obtener (23) es fácil; nótese que $ds = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}$ y que $dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$, etc....

U.S. DEPARTMENT OF THE INTERIOR
BUREAU OF LAND MANAGEMENT
1016 EAST 17TH AVENUE
DENVER, COLORADO 80202
303-733-1311

cilindro recto de base circular. Ver discusión en el libro de D.J. Struik, op. cit.

- v) PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS : Este es un problema muy antiguo, que se remonta al tiempo de los Griegos y según la leyenda a la fundación de la ciudad de Cartago. Ver historia en el libro de E.T. Bell, a que se hace referencia a la vuelta de la pág. 10. En su forma original el problema era: "Encontrar una curva cerrada, de perímetro dado, que encierre la mayor superficie".



Suponiendo que la curva es convexa y dividida en dos partes de igual área por el eje x , el problema se reduce a maximizar la integral

$$\int_0^{\xi} y(x) dx, \quad (24)$$

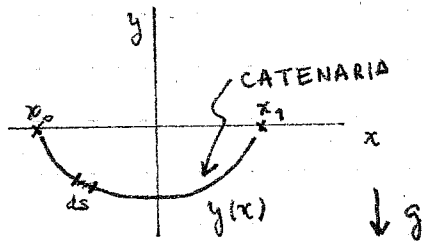
eligiendo adecuadamente el pts. ξ y la curva $y(x)$, de modo que

$$\int_0^{\xi} \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{1/2} dx = l, \text{ dado.} \quad (25)$$

Aquí, $y(x)$ debe ser una función continua, con 1ª derivada continua por pedazos en el intervalo $0 \leq x \leq \xi$ y tal que $y(0) = y(\xi) = 0$.

En general, todo problema en el cual se trata de extremar una expresión integral manteniendo otra fija se denomina ISOPERIMETRICO. Un ejemplo típico es el de la CATENARIA, i.e. "Determinar la posición de una cuerda uniforme de longitud dada con sus extremos fijos bajo la influencia de la gravedad".

El peso de un elemento " ds " de la curva es $\rho g ds$ (ρ : "densidad")
y su energía potencial $\rho g y(x) ds$.



"La Catenaria"

Así su energía potencial (de la cuerda) es:

$$E[y(x)] = \rho g \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad (26)$$

mientras que su largo está dado por

$$L[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 \right]^{1/2} dx. \quad (27)$$

Entonces, el problema de la CATENARIA consiste en encontrar la curva $y(x)$, continua, de derivada seccionalmente continua, que minimiza (26) sujeto a la restricción $L[y(x)] = l$ dado, (y con sus extremos fijos $y(x_0) = y(x_1) = 0$)

ADVERTENCIA:

Una advertencia general es conveniente hacer a estas alturas (antes de entrar al § 5).

La ecu. de Euler (34) es solo condición necesaria para la existencia de un mínimo. Para estar seguros que en realidad se trata de un mínimo se debe verificar que $J(\bar{y}) \leq J(y)$ para todo y en el espacio de fus. adecuados.

Por ej. para el problema de la Braquistócrona estas condiciones suficientes fueron discutidas desde un principio por John Bernoulli, Newton, etc. (ver el libro de Goldstine, op. cit. pp. 64, 65, 66).

§ 5. ECUACIONES DE EULER.

Para los fines de este curso nos basta con discutir los métodos "indirectos" para tratar los problemas variacionales. Estos consisten en reducir el problema variacional al estudio de ecs. diferenciales. Estos métodos se remontan a L. Euler y las ecs. correspondientes se llaman ecs. de Euler (o de Euler-Lagrange). La otra manera de discutir un principio variacional consiste en estudiar el funcional en sí, sin recurrir a su variación; este método se ha llamado tradicionalmente el método directo (ver ref. [1] págs 174 → 183)

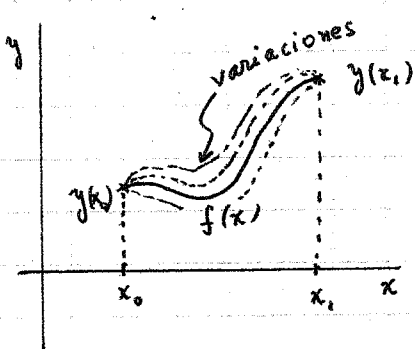
Las ecs. diferenciales provenientes de un principio variacional representan condiciones necesarias, pero no siempre suficientes, las cuales debe satisfacer una función si es que es un extremo del principio variacional.

Aquí estudiaremos el siguiente funcional genérico

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, \frac{dy}{dx}) dx \quad (28)$$



en que $x_0, x_1, y(x_0), y(x_1)$ están fijos. De esta forma son todos los ejemplos presentados en la sección 3. Se supone que F tiene 2^{as} derivadas continuas c/n a c/u de sus argumentos. También trabajaremos con fus. y tales que $\frac{d^2y}{dx^2}$ es continua. En esta sección queremos determinar condiciones necesarias para que $y(x)$ minimice $J[y]$.



Supongamos que $f(x)$ es la solución del problema variacional dado por la ecu. (28). Esto significa que para toda fn. "cercana" a $f(x)$, digamos $y(x)$ tendremos

$$J[y] \geq J[f] \tag{29}$$

Sea $\eta(x)$ una fn. cualquiera de 2^a deriv. continua y tal que $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$. Sea ϵ un parámetro pequeño de modo que la función

$$y(x) = f(x) + \epsilon \eta(x) \tag{30}$$

es "cercana" a $f(x)$. Para $\eta(x)$ dado, la condición (29) nos dice que la función de ϵ siguiente

$$\phi(\epsilon) = J[f + \epsilon \eta] \tag{31}$$

tiene un mínimo para $\epsilon = 0$. La condición necesaria para que esto ocurra es que $\left. \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$. De la definición de J (ec. (28)) y ϕ (ec. (31)) tenemos que

esta condición implica:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\eta(x) \frac{\partial F}{\partial y}(x, f, f') + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, f, f') \eta'(x) \right] dx = 0 \tag{32}$$

Nota: En la ecu. (32) y en las que siguen usaremos la notación

$$\eta'(x) \equiv \frac{d\eta}{dx} ; \quad y'(x) \equiv \frac{dy}{dx} ; \text{ etc.}$$

Ahora, dado que $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ integrando por partes el 2º término de la ec. (32) obtendremos:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y}(x, f, f') - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'}(x, f, f') \right] \right\} \eta(x) dx = 0 \quad (33)$$

Como $\eta(x)$ es arbitraria y $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)$ continuo en $[x_0, x_1]$, de (33) concluimos:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f, f') - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'}(x, f, f') \right] = 0} \quad (34)$$

en que $f(x)$ es la soln. del problema deseada. La ecn. (34) se conoce como ecuación de Euler y es condición necesaria para que $f(x)$ extremice el funcional (28).

NOTA: De las ecs. (31) \rightarrow (34) observamos que: $(\varphi(\varepsilon) \equiv J[f + \varepsilon \eta])$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\varphi}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right\} dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \cdot \frac{\delta J}{\delta y(x)} dx, \end{aligned} \quad (35)$$

en que hemos introducido la notación

$$\frac{\delta J}{\delta y(x)} \equiv \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right). \quad (36)$$

$\frac{\delta J}{\delta y(x)}$ se denomina "Derivada funcional" del funcional $J[y]$ %/a a

la función $y(x)$. Obsérvese que $\left. \frac{d\varphi}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$ como funcional de $\eta(x)$ es un funcional lineal.

En Matemáticas este funcional lineal se conoce como derivada de Frechet de $J[y]$ c/a a $y(x)$.

Desarrollemos ahora el segundo término de la ecuación (34). Obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot y'' = 0, \quad (37)$$

en que hemos suprimido los argumentos de las fn. para simplificar la notación. Nótese que (37) es una ecuación diferencial ordinaria de 2° orden para la incógnita $y(x)$; además la fn. $y(x)$ debe satisfacer las Condiciones de Borde $y(x_0) = y_0$ dado, $y(x_1) = y_1$ dado. Así que en principio el problema tiene solución.

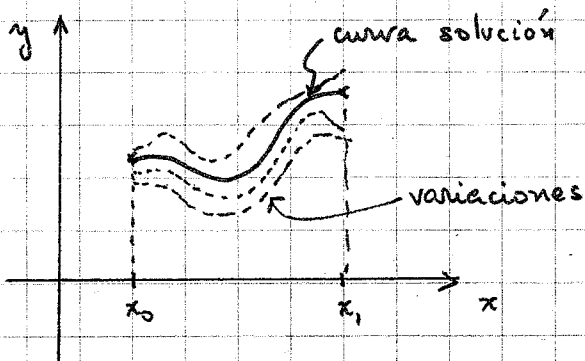
PRIMERA INTEGRAL: En el caso particular que F es solo función de y e y' i.e. $F = F(y, y')$ la ecn. (37) se puede integrar una vez y obtener

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{cte.} \quad (38)$$

(ver problema n° [4], más abajo). Esta ecuación es de primer orden en y . En principio se puede despejar y' en fn. de y (prob. algebraico) y luego integrar.

VARIACIONES MAS GENERALES: Al derivar la ecn. de Euler (34), como condición necesaria para que $y(x)$ sea un extremo del funcional $J[y]$ consideramos la familia de fn. $y(x) + \epsilon \eta(x)$ con $\eta \in C^2(x_0, x_1)$ arbitraria, y ϵ parámetro pequeño. El término $\epsilon \eta(x)$ usualmente se denomina la variación de la solución $y(x)$ y se denota por $\delta y(x)$. Hasta ahora supusimos que los extremos de las funciones admisibles estaban fijos; i.e. $y(x_0)$ e $y(x_1)$ eran fijos. Es conveniente en muchos problemas considerar "variaciones" más generales. En particular podemos tener situaciones en que $y(x_0)$ y/o $y(x_1)$ no están fijos, es decir el funcional $J(y)$ depende también de los valores extremos de las fn. admisibles y por supuesto, también procede extremar J c/a a estos valores.

En este caso debemos permitir que $\eta(x)$ esté libre en x_0 y/o x_1 .
(i.e. no imponemos necesariamente $\eta|_{x_0} = \eta|_{x_1} = 0$).



"variaciones sin los extremos fijos"

En este caso obtendremos

$$\frac{d}{d\varepsilon} J[y+\varepsilon\eta] \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta J}{\delta y}(x) \eta(x) dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta(x) \Big|_{x_0}^{x_1} \quad (39)$$

pero al integrar por partes sobrevivirá el término de "superficie". Imponiendo ahora la condición que $\eta(x)$ sea un extremo de J , i.e. $\frac{dJ}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0$ obtenemos tanto la ecn. de Euler:

$$\frac{\delta J}{\delta y(x)} = 0, \quad (40)$$

(para lo cual elegimos una familia $\eta(x)$ que se anula en x_0, x_1),
como las condiciones de frontera:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_0} = \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1} = 0. \quad (41)$$

Estas condiciones de frontera incluyen el caso anterior, pues si imponemos que $y(x_0) = y_0$; $y(x_1) = y_1$ dados entonces $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ y (41) es satisfecha automáticamente. Pero, ahora si un extremo es libre, digamos $y(x_0)$ no es dado a priori, entonces $\eta(x_0)$ es arbitrario y debemos imponer

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x_0} = 0 \quad (42)$$

como nueva condición de frontera. (ver problema n° [] mas abajo)

Por último veremos en la sección condiciones aún más generales. Allí, incluso dejaremos libres las posiciones de los extremos, i.e. los valores x_0 y x_1 .

Discutiremos ahora, brevemente, tres generalizaciones obvias de lo que acabamos de ver en esta sección:

(i) Extremos de Funcionales que Dependen de Varias fns.:

En vez del funcional de la ecu. (28) podríamos considerar funcionales que dependen de más de una fn. Por ejemplo:

$$J[u, v] \equiv \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, v, u', v') dx \quad (43)$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que tanto u como v están fijas en los extremos. Introducimos las variaciones:

$$u \rightarrow u(x) + \epsilon \eta(x)$$

$$v \rightarrow v(x) + \sigma \delta(x)$$

en torno a las fns. $u(x), v(x)$ que extremizan $J[u, v]$. Debemos, por lo tanto, tener

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \epsilon} (u + \epsilon \eta, v + \sigma \delta) \right|_{\substack{\epsilon=0 \\ \sigma=0}} = \left. \frac{\partial J}{\partial \sigma} (u + \epsilon \eta, v + \sigma \delta) \right|_{\substack{\epsilon=0 \\ \sigma=0}} = 0 \quad (44)$$

Las ecs. (44) implican, trivialmente, que

$$\frac{\delta J}{\delta u} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\delta J}{\delta v} = 0, \quad (45)$$

como ecs. de Euler. La generalización a más fns. es inmediata así como lo es la generalización a variaciones con extremos variables.

(ii) Problemas en Varias Dimensiones: En vez de considerar fcs. $y(x)$ definidas sobre un subconj. de \mathbb{R} , podemos también considerar fcs. y definidas sobre un subconj. de \mathbb{R}^n . Es decir fcs. de la forma

$$J[y] = \int_{\Omega} F(x, y, \nabla y) dx \quad (46)$$

en que $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ y ∇y denota el gradiente de $y(x)$. Supongamos, por simplicidad, que $y(x)$ está fijo en la frontera $\partial\Omega$ del dominio Ω . Consideremos nuevamente las variaciones

$y(x) + \epsilon \eta(x)$
 ϵ pequeño, $\eta(x) = 0$ en $\partial\Omega$, $\eta \in C^1(\Omega)$. Imponiendo que $y(x)$ extremiza $J[y]$, debemos tener

$$\left. \frac{dJ}{d\epsilon} (y + \epsilon \eta) \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad (47)$$

pero

$$\left. \frac{dJ}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \nabla \cdot \frac{\partial F}{\partial \nabla y} \right) \eta(x) dx \quad (48)$$

en que hemos usado el teorema de Gauss (i.e. "integración por partes") para obtener el 2º término de (48). Entonces (47) implica:

$$\frac{\delta J}{\delta y} \equiv \frac{\partial F}{\partial y} - \nabla \cdot \frac{\partial F}{\partial \nabla y} = 0 \quad (49)$$

NOTA: La notación que hemos elegido significa lo siguiente:

$$\nabla \cdot \frac{\partial F}{\partial \nabla y} \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial y_{,i}} \right)$$

en que $y_{,i} = \frac{\partial y}{\partial x_i}$. . .



(iii) FUNCIONALES MAS GENERALES : finalmente consideraremos fnales. de la forma

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx, \quad (50)$$

i.e. F no solo depende de x, y, y' sino que también de un n° cualquiera de derivadas de mas alto orden. Para estudiar los extremos de $J[y]$ consideraremos variaciones

$y(x) + \epsilon \eta(x)$,
 en que $y(x)$ es la fn. que extrema el fnal. $J[y]$, y $\eta(x) \in C^n(x_0; x_1)$ es tal que $\eta(x_0) = \eta(x_1) = \eta'(x_0) = \eta'(x_1) = \dots = \eta^{(n-1)}(x_0) = \eta^{(n-1)}(x_1) = 0$.
 Es decir, en el espacio de fn. admisibles para $J[y]$ suponemos que tanto y como sus $(n-1)$ primeras derivadas estan fijas en los extremos.
 Imponiendo,

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} J(y + \epsilon \eta) \right|_{\epsilon} = 0,$$

para cualquier $\eta(x)$ que satisfaga las condiciones de borde, obtenemos

$$\frac{\delta J}{\delta y} = 0, \text{ en que ahora }^{(1)}$$

$$\frac{\delta J}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(i)}} \right) = 0. \quad (51)$$

En particular, si $n=2$, $\frac{\delta J}{\delta y} = 0$ queda:

$$\frac{\delta J}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0. \quad (52)$$

Dejamos como un ejercicio simple obtener (51).-

⁽¹⁾ Nota: La ec. (51) es una E.D.O. de orden $2n$ y por lo tanto tiene $2n$ constantes de integración que, en principio, quedan determinadas por los valores de $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ en ambos extremos, que son dados.

Nota:

En el problema [4] se pueden introducir nuevas soluciones. Es decir no todas las sol. de (38) son soluciones de (34) (i.e. de la Ecu. de Euler). En efecto $y'=0$ (i.e. $y = \text{cte}$) es sol. de (38) pero no de (34).

(2)
$$y = \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{x} + 1 \right)$$

(3)
$$y = \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{x} + 1 \right)$$

(3) $y = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{x} + 1 \right)$

Ejercicios (Sección 3):

- [4] Demuestre que si la fn. $F(x, y, y')$ que aparece en la ecuación de Euler solo depende de y e y' entonces tal ecuación se puede integrar una vez para obtener⁽¹⁾

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{cte.}$$

Solución: Multipliquemos la ecn. de Euler (escrita como la ecn. (34)) por y' :

$$y' \frac{\partial F}{\partial y} - y' \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

Ahora sumamos y restamos $y'' \cdot \frac{\partial F}{\partial y'}$:

$$y' \frac{\partial F}{\partial y} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} - y'' \frac{\partial F}{\partial y'} - y' \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0,$$

$$\frac{d}{dx} (F); \text{ pues } \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

i.e.,

$$\frac{d}{dx} F - y'' \frac{\partial F}{\partial y'} - y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

o'

$$\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad \blacksquare$$

- [5] Demostrar en detalle la ecn. de Euler para funcionales que dependen de derivadas de ^{hasta} orden "n". Es decir derivar en detalle la ecn. (51). ¿Cuáles serían las condiciones de borde en x_0 y x_1 si dejamos libre y en los extremos? Derive una ecn. similar a la ecn. (38) en el caso en que F no depende explícitamente de x .

(1) Ver pág. 20, ecn. (38)

(2) Ver nota al reverso de pág. 24



Solución: El detalle de la derivación de (51) es simple y lo dejamos como ejercicio al lector. Así como también las C.B. en el caso que los extremos estén libres. En cuanto a una primera integral, en el caso $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, trabajaremos por simplicidad con el caso $n=2$, i.e. con la ecn. (52). Tal como en el ejercicio [4] multiplicamos dicha ecn. por y' y sumamos y restamos:

$$y'' \frac{\partial F}{\partial y'} + y''' \frac{\partial F}{\partial y''} \quad \text{Así,}$$

$$y' \frac{\partial F}{\partial y} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} + y''' \frac{\partial F}{\partial y''} - y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + y' \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) - y'' \frac{\partial F}{\partial y'} - y''' \frac{\partial F}{\partial y''} = 0.$$

Ya que $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, los 3 primeros términos representan $\frac{dF}{dx}$.

$$\frac{dF}{dx} - y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - y'' \frac{\partial F}{\partial y'} + y' \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) - y''' \frac{\partial F}{\partial y''} = 0$$

Ahora el 2º y 3º términos son igual que en el ejercicio [4] y los últimos dos son una derivada exacta. Así obtenemos:

$$\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) - y'' \frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0,$$

i.e.⁽¹⁾

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) - y'' \frac{\partial F}{\partial y''} = \text{cte.} \quad \square$$

[6] Demuestre que $\int_0^\pi [(y')^2 - y^2] dx \geq 0$ para toda función $y(x) \in C^1([0, \pi])$ tal que $y(0) = y(\pi) = 0$.

Solución: Sea $J[y] \equiv \int_0^\pi [(y')^2 - y^2] dx$. Se tratará de demostrar que $\min \{ J[y] \mid y(0) = y(\pi) = 0 \} = 0$ y por lo tanto $J[y] \geq 0$.

⁽¹⁾ Esta ecuación es de 2º orden en y . La ecn. de Euler de la cual hemos derivado esta ecn. es de 3º orden.

NOTA: Quizás, para complicar menos a los estudiantes se podría reemplazar (6) por,

" Demostrar que para las fns. $y(x)$ ^{definidas en $[0, a]$} continuas, con derivada seccionalmente continuas tales que $y(0) = 0$, $y(a) = A$ ($0 < a < \pi$) se tiene:

$$\int_0^a (y'^2 - y^2) \geq \frac{A^2}{2} \cot(a) "$$

Soln: Considere el fnal. $J[y] = \int_0^a (y'^2 - y^2)$.

La soln. de la ecu. de Euler es

$$y(x) = \frac{A}{\operatorname{sen} a} \operatorname{sen} x,$$

la cual satisface las C.B. dadas. Evaluando $J[y]$ en esta soln. obtenemos el resultado.

Nota: Puede verse que $J[y]$ no está acotado por arriba. Puede elegirse como $y(x) = \underbrace{\hspace{2cm}}$, en que y es pequeño e y' baila como "loco".

Calculamos los pto. estacionarios de $J[y]$. La condición necesaria para fn. que extremen $J[y]$ es la ecn. de Euler. En este caso $F(y, y')$ está dado por,

$$F(y, y') = (y')^2 - y^2 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y.$$

Así es que reemplazando en la ecn. de Euler (34) tenemos:

$$y'' + y = 0 \quad (53)$$

La solución de (53) que se anula en 0 y π es:

$$y(x) = A \operatorname{sen}(x)$$

Nótese que A no queda determinado por la ecn. de Euler así es que existen ∞ 's soluciones. Para todas estas soluciones $J[y] = 0$. Es fácil ver que $y(x) = A \operatorname{sen} x$ minimiza $J[y]$ o mejor dicho que $J[y] = 0$ es el mínimo de $J[y]$. Por un lado $J[y]$ es convexo en y^2 (no es estrictamente convexo, de ahí que existan ∞ 's soluciones) así es que se trata de un problema de minimización. También si evaluamos $J[y]$ en alguna otra fn. obtendremos $J[y] > 0$. [e.g. si $y(x) = x$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ y $y(x) = \pi - x$ para $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ entonces y es continua y posee derivada seccionalmente continua en $[0, \pi]$. Además satisface las C.B. Para esta fn. obtenemos $J[y] = \pi \left(1 - \frac{\pi^2}{12}\right) > 0$.].

NOTA: La demostración usual de este ejercicio se hace mediante series de Fourier. Si $y(x)$ es continua y de derivado seccionalmente continua en $[0, \pi]$ y además $y(0) = y(\pi) = 0$ podemos descomponer $y(x)$ en serie de Fourier de la forma

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(n\pi x)$$

de donde obtenemos $J(y) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (n^2 - 1) \geq 0$. \square

[7] Hallar los extremos de

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad (54)$$

con $y(a)$ e $y(b)$ dados.

Indicación: use coordenadas polares.-

Solución: En vez de escribir las fns. admisibles como $y(x)$ conviene describirlas como $r(\theta)$ en que $x = r \cos \theta$
 $y = r \operatorname{sen} \theta$. Así, podemos escribir el funcional

$$(54) \text{ como } J[r] = \int_a^\beta r \cdot ds$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = (dr^2 + r^2 d\theta^2)^{1/2} = [r^2 + (r')^2]^{1/2} d\theta.$$

Entonces:

$$J[r] = \int_a^\beta r (r^2 + (r')^2)^{1/2} d\theta = \int_a^\beta F(r, r') d\theta$$

α, β así como $r(\alpha)$ y $r(\beta)$ se determinan fácilmente a partir de $a, b, y(a)$ e $y(b)$. La condición necesaria para extremos es la ecv. de Euler para $r(\theta)$. Como $F = F(r, r')$ esto se puede escribir como

$$F - r' \frac{\partial F}{\partial r'} = \kappa \quad (\text{cte})$$

$$\left. \begin{aligned} F &= r (r^2 + r'^2)^{1/2} \\ \frac{\partial F}{\partial r'} &= \frac{r r'}{(r^2 + r'^2)^{1/2}} \end{aligned} \right\} F - r' \frac{\partial F}{\partial r'} = r^3 (r^2 + r'^2)^{-1/2} = \kappa$$

$$\text{i.e. } r^3 = \kappa (r^2 + r'^2)^{1/2} \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\kappa} (r^4 - \kappa^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \theta - \theta_0 = \kappa \int \frac{dr}{r (r^4 - \kappa^2)^{1/2}} \equiv \kappa \cdot I \quad (55)$$

Haciendo $r^2 = \kappa \cosh(\xi)$, $2r dr = \kappa \operatorname{senh}(\xi) d\xi$ tenemos

$$I = \frac{1}{2\kappa} \int \operatorname{sech}(\xi) d\xi = \frac{1}{2\kappa} \operatorname{arctg}(\operatorname{senh} \xi) = \frac{1}{2\kappa} \operatorname{arctg} \left[\left(\frac{r^4}{\kappa^2} - 1 \right)^{1/2} \right];$$

reemplazando I en (55) tenemos

$$2(\theta - \theta_0) = \operatorname{arctg} \left[\left(\frac{r^4}{k^2} - 1 \right)^{1/2} \right]$$

i.e. $r^4 = k^2 \left(1 + [\operatorname{tg}(2(\theta - \theta_0))]^2 \right) = k^2 [\sec(2\theta - 2\theta_0)]^2$

finalmente:

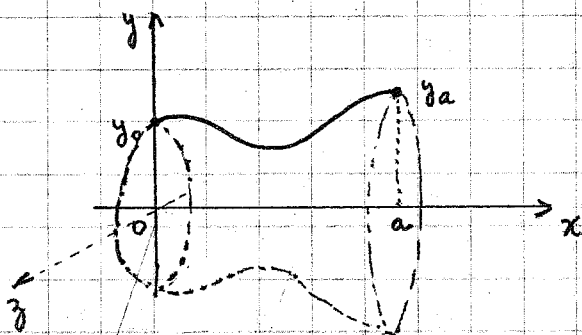
$$r(\theta)^2 = \frac{k}{\cos(2\theta - 2\theta_0)}$$

Las constantes θ_0 y k se determinan a partir de las condiciones de Borde en ambos extremos. -

[8] SUPERFICIE MINIMA DE REVOLUCION: (ver ejemplo (ii) pág. 12):

"Encuentre la curva que rotada en el eje OX da la mínima área de revolución". Los extremos de la curva están fijos.

Nota: Discuta su resultado como fn. de los valores en los extremos.



Soln: Se trata de analizar los extremos del funcional

$$J[y] = \int_0^a 2\pi y \sqrt{1+(y')^2} dx,$$

en que a , $y(0) = y_0$ e $y(a) = y_a$ son fijos.

La ecu. de Euler (38) nos da,

$$F = F(y, y') = 2\pi y \sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2\pi y \frac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}}$$

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{2\pi}{\mu} = \text{cte} \Rightarrow y = \frac{1}{\mu} \cdot (1+y'^2)^{1/2}$$

(he llamado μ a la cte. de integración $\frac{2\pi}{\mu}$, por conveniencia).

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{\mu^2 y^2 - 1}} = x + \alpha, \quad \alpha \text{ cte. de integración.}$$

Haciendo $y = \frac{1}{\mu} \cosh(\xi)$; $dy = \frac{1}{\mu} \operatorname{sh}(\xi)$ en la integral, obtenemos

$$x + \alpha = \frac{1}{\mu} \operatorname{arccosh}(\mu y)$$

de donde:

$$y(x) = \frac{1}{\mu} \cosh(\mu x + \mu \alpha). \quad (56)$$

Aquí μ y α son constantes de integración que dependen de a, y_0, y_a .

Para discutir la dependencia de la solu. en a, y_0, y_a solo consideraremos el caso especial $y_0 = y_a$. Como debemos imponer $y_0 = \frac{1}{\mu} \operatorname{ch}(\mu \alpha)$ y $y_a = \frac{1}{\mu} \operatorname{ch}(\mu a + \mu \alpha)$, la condición $y_0 = y_a \Rightarrow \mu \alpha = -\frac{\mu a}{2}$. Así en este caso,

$$y(x) = \frac{1}{\mu} \operatorname{ch}\left(\mu\left(x - \frac{a}{2}\right)\right) \quad : \text{ simétrica c/a a } x = \frac{a}{2},$$

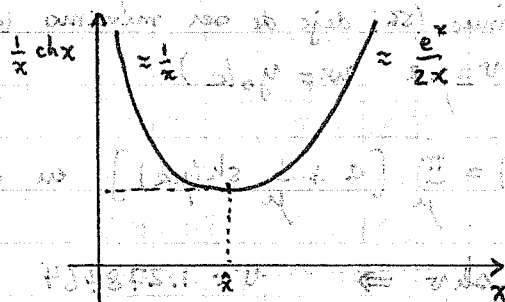
μ queda determinado por

$$y_0 = \frac{1}{\mu} \operatorname{ch}\left(\frac{\mu a}{2}\right)$$

o sea

$$\frac{2y_0}{a} = \frac{2}{\mu a} \operatorname{ch}\left(\frac{\mu a}{2}\right) \quad (57)$$

El gráfico de $\frac{1}{x} \cosh(x)$ es aproximadamente:

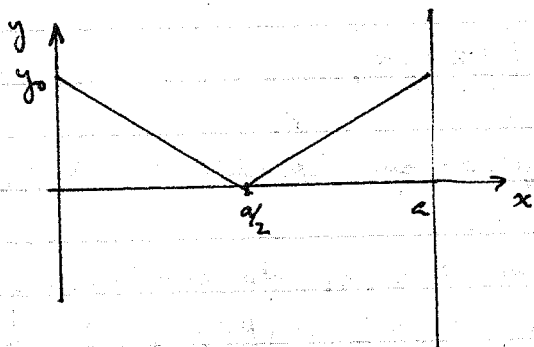


El mínimo de $\frac{1}{x} \operatorname{ch} x$ ocurre para $\hat{x} = 1.1997$ y vale 1.5088796 .

Comentarios:

(1) En realidad para $(a=1)$, $y_0 = 1.5088\dots$ existe otro curva (continua pero de derivada discontinua) que tiene la mismo area. Este curva está dado por

$$y = y_0 \left(1 - \frac{2x}{a}\right) \quad \text{para } x \in [0, \frac{a}{2}]$$



$$y(x) = y_0 \left(2x - a\right) \frac{1}{a} \quad \text{para } x \in [\frac{a}{2}, a]$$

El area del manto de revolución para esta curva está dado por

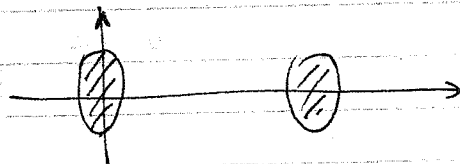
$$J[y] = (2\pi y_0) \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{2y_0}{a}\right)^2}$$

Para $a=1$ e $y_0 = 1.5088\dots$

$J[y] = 4.29036\dots$, es decir el mismo valor anterior.

(2) En verdad, para y_0 suficientemente pequeño los sol. anteriores no son mínimos absolutos. El mínimo absoluto es la curva (no continua, ni diferenciable,

$$\begin{aligned} y &= y_0 & x &= 0 \\ y &= 0 & 0 < x < a \\ y &= y_0 & x &= a \end{aligned}$$



y su area es exactamente $2(\pi y_0^2)$ (el area de los tapas).

Entonces la solución continua (56) dejó de ser mínimo (absoluto) para y_0/a tal que (hagamos $v \equiv \mu a$ $w = y_0/a$)

$$2(\pi y_0^2) = \frac{\pi}{\mu} \left[a + \frac{1}{\mu} \text{sh}(\mu a) \right] \quad \text{en que} \quad \frac{3}{\mu a} \text{ch}\left(\frac{\mu a}{2}\right) = \frac{2y_0}{a}$$

$$\Rightarrow 1 + \text{ch}v = v + \text{sh}v \Rightarrow \begin{aligned} v &= 1.278464 \\ w &= 0.947513 \equiv y_0/a \end{aligned}$$

en este caso, $J_- = a^2 5.64092$ y $2\pi y_0^2 = a^2 5.64092$

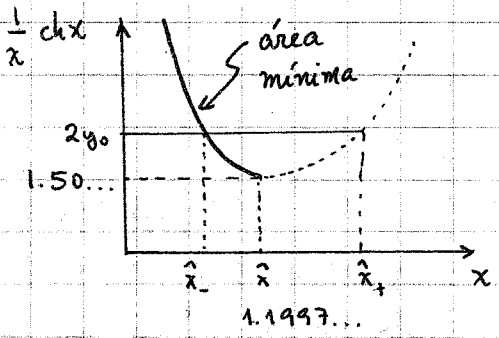
Del análisis de la ecn. (57) obtenemos que :

- i) Si $\frac{2y_0}{a} < 1.5088\dots$ no existe solución de (57) para μ .
- ii) Si $\frac{2y_0}{a} = 1.5088\dots$ existe una sola solución de (57) para μ .
- iii) Si $\frac{2y_0}{a} > 1.5088\dots$ existen dos soluciones de (57) para μ .

En términos de la solución $y(x) = \frac{1}{\mu} \operatorname{ch}\left(\mu\left(x - \frac{a}{2}\right)\right)$ (cuando ésta existe) el área está dada por

$$J[y] = 2\pi\mu \int_0^a y^2 dx = \frac{\pi}{\mu} \left\{ a + \frac{1}{\mu} \operatorname{sh}(\mu a) \right\} \quad (58)$$

En este curso no nos preocuparemos de las condiciones suficientes de mínimo ó máximo. Para el lector interesado, referimos a [2] págs. 358→375 (cap. 8). - Sin embargo, con el objeto de completar un poco más este problema estudiaremos numéricamente las dos ramas del dibujo de la pág. 30.



Con el objeto de este análisis, elijamos $a = 1$. Entonces, para un valor dado de y_0 , siempre que éste sea mayor que $\frac{1}{2}(1.5088\dots)$ existían dos soluciones de la ecn. (57) para μ . Denotemos estas por μ_- y μ_+ respectivamente. Las áreas correspondientes las denotaremos por J_- y J_+ . Obtene-

mos numéricamente la tabla siguiente:

$2y_0$	μ_-	μ_+	J_-	J_+
3.0	0.7090	5.6555	9.2427	14.5941
2.0	1.1788	4.2536	5.9918	6.8457
1.7	1.54562	3.51958	4.97679	5.17110
1.5088...	2.3994..	2.3994	4.29036	4.29036

+ Ver comentarios en pág. al frente.

Conviene trabajar con y_0 y μ : todo escala convenientemente y las áreas se miden en unidades de π^2 .

De esta tabla numérica concluimos:

- (i) La rama de la izquierda " μ_- " es la que corresponde a un mínimo del área de revolución para un y_0 dado.
- (ii) Para $2y_0 < 1.5088\dots$ no hay solución de este problema. Para $2y_0 \geq 1.5088\dots$ existe una solución única y el área mínima aumenta con y_0 .
- (iii) Para $2y_0 = 1.5088\dots$ y $a=1$ $\mu_- = \mu_+$ minimiza la ecn. (58) considerado como fn. de μ .

[9] GEODÉSICAS DEL PLANO, LA ESFERA Y EL CILINDRO

Determine las curvas de mínima distancia (geodésicas) sobre un plano, un cilindro y una esfera. Discuta la unicidad de sus soluciones.

NOTA: Ver ejemplo iv), pág. 14.

Solución: En el ejemplo iv) definimos las geodésicas sobre una superficie dada como aquellas curvas que minimizan la distancia, sobre dicha superficie, entre dos pts. dados de ella. Es decir como aquellas curvas definidas en forma paramétrica como $r = r(u)$ que minimizan el fnal. (23). Ahora discutiremos por separado el caso del plano, cilindro y esfera.

a) GEODÉSICAS DEL PLANO: Sin pérdida de generalidad podemos tomar el plano $z=0$ que queda definido en forma paramétrica como $x(u,v)=u$; $y(u,v)=v$; $z(u,v)=0$. De la ecn. (22) tenemos:

$$e = 1 \quad ; \quad f = 0 \quad ; \quad g = 1$$

y así el fnal. a minimizar es:

Handwritten text, possibly bleed-through from the reverse side of the page, consisting of a vertical column of characters that appear to be a sequence of numbers or a code.

$$L[v] \equiv \int_{u_0}^{u_1} (1 + (v')^2)^{1/2} du,$$

y la ecn. de Euler se puede escribir como $\frac{\partial F}{\partial v'} = \text{cte}$, pues F solo depende de v' . En este caso $F(v') = (1 + (v')^2)^{1/2}$, de donde

$$\frac{1}{F} v' = k : \text{cte}$$

$$\text{i.e. } v' = \text{cte} \quad (59)$$

Esta es la ecn. de las geodésicas para el plano. La soln. son líneas rectas, de ecn.:

$$v = \alpha u + \beta \quad (60)$$

en que α y β son ctes. determinadas por los ptes. sobre el plano que se desea unir. En el caso del plano la solución es única, es decir existe una sola geodésica que une dos ptes. dados.

b) Geodésicas del Cilindro: Consideremos el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, que descrito en forma paramétrica está dado por

$$x(u, v) = \text{sen } u \quad y(u, v) = \text{cos } u \quad z(u, v) = v \quad (61)$$

De la ecn. (22) obtenemos meramente $e = g = 1$ y $f = 0$. Así el funcional a minimizar es meramente

$$L[v] \equiv \int_{u_0}^{u_1} (1 + (v')^2)^{1/2} du,$$

la ecn. de Euler implica $v' = \text{cte}$, i.e.

$$v = \alpha u + \beta = v(u) \quad (62)$$

en que α y β son ctes. cuyo valor depende de los ptes. a unir por la geodésica.

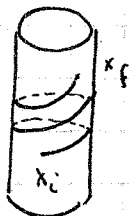
De (62) vemos que se trata de HELICES. En el caso del cilindro existe un número infinito (denumerable) de geodésicas (hélices) que unen dos ptes. dados sobre la sup. del cilindro: una no da ninguna vuelta alrededor del cilindro, la cual realmente corresponde al mínimo de la distancia entre los dos ptes. dados,

Handwritten text, possibly a page number or reference, located at the bottom right of the page.

luego existe una hélice que se "envrolla" exactamente una vez alrededor del cilindro, una que lo hace dos veces, etc. (Ver figura). Sólo la 1ª hélice corresponde a un mínimo del funcional. Las restantes son sólo pts. "estacionarios". 34.



hélice
"mínima"



etc.

curvas "estacionarias" del funcional $L[\sigma]$.

Existe una sola hélice estacionaria para un "n° de vueltas alrededor del cilindro" dado.

c) ESFERA: La esfera unitaria puede escribirse en forma paramétrica como $x = \text{sen} u \cos v$; $y = \text{sen} u \text{sen} v$; $z = \cos u$. Entonces, de la ecu. (22), obtenemos $e=1$, $f=0$ y $g = \text{sen}^2 u$. Así, las geodésicas sobre la esfera minimizan el funcional,

$$L[\sigma] = \int_{u_0}^{u_1} (1 + [\text{sen} u \cdot v']^2)^{1/2} du \quad (63)$$

Puesto que $F(u, v, v') \equiv (1 + [\text{sen} u \cdot v']^2)^{1/2}$ no depende de v , la ecuación de Euler para $v(u)$ se puede escribir como

$$\frac{\partial F}{\partial v'} = \frac{1}{F} \text{sen}^2 u \cdot v' = k : \text{cte.} \quad (64)$$

En vez de integrar (64) demostraremos que los "círculos máximos" (o arcos de...) la satisfacen. Un círculo máximo es la intersección de la esfera con un plano cualquiera que pase por su centro. Sea $\hat{n} = (\cos \beta \text{sen} \alpha, \text{sen} \beta \text{sen} \alpha, \cos \alpha)$ la normal a dicho plano. La ecu. del plano (¡pasa por el origen) es:

$$\hat{n} \cdot \vec{r} = 0$$

Así pues las curvas de intersección (círculos máximos) tienen por ecuación; para $v = v(u)$:

$$\hat{n} \cdot \vec{r} = 0, \quad \vec{r} \in \text{esfera}, \quad \text{i.e.} \quad (\vec{r} = (\text{sen} u \cos v, \text{sen} u \text{sen} v, \cos u))$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} u \cdot \cos(\beta - \nu) + \cos u \cdot \cos \alpha = 0 \quad (65)$$

De (65), diferenciando, se puede obtener:

$$v' = \frac{dv}{du} = \frac{\cot \alpha}{\operatorname{sen}^2 u \cdot \operatorname{sen}(\beta - \nu)} \quad (66)$$

De (65) y (66) vemos que, para este v ,

$$F(u, v, v') = \frac{1}{\operatorname{sen}(\beta - \nu)} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} u}$$

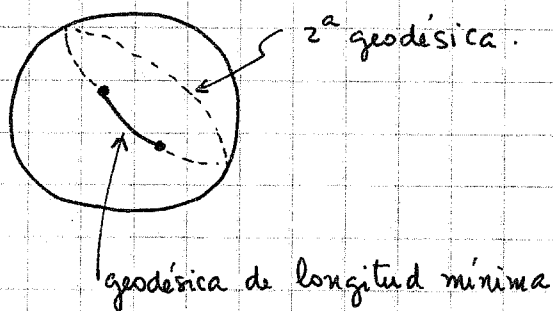
y así,

$$\frac{1}{F} \cdot \operatorname{sen}^2 u \cdot v' = \cos \alpha = k.$$

Así, los círculos máximos (arcs de) extreman (en pts. estacionarios) de (63).

En cuanto a la unicidad, dados dos pts. cualquiera sobre la esfera existen 2 geodésicas que los unen pero solo una de ellas corresponde a mínima distancia.

En el caso especial en que los pts. son antipodales existen ∞ 's geodésicas que los unen, todas de igual distancia.



- [10] "BRAQUISTOCRONA": (ver pág. 13). Se pide determinar la curva que une dos puntos A y B que no pertenecen a una misma recta vertical, que posea la propiedad que un punto material se deslice sin roce por dicha curva por la influencia de la gravedad, partiendo del reposo desde A hasta B en el menor tiempo posible.

Solución: Sin pérdida de generalidad elegimos las coordenadas de A y B como $A = (0, a)$; $B = (\Delta, b)$ ($a > b$). Entonces (ver ecn. (21)) se trata de encontrar $y(x)$ que minimice

$$T[y(x)] = \int_0^{\Delta} \left[\frac{1+y'^2}{2g(a-y)} \right]^{1/2} dx$$

con $y(0) = a$, $y(\Delta) = b$ dados. Sea $F(y, y') = \left(\frac{1+y'^2}{a-y} \right)^{1/2}$. Entonces la ec. de Euler para este problema es:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{[(a-y)(1+y'^2)]^{1/2}} = \frac{1}{k} : \text{cte.}$$

Introduciendo $u = a - y$, obtenemos

$$\left(\frac{du}{dx} \right)^2 = \frac{k^2 - u}{u} \quad (67)$$

Ahora hacemos $u = k^2 \text{sen}^2 \theta$; $\frac{du}{dx} = 2k^2 \text{sen} \theta \cos \theta$ y la ecn (67) queda:

$$2k^2 \text{sen}^2 \theta \frac{d\theta}{dx} = 1, \quad (\text{sen}^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta))$$

e integrando resulta

$$x - c = k^2 \left[\theta - \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta \right] \quad (68)$$

Así, la soln. de la ecuación de Euler, escrita en forma paramétrica es:

$$\left. \begin{aligned} y(\theta) &= a - k^2 \text{sen}^2 \theta \\ x(\theta) &= k^2 \left(\theta - \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

en que hemos elegido la constante c de modo que $x(0) = 0$, $y(0) = a$. En cuanto a la cte. k y al valor final de θ , se obtienen de

$$\left. \begin{aligned} y(\theta_f) &= a - k^2 \text{sen}^2 \theta_f = b \\ x(\theta_f) &= k^2 \left(\theta_f - \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta_f \right) = \Delta \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

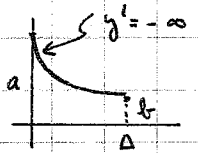
Nótese que en (70) necesariamente debe tenerse $b \leq a$ para que exista solución. La ecn. (69) corresponde a la ecn. de una EPICLOIDE. Introduciendo (70) de vuelta en la expresión para $T[y(x)]$ (ecn. (21)) obtenemos

$$T[y(x)] = \sqrt{\frac{2}{g}} K \theta_f \quad (71)$$

NOTA: De la ecn. paramétrica de la braquistócrona (ecn. (69)) obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\cot \theta, \quad (72)$$

luego $y'(x=0) = -\infty$. Así, la braquistócrona parte en forma vertical



[11] "BRAQUISTOCRONA CON EXTREMO FINAL LIBRE":

Resuelva el mismo problema anterior en el caso en que $x_1 = \Delta$ dado, $x_0 = 0$, $y_0 = a$ dado pero $y(\Delta)$ libre.

Soln: En este caso la ecn. de Euler es la misma del prob. #10. Lo único nuevo es la condición de borde, (ver ecn. (41) pág. 21) que ahora es

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=\Delta} = 0.$$

En este problema, $\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=\Delta} = \frac{y'}{\sqrt{(1+y')^2}(a-y)}$, y por lo tanto la condición anterior

implica $y'(\Delta) = 0$. De la ecn. (72) obtenemos entonces $\theta_f = \frac{\pi}{2}$ y luego de (69), imponiendo $x(\theta_f = \frac{\pi}{2}) = \Delta$ obtenemos $K^2 = \frac{2\Delta}{\pi}$. Así pues, la solución en este caso es:

$$y(\theta) = a - \frac{2\Delta}{\pi} \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (73)$$

$$x(\theta) = \frac{2\Delta}{\pi} \left(\theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right)$$

$$T[y] = \sqrt{\frac{\pi \Delta}{g}} \quad (74)$$

y finalmente b (que en este caso es incógnita) está dado por $b = a - \frac{2\Delta}{\pi}$.

NOTA : Otro modo de resolver los problemas variacionales con un extremo libre de desplazarse sobre una curva es el siguiente:

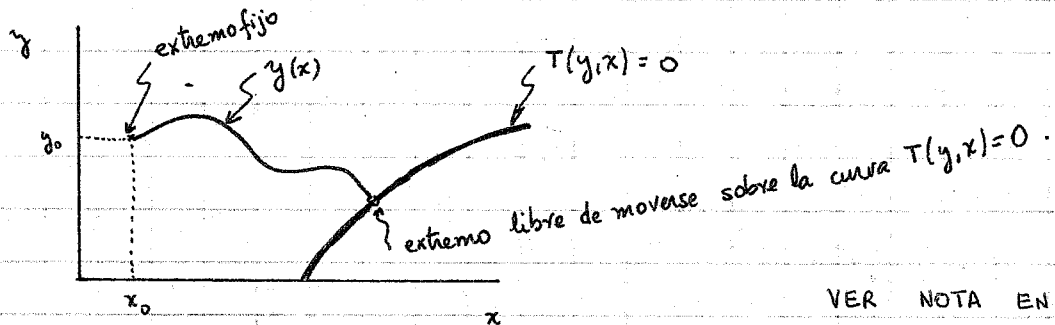
- Suponer 1° que el extremo está fijo.
- Evaluar el final en la solución del problema variacional con extremo fijo: obtendremos así una función de las coordenadas del pto. final.
- Minimizar (extremar) esta función φ_a a los pto. sobre la curva dada.

§ 6. CONDICIONES DE TRANSVERSALIDAD.

Hasta ahora hemos discutido el problema de extremas funcionales del tipo $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ en que x_0, x_1 son fijos. A menudo conviene considerar ^{x_0} funcionales que dependen de curvas mas generales, cuyos extremos no necesariamente se encuentran para un x_1 dado y/o un x_0 dado. Para concretar supondremos aquí que $x_0 = y(x_0)$ estan fijos y que x_1 e $y(x_1)$ son libres de "moverse" en una curva de ecuación

$$T(x, y) = 0. \quad (75)$$

(ver figura).



VER NOTA EN PAG. FRENTE

NOTA: El caso discutido en las págs. 20 y 21 ("variaciones mas generales") corresponde a un caso particular de lo que estudiaremos ahora: corresponde a $T(x, y) = x - x_1$. (i.e. la curva $T(x, y) = 0$ es una recta // al eje OY).

Para discutir este tipo de problemas conviene describir las curvas $y(x)$ en forma paramétrica. De este modo reduciremos el problema a los casos ya estudiados.

$$y(x) \text{ en forma paramétrica} = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

De esta forma la variable "independiente" t tiene sus extremos: 0, 1 fijos. El funcional a extremar es ahora dependiente de 2 curvas: $x(t), y(t)$:

$$J[x, y] = \int_0^1 G(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt, \quad (76)$$



en que

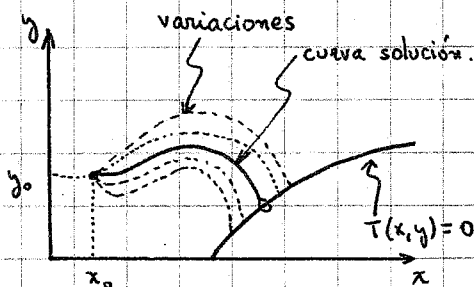
$$G(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \equiv F(x, y, \frac{y}{x}) \dot{x}, \quad (77)$$

ya que $y' = (\dot{x})^{-1} \dot{y}$ y $dx = \dot{x} dt$. Aquí $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} \equiv \frac{dy}{dt}$.

Supongamos que $x = x(t)$, $y = y(t)$ extremiza el funcional $J[x, y]$ dado por (76), y consideremos las familias de curvas en torno a la solución, las que en forma paramétrica están dadas por

$$x = \bar{x}(t) + \epsilon \eta(t)$$

$$y = \bar{y}(t) + \sigma \nu(t)$$



Aquí $\eta(t), \nu(t)$ son fnc. continuas y de derivada seccionalmente continua, tales que $\eta(0) = \nu(0) = 0$; $\eta(1), \nu(1)$ libres y de otra manera arbitrarias.

ϵ y σ son parámetros pequeños. Puesto que la curva $\bar{x}(t), \bar{y}(t)$ extremiza $J[x, y]$, entonces el punto $(\epsilon, \sigma) \equiv (0, 0)$ debe ser un extremo de la función:

$$\phi(\epsilon, \sigma) \equiv \int_0^1 G(x + \epsilon \eta, y + \sigma \nu, \dot{x} + \epsilon \dot{\eta}, \dot{y} + \sigma \dot{\nu}) dt \quad (78)$$

sujeta a la restricción:

$$g(\epsilon, \sigma) \equiv T(x(1) + \epsilon \eta(1), y(1) + \sigma \nu(1)) = 0. \quad (79)$$

La condición necesaria de extremos para la fnc. ϕ en el pto. $(0, 0)$ con la restricción (79) es:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \epsilon} (\phi + \lambda g) \Big|_{(\epsilon, \sigma) = (0, 0)} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} (\phi + \lambda g) \Big|_{(\epsilon, \sigma) = (0, 0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

en que λ es un multiplicador de Lagrange introducido para tomar en cuenta la restricción (79). Desarrollando (80), usando las definiciones de ϕ y q , e integrando por partes como es habitual obtenemos:

$$\int_0^1 \left\{ \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}} \right) \right\} \eta(t) + \frac{\partial G}{\partial \dot{x}} \Big|_1 \eta(1) + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \eta(1) = 0 \quad (81)$$

$$\int_0^1 \left\{ \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{y}} \right) \right\} \nu(t) + \frac{\partial G}{\partial \dot{y}} \Big|_1 \nu(1) + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \nu(1) = 0$$

Elijiendo, primero, curvas $\eta(t), \nu(t)$ tales que $\nu(1) = \eta(1) = 0$ obtenemos,

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad (82)$$

y luego eligiendo η, ν tales que $\eta(1)$ y $\nu(1)$ son cualesquiera obtenemos además las condiciones de borde

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{t=1} = 0 \quad (83)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y} + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{t=1} = 0 \quad ;$$

eliminando λ entre estas 2 ecs. se obtiene la llamada "CONDICION DE TRANSVERSABILIDAD":

$$\frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{t=1} = 0 \quad (84)$$

De la ecu. (77) se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= F - \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = F - \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot y' \\ \frac{\partial G}{\partial y} &= \dot{x} \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\partial F}{\partial y'} \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Así, pues, en términos de la fn. original $F(x, y, y')$ la condición de Transversalidad se escribe:

$$\left\{ \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \cdot \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right\} = 0 \quad (86)$$

$x = x_1$
 $y = y_1$

en que x_1, y_1 son tales que:

$$T(x_1, y_1) = 0. \quad (87)$$

En cuanto a la ecn. de Euler para $y = y(x)$, notemos que las ecs. (82) no son realmente independientes. En efecto, multiplicando la 1ª por x , la 2ª por y y luego sumándolas, (sumando y restando en cu. de ellas $x \frac{\partial G}{\partial x}$, $y \frac{\partial G}{\partial y}$ respectivamente, de un modo completamente similar al problema [4], pág. 25. y como G no depende explícitamente de t) se obtiene

$$G - \left(x \frac{\partial G}{\partial x} + y \frac{\partial G}{\partial y} \right) = \text{cte.} \quad (88)$$

Pero la ecn. (88) es satisfecha idénticamente para cualquier $x = x(t)$, $y = y(t)$ con $\text{cte.} = 0$ pues la fn. G es una función homogénea de grado 1 en x, y como se ve de su definición (77). (Esto también se ve de inmediato con ayuda de (85)). Por lo tanto solo una de las ecs. de (82) es independiente y la obtenemos en términos de y, y' . Como $\frac{\partial G}{\partial y} = x \frac{\partial F}{\partial y}$, de (85) y (82)⁽ⁱⁱ⁾ obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial y} \cdot x - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0, \quad (89)$$

pero $\frac{d}{dt} = x \frac{d}{dx}$ y así, (88) es equivalente a:

$$\frac{\partial J}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (90)$$

En "Resumen", las condiciones necesarias para que $y = y(x)$ extermize $J[y]$ con

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

un extremo "atado" y el otro sobre la curva $T(x, y) = 0$ sm:

- la ecn. de Euler (90)

con las C.B.:

- en $x = x_0$: $y(x_0) = y_0$ dado

- en $x = x_1$: ecs.: (86) y (87)

Nota: En caso que c/u de los extremos se encuentre sobre una curva dada, en c/ extremo deberá satisfacerse una Condición de Transversabilidad como (86).

CASOS PARTICULARES :

(i) Supongamos que la ecn. de la curva final se puede escribir como $y = g(x)$. En este caso $T(x, y) = y - g(x)$. Así $\frac{\partial T}{\partial x} = -g'$ y $\frac{\partial T}{\partial y} = 1$. Entonces la C. de Transv. se escribe:

$$\left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + g' \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (91)$$

(ii) Si la condición final es que $y(x_1)$ se encuentre sobre la recta $x_1 = \text{cte}$, $T(x, y) = x - x_1$. Así $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial y} = 1$ y de (86) obtenemos la condición,

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x_1} = 0 \quad (92)$$

que ya habíamos encontrado en la pág. 21.

(iii) Finalmente si solo se pide $y = y_1$ dado, pero x_1 es libre $T(x, y) = y - y_1$, $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial y} = 1$ y la C. de T. es:

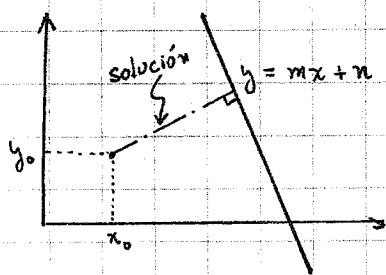
$$F - y' \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x_1} = 0 \quad (93)$$

NOTA: El nombre de "condiciones de transversabilidad" proviene del hecho que la ecn. (86) relaciona la tge. a la curva $T(x, y) = 0$ con la tge. a la curva solución $y(x)$ en el pto. de intersección (x_1, y_1) . En diversas apli-

caciones la C. de Transversalidad se reduce a exigir que dichas curvas se corten transversalmente.

EJERCICIOS: (§6)

[12] Determine la curva que pasa por el pto. (x_0, y_0) y por la recta $y = mx + n$ y tal que tiene longitud mínima (ver figura)



Nota: la solución a este problema es obvia. Como se ve en la figura se trata de una recta que pasa por el pto. dado y es perpendicular a la recta dada.

Solución: Se trata de minimizar: $L[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y')^2} dx$ en que

x_0 e $y(x_0)$ son conocidos $\wedge (x_1, y_1)$ se encuentran sobre la recta $y = mx + n$.

$$F(y, y') = \sqrt{1+y'^2} \quad (94)$$

$$\text{Ecn. de Euler: } F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = K \quad (95)$$

$$\text{Cond. de Transv.: } \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + m \frac{\partial F}{\partial y'} \Bigg|_{x_1, y_1} = 0 \quad (\text{ver ecn. (91)}) \quad (96)$$

$$\text{Extemo sobre la recta dada: } y_1 = mx_1 + n \quad (97)$$

Reemplazando $\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$, y (95) en (96) obtenemos:

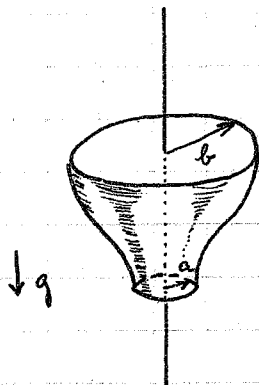
$$1 + m \cdot y' \Bigg|_{(x_1, y_1)} = 0 \quad (98)$$

Entonces de (95) tenemos que la solu. de la ecu. de Euler es $y' = \text{cte}$, es



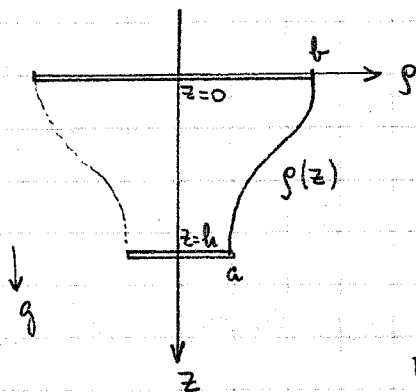
decir la ecu. de una recta. La C. de T. (98) justamente dice que esta recta debe ser \perp a la recta dada $y = mx + n$. \square

[13]



Una argolla de alambre de radio "a" y masa "m" cuelga de otra de radio "b" por medio de una película de jabón, cuya tensión superficial es T. Se pide calcular la superficie de la película y la distancia entre las argollas cuando se encuentran en equilibrio. Use el hecho que la energía potencial del sistema es mínima y que la energía potencial debida a la tensión superficial es $T \cdot S$ en que S es la superficie de la película de Jabón.

Solución: Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la argolla superior, que está fija, tiene coordenada $z=0$ y la inferior $z=h$ en que h, positivo, debe ser determinado. El problema tiene simetría axial y usaremos coordenadas (ρ, z) . Sea $\rho(z)$ la curva que describe un corte vertical de la película de jabón. En términos de $\rho(z)$ y de h la energía potencial del sistema: "película - argolla inferior" es:



$$E[\rho] = T \cdot \underbrace{2\pi \int_0^h \rho (1 + (\rho')^2)^{1/2} dz}_S - mg \int_0^h dz \quad (99)$$

(sup. de revolución de la película)

ojo con el signo: el eje z lo elegí hacia abajo. -

(aquí $\rho' \equiv \frac{d\rho}{dz}$). Así,

$$E[\rho] = \int_0^h F(\rho, \rho') dz \quad (100)$$

en que

$$F(\rho, \rho') = 2\pi \cdot T \cdot \rho \sqrt{1 + (\rho')^2} - mg \quad (101)$$

Small vertical text along the right edge of the page, possibly a page number or a reference code.

La ecu. de Euler para ρ es:

$$F - \rho' \frac{\partial F}{\partial \rho'} = K \quad (102)$$

y las c.B. son:

$$\left. \begin{aligned} \rho(0) &= b \\ \rho(h) &= a \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

$$F - \rho' \frac{\partial F}{\partial \rho'} \Big|_{\substack{z=h \\ \rho=a}} = 0$$

en que esta última es la c. de Transversalidad (ver pág. 42, (iii), ecu. (93)). De (102) y la c. de T. obtenemos $K=0$. Introduciendo F en (102) tenemos

$$\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho'^2}} = \alpha, \quad (104)$$

en que $\alpha \equiv \frac{m \cdot g}{2\pi T}$ tiene unidades de distancia. Integrando (104) se tiene

$$z - z_0 = \alpha \cosh^{-1} \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) \quad (105)$$

i.e.

$$\rho(z) = \alpha \cosh \left(\frac{z - z_0}{\alpha} \right). \quad (106)$$

La constante z_0 se obtiene al imponer la c.B. $\rho(0) = b$. De (106) tenemos

$$b = \alpha \cosh \left(\frac{z_0}{\alpha} \right), \quad [\text{i.e. } z_0 = \alpha \operatorname{arccosh} \left(\frac{b}{\alpha} \right)] \quad (107)$$

Para que (107) tenga soln. debe tenerse: " $b > \alpha$ ". Finalmente, h se obtiene de imponer $\rho(h) = a$:

$$\left\{ \begin{aligned} a &= \alpha \cosh \left(\frac{h - z_0}{\alpha} \right) \end{aligned} \right. \quad (\text{Aquí debe tenerse } a > \alpha)$$

y entonces:

$$\boxed{h = \alpha \left[\cosh^{-1} \left(\frac{b}{\alpha} \right) + \cosh^{-1} \left(\frac{a}{\alpha} \right) \right]} \quad (108)$$

es la distancia entre las argollas. La superficie de la película es:

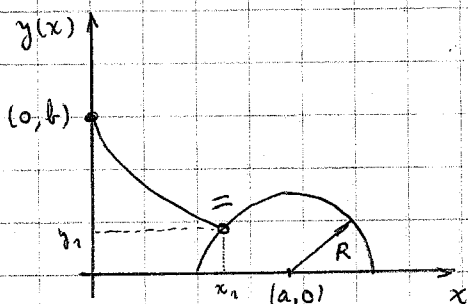
$$S = 2\pi \int_0^h \rho \sqrt{1 + \rho'^2} dz = \frac{2\pi}{\alpha} \int_0^h \rho^2 dz$$

↑
usando (104)

$$= \pi \alpha \left[h + \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \left(\frac{2z_0}{\alpha} \right) + \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \left(\frac{2}{\alpha} (h - z_0) \right) \right]$$

$$= \pi \alpha \left[h + b \cdot \sqrt{\left(\frac{b}{\alpha} \right)^2 - 1} + a \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{\alpha} \right)^2 - 1} \right], \quad \begin{array}{l} a > \alpha \\ b > \alpha \end{array}$$

- [14] Resuelva el problema de la BRAQUISTOCRONA (ver prob. [11], pág. 37), cambiando la recta por una circunferencia de centro en $(a, 0)$ y radio R . (ver figura)



Solución: Se trata de minimizar

$$T[y(x)] = \int_0^{x_1} F(y, y') dx \quad (116)$$

$$\text{en que } F(y, y') = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left(\frac{1 + (y')^2}{b - y} \right)^{1/2} \quad (117)$$

(ver págs. 35 y siguientes). La ecn. de Euler es:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = K, \text{ i.e. } \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b - y}} = K \quad (118)$$

y las condiciones de borde son:

$$y(0) = b \quad (119)$$

$$\left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \cdot \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_1, y_1} = 0 \quad (120)$$

$$T(x_1, y_1) = 0 \quad (121)$$

Nota: la 2ª de estas C.B. es la C. de Transversalidad. En este problema

$$T(x, y) = (x - a)^2 + y^2 - R^2; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 2(x - a); \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 2y \quad (122)$$

Introduciendo T , de la ecn. (122) en (120), (121) obtenemos:

$$y_1 - (x_1 - a) \cdot y'(x_1) = 0 \quad (123)$$

$$(x_1 - a)^2 + y_1^2 = R^2 \quad (124)$$

la condición (123) justamente dice que la braquistócrona corta a la semicircunferencia en forma perpendicular. La solución de (118) es: (ver pág 35 y s.s.), en forma paramétrica

$$x(t) = m^2 \left(\sigma t - \frac{1}{2} \sin 2\sigma t \right) \quad (125)$$

$$y(t) = b - m^2 \sin^2(\sigma t) \quad t \in [0, 1] \quad (126)$$

en que σ, m^2 son ctes. por determinar. ($\sqrt{2g} \cdot m \cdot k = 1$). Nota: en (125), (126) ya hemos impuesto que $(x(0), y(0)) = (0, b)$. De (123) tenemos $x_1 - a = \frac{y_1}{y'(x_1)}$ y reemplazando en (124) se tiene

$$y_1^2 \left(1 + \frac{1}{y'(x_1)^2} \right) = R^2 \quad (127)$$

Pero de (125), (126) : $y'(x_1) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \Big|_{t=1} = -\cot(\sigma)$, y reemplazando en (127) se obtiene

$$y_1 = R \cos \sigma \quad (128)$$

Introduciendo (128) en (124) también se tiene

$$x_1 = a - R \sin \sigma \quad (129)$$

Basta determinar σ y m para completar la soln. del problema. (Una vez conocido σ , x_1 e y_1 se obtienen de (128), (129).) Para obtener σ, m recurrimos a:

$$\left. \begin{aligned} \text{ecn. (128) + ecn. (126)} &\Rightarrow R \cos \sigma = b - m^2 \sin^2(\sigma) \\ \text{ecn. (129) + ecn. (125)} &\Rightarrow a - R \sin \sigma = m^2 \left(\sigma - \frac{1}{2} \sin 2\sigma \right) \end{aligned} \right\} (130)$$

Se obtienen así 2 ecs. para las 2 incógnitas σ, m y en principio el problema está resuelto. \blacksquare

§ 7. PROBLEMAS ISOPERIMETRICOS

Bajo este nombre se estudian aquellos problemas variacionales en que se trata de extremar un funcional manteniendo el valor de otro funcional dado. La razon de este nombre proviene del hecho que los primeros problemas de este tipo consistian en maximizar areas bajo curvas manteniendo su "perimetro" dado.

Supongamos que queremos extremar el funcional

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \tag{131}$$

manteniendo el valor del funcional

$$P[y] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') = cte. \tag{132}$$

Supondremos por simplicidad que $x_0, x_1, y(x_0)$ e $y(x_1)$ estan fijos. La extensión a c/u de las generalizaciones vistas en § 5 y § 6 es inmediata. Sea, como de costumbre $\bar{y}(x)$ la soln. a este problema y construyamos la familia de curvas en torno a \bar{y} :

$$\bar{y}(x) + \epsilon \eta(x) + \theta \mu(x) \tag{133}$$

ϵ parámetro; $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$; $\eta \in C^2[x_0, x_1]$. Designemos por

$$\varphi(\epsilon) \equiv J[\bar{y} + \epsilon \eta] + \theta \mu(x) \tag{134}$$

$$\psi(\epsilon) \equiv P[\bar{y} + \epsilon \eta] + \theta \mu(x)$$

Como \bar{y} resuelve el problema, el pto. $\epsilon=0$ debe ser un extremo de $\varphi(\epsilon)$ sujeto a la restricción: $\psi(\epsilon) = cte$. Entonces la condición necesaria de extremo debe ser:

$$\frac{d}{d\epsilon} \left(\varphi(\epsilon) + \lambda \psi(\epsilon) \right) \Big|_{\epsilon=0} = 0, \tag{135}$$

en que λ es un multiplicador de Lagrange introducido para dar cuenta de la ligazón $\psi = cte$.

Nota: Agregar el principio de Kelvin:

20/5/91

"Un fluido incompresible que minimice $J[\vec{v}] = \frac{1}{2}\rho \int_{\Omega} \vec{v}^2 d^3x$

con $\vec{v} \cdot \hat{n} \Big|_{\partial\Omega} = f$: dado, es irrotacional"

Dem: El fluido es incompresible, $\therefore \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \forall x \in \Omega$

$\therefore S[\vec{v}] = \int_{\Omega} \phi \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \forall \phi$ decaente

Queremos extremar $\tilde{J} = J + \lambda S$

$\Rightarrow \frac{d\tilde{J}}{d\epsilon} (\vec{v} + \epsilon \vec{\eta}) \Big|_{\epsilon=0} = 0$ en que $\vec{\eta} \cdot \hat{n} \Big|_{\partial\Omega} = 0$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \vec{\eta} \cdot (\rho \vec{v} - \lambda \nabla \phi) d^3x = 0$$

Como $\vec{\eta}$ es arbitrario: $\vec{v} = \frac{\lambda}{\rho} \nabla \phi$

ie. $\nabla \times \vec{v} = 0 \quad \checkmark$

Con respecto al problema de la catenaria se puede ilustrar con construcciones como:

- el arco de St. Louis
- la conexión de Enderb entre Chiloé y el continente
- etc.

Esto puede repetirse, como ya es habitual, para cualquier $\eta(x)$ dentro de la clase permitida. Así, podemos concluir que la condición necesaria de extremo para $\bar{y}(x)$ es que

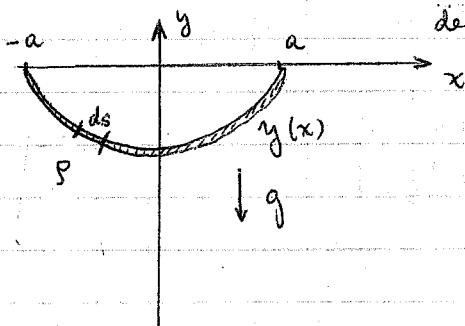
$$\frac{\delta}{\delta y} (J + \lambda P) \Big|_{\bar{y}(x)} = 0,$$

i.e.
$$\frac{\partial (F + \lambda G)}{\partial y} \Big|_{\bar{y}} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial (F + \lambda G)}{\partial y'} \right) \Big|_{\bar{y}} \quad (136)$$

EJERCICIOS: §7

[15] "CATENARIA" (ver págs. (15), (16), ecns. (26), (27)). Encuentre la curva que forma una cuerda suspendida de ambos extremos en el campo gravitacional homogéneo. Considere que los extremos están a la misma altura, y que la longitud de la cuerda es "L". Use el hecho que la energía potencial total es mínima.-

Solución:



Sea ρ la densidad lineal de masa de la cuerda. Sin pérdida de generalidad podemos suponer los extremos puestos simétricamente en el eje y como se muestra en la figura. Como se discute en ecn. (26), (27) se trata de minimizar

$$E[y(x)] = \int_{-a}^a \rho g y \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (137)$$

↑
energía potencial

sujeito a la restricción

$$L[y(x)] = \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx = L \quad (138)$$

En este problema: $F = F(y, y') = \rho g y \sqrt{1+(y')^2}$

$$G = G(y, y') = \sqrt{1+y'^2},$$

luego $f \equiv F + \lambda G$ es solo fn. de y, y' ; y la ecu. de Euler se puede integrar una vez, i.e. debe tenerse $f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{cte}$, o sea

$$\frac{\lambda + \rho g y}{\sqrt{1+(y')^2}} = \kappa \quad (139)$$

Sea $y = -\frac{\lambda}{\rho g} + u$, entonces u satisface

$$\frac{u}{\sqrt{1+u'^2}} = \frac{\kappa}{\rho g} \equiv \alpha$$

cuya solución (ver prob. 13, pág. 45, ecu. (104))

$$u(x) = \alpha \cosh\left(\frac{1}{\alpha}(x-x_0)\right)$$

y por lo tanto

$$y(x) = -\frac{\lambda}{\rho g} + \alpha \cosh\left(\frac{1}{\alpha}(x-x_0)\right). \quad (140)$$

Aquí, λ, α, x_0 son ctes. por determinarse. Tenemos las condiciones:

$$\text{- de borde } y(-a) = y(a) = 0 \quad (141)$$

$$\text{- } L[y] = L: \quad \int_{-a}^a \sqrt{1+y'^2} dx = L \quad (142)$$

De (140) y (141) vemos que $x_0 = 0$ (i.e. el cosh debe estar centrado en $x=0$)

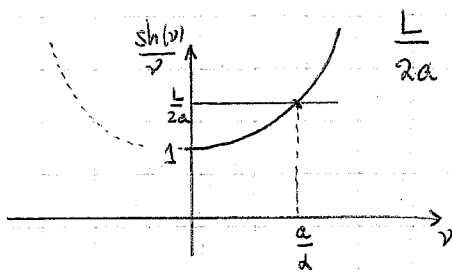
y:

$$\frac{\lambda}{\rho g} = \alpha \cosh\left(\frac{a}{\alpha}\right). \quad (143)$$

(142) implica

$$L = 2\alpha \operatorname{sh}\left(\frac{a}{\alpha}\right) \quad (144)$$

De (144) se puede calcular α :



$$\frac{L}{2a} = \frac{\alpha}{a} \operatorname{sh}\left(\frac{a}{\alpha}\right) = \frac{1}{\nu} \operatorname{sh}(\nu) \quad \nu \equiv \frac{a}{\alpha} \quad (145)$$

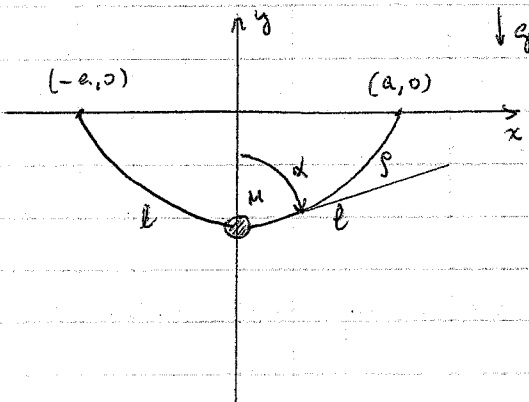
(145) solo tiene soln. si $\frac{L}{2a} \geq 1$, que

es una condición obvia, de la figura en pág. 50

Finalmente de (143) se calcula λ . Se obtiene $\frac{\lambda}{\rho g} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}L^2}$.

i.e. $y(x) = \alpha \operatorname{ch}\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}L^2}$. \square

[16] CABLE COLGANTE CON MASA FINITA EN EL MEDIO.



Consideremos una cuerda de densidad uniforme ρ y largo $2l$ (como se muestra en la figura) en presencia de un campo gravitatorio uniforme g . En el medio de la cuerda existe una masa M . Los extremos de la cuerda están fijos, separados por una distancia $2a$, y a la misma altura. Se pide calcular el ángulo α que forma la cuerda con la vertical en el centro.

Solución: La solución es simétrica ch al eje y . Por lo tanto el problema es equivalente a considerar una cuerda de largo l con un extremo fijo en $(a, 0)$ y el otro deslizándose por la recta $x=0$, con una masa M en el extremo. Se trata entonces de minimizar

$$E(y) = \int_0^a \rho g y \sqrt{1+y'^2} dx - Mg \int_0^a y'(x) dx \quad (146)$$

en que $y(0)$ es libre, $y(a)=0$, sujeto a la restricción

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

$$L(y) = \int_0^a [1+y'^2]^{1/2} dx = l \quad (147)$$

$$\text{luego } f = \rho g y \sqrt{1+y'^2} - M g y' + \lambda \sqrt{1+y'^2} \quad (148)$$

es solo función de y, y' y la ecn. de Euler se puede integrar una vez, i.e.

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = K \quad (149)$$

Reemplazando (148) en (149) obtenemos

$$\frac{\rho g y + \lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = K \quad (150)$$

en que K es una cte. de integración. Las cond. de borde son

$$y(a) = 0 \quad (151)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_0 = y' \left[\frac{\rho g y + \lambda}{\sqrt{1+y'^2}} \right] - M g = 0 \quad (152)$$

De (150) y (152) se obtiene

$$y'(0) = \frac{Mg}{K} \quad (153)$$

Integrando (150), obtenemos

$$y(x) = -\frac{\lambda}{\rho g} + \frac{K}{\rho g} \cosh\left(\frac{\rho g}{K} x + c\right) \quad (154)$$

en que c es una constante de integración. En total debemos determinar tres constantes: λ, K y c y tenemos 3 ecs.: (153), (151) y (147).

De (151) y (154) tenemos:

$$\cosh\left(\frac{\rho g}{K} a + c\right) = \frac{\lambda}{K} \quad (155)$$

De (153) y (154) se tiene,

$$\sinh(c) = \frac{Mg}{K} \quad (156)$$

Finalmente (147) y (154) implican:

$$\frac{K}{\rho g} \left\{ \sinh\left(\frac{\rho g a}{K} + c\right) - \sinh(c) \right\} = \ell \quad (157)$$

De (156) y (157),

$$\frac{K}{\rho g} \sinh\left(\frac{\rho g a}{K} + c\right) = \ell \left(1 + \frac{M}{m}\right) \quad (158)$$

en que

$$m = \rho \ell \quad (159)$$

es la masa de la mitad de la cuerda. Dividiendo (158) por (156) encontramos una ecuación para c ,

$$\frac{\sinh\left[\frac{\rho g a}{K(c)} + c\right]}{\sinh(c)} = \frac{m}{M} \left(1 + \frac{M}{m}\right)$$

$$\text{con } K(c) = \frac{Mg}{\sinh(c)},$$

Además, la función $g(c)$ es par; cuando $c \rightarrow \infty$ $g(c) \rightarrow \infty$

$$g(c) \equiv \frac{1}{\sinh(c)} \left\{ \sinh\left[\frac{\rho a}{M} \sinh(c) + c\right] \right\} = \frac{m}{M} \left(1 + \frac{M}{m}\right) \quad (160)$$

De (160) vemos que

$$g(0) = 1 + \frac{\rho a}{M} = 1 + \frac{m}{M} \frac{a}{\ell} \quad (161)$$



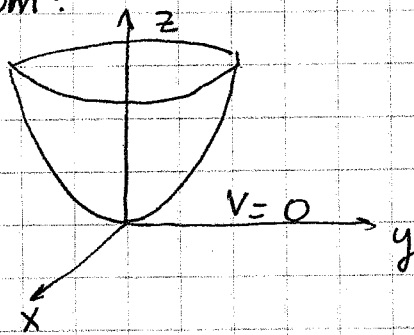
Problema. ~~Un punto~~

Una partícula de masa "m" se mueve bajo la influencia de la gravedad sobre la superficie interior de el paraboloides de revolución $x^2 + y^2 = az$. Suponga que no hay roce.

a) obtenga las ecuaciones de movimiento b) pruebe que la partícula describe un círculo horizontal en el plano $z = h$, siempre que tenga una velocidad angular de magnitud $\omega = \sqrt{\frac{2g}{a}}$ en torno a z.

c) si la partícula se desplace un poco de este camino pruebe que oscilará alrededor de este círculo. Encuentre la frecuencia de esta oscilación.

Soln:



$$x^2 + y^2 = az$$

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

el lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz$

como $z = \frac{1}{a} \rho^2$

$$\dot{z} = \frac{2}{a} \rho \dot{\rho}$$

∴

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \frac{4}{a^2} \rho^2 \dot{\rho}^2 \right) - \frac{mg\rho^2}{a}$$



$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} + \frac{4m}{a^2} \rho^2 \dot{\rho}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho \dot{\theta}^2 + \frac{4m}{a^2} \rho \dot{\rho}^2 - \frac{2mg}{a} \rho$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m\rho^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

entonces $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\rho^2 \dot{\theta}) = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{m\rho^2 \dot{\theta} = l = \text{cte}}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \Rightarrow \boxed{m\ddot{\rho} + \frac{4m}{a^2} \rho^2 \ddot{\rho} + \frac{4m}{a^2} \rho \dot{\rho}^2 - \frac{l^2}{m\rho^3} + \frac{2mg}{a} \rho = 0}$$

b) si $z = h$, $\rho^2 = ah \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$

$$\frac{l^2}{m\rho^3} = \frac{2mg}{a} \rho \Rightarrow l^2 = 2 \frac{m^2 g}{a} \rho^4 = 2 \frac{m^2 g}{a} a^{\frac{1}{2}} h^2$$

$$m^2 a^{\frac{1}{2}} h^2 \dot{\theta}^2 = 2 \cancel{mg} (mh)^{\frac{1}{2}}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2g}{a}}}$$

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑ ㉒ ㉓ ㉔ ㉕ ㉖ ㉗ ㉘ ㉙ ㉚ ㉛ ㉜ ㉝ ㉞ ㉟ ㊀ ㊁ ㊂ ㊃ ㊄ ㊅ ㊆ ㊇ ㊈ ㊉ ㊐ ㊑ ㊒ ㊓ ㊔ ㊕ ㊖ ㊗ ㊘ ㊙ ㊚ ㊛ ㊜ ㊝ ㊞ ㊟ ㊠ ㊡ ㊢ ㊣ ㊤ ㊦ ㊧ ㊨ ㊩ ㊰ ㊱ ㊲ ㊳ ㊴ ㊵ ㊶ ㊷ ㊸ ㊹ ㊺ ㊻ ㊼ ㊽ ㊾ ㊿

c) si se desplace un poco de la trayectoria

$$s = \sqrt{ah} + \eta \quad \eta \ll 1 \quad \therefore \dot{s} = \dot{\eta}$$

$$s^2 = ah + 2\eta\sqrt{ah} + o(\eta^2)$$

$$\dot{s}^2 = (\dot{\eta})^2 \text{ de segundo orden}$$

conservando sólo términos lineales en η nos queda

$$m \ddot{\eta} + \frac{4m}{a^2} (ah) \dot{\eta} - \frac{l^2}{m (\sqrt{ah} + \eta)^3} + \frac{2mg}{a} (\sqrt{ah} + \eta) = 0$$

pero $\frac{1}{(\sqrt{ah} + \eta)^3} = \frac{1}{(\sqrt{ah})^3} \left(1 + \frac{\eta}{\sqrt{ah}}\right)^{-3} \approx \frac{1}{\sqrt{ah}^3} \left(1 - \frac{3\eta}{\sqrt{ah}}\right) \dots$

además $\frac{l^2}{m (ah)^{3/2}} = \frac{2mg\sqrt{ah}}{a}$

entonces queda

$$m \ddot{\eta} + 4m \frac{h}{a} \dot{\eta} + \frac{8mg}{a} \eta = 0$$

$$\ddot{\eta} + \Omega^2 \eta = 0 \text{ con}$$

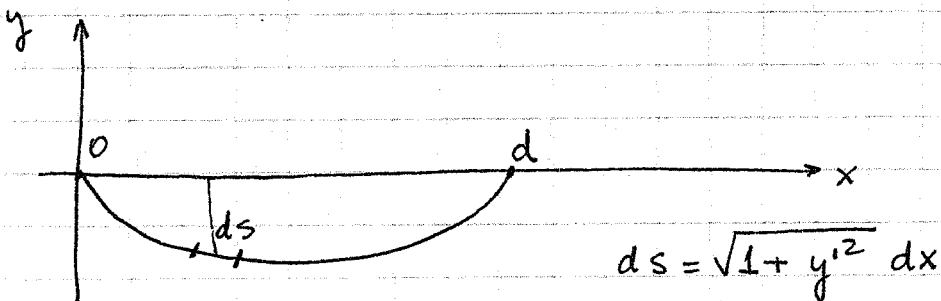
$$\Omega = \frac{8mg/a}{m \left(1 + \frac{4h}{a}\right)}$$

$$f = \frac{\Omega}{2\pi}$$

Handwritten text, possibly bleed-through from the reverse side of the page, running vertically along the right edge.

Problema

Dos niños tienen una cuerda de longitud L para saltar al cordel. La hacen girar con velocidad angular Ω . Encuentre la forma que adopta la cuerda si es que se desprecie la gravedad. Suponga los extremos de la cuerda fijos.



tenemos que minimizar la energía.

el largo $L = \int_0^d \sqrt{1 + y'^2} dx$

la energía tiene que ~~que~~ ser mínima. Como despreciamos la gravedad, es solamente energía cinética.

$$I = \int_0^d (\rho ds) [\dot{y}^2 + y^2 \Omega^2] + \lambda \int_0^d \sqrt{1 + y'^2} ds$$

$\dot{y} = 0$ ya que la cuerda no cambie de forma en el tiempo

$$I = \rho \Omega^2 \int_0^d y^2 \sqrt{1 + y'^2} + \lambda \int_0^d \sqrt{1 + y'^2} dx$$



llamamos

$$F(y, y') = (\rho \Omega^2 y^2 + \lambda) \sqrt{1 + y'^2}$$

definamos $\bar{\lambda} = -\frac{\lambda}{\rho \Omega^2}$

$$F(y, y') = \rho \Omega^2 [y^2 - \bar{\lambda}] \sqrt{1 + y'^2}$$

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{cte}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \rho \Omega^2 [y^2 - \bar{\lambda}] \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \cdot 2y'$$

$$(y^2 - \bar{\lambda}) \sqrt{1 + y'^2} - \frac{2y'^2 (y^2 - \bar{\lambda})}{\sqrt{1 + y'^2}} = K$$

→

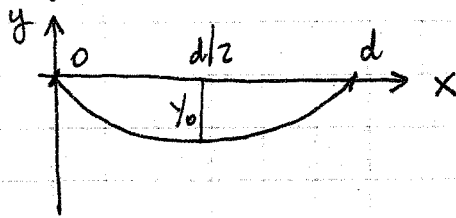
$$\boxed{\frac{y^2 - \bar{\lambda}}{\sqrt{1 + y'^2}} = K}$$

se puede despejar y queda

$$\frac{K dy}{\sqrt{y^4 - 2\bar{\lambda}y^2 + (\bar{\lambda}^2 - K^2)}} = dx$$



como hay simetría respecto al plano medio



Antes de hacer la integral veamos lo siguiente, como

$$\frac{y^2 - \bar{\lambda}}{\sqrt{1 + y'^2}} = K$$

$$y(0) = y(d) = 0$$

y hay simetría respecto al pto $x = d/2$.

$$y(0) = 0 \Rightarrow -\bar{\lambda} = K \sqrt{1 + y'^2(0)}$$

$$y' = 0 \text{ en } x = d/2 \Rightarrow y^2(d/2) = K + \bar{\lambda} \Rightarrow y(d/2) = \sqrt{K + \bar{\lambda}}$$

debe ser $K + \bar{\lambda} > 0$

si $K > 0 \Rightarrow -\bar{\lambda} = K \sqrt{1 + y'^2(0)} \geq K \Rightarrow K + \bar{\lambda} \leq 0$ y esto no puede ser.

Por fuerza $K < 0$
 $K + \bar{\lambda} > 0$

llamemos

$$K = -m^2$$

$$\bar{\lambda} = n^2$$

con $n \geq m$

(no enteros necesariamente)



la integral que debemos hacer es pues

$$\frac{-m^2 dy}{\sqrt{y^4 - 2n^2 y^2 + (n^2 + m^2)}} \quad \text{ada}$$

$$\frac{y^2 - n^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = -m^2 \Rightarrow y^2 - n^2 = -m^2 \sqrt{1 + y'^2}$$

$$n^2 - y^2 = m^2 \sqrt{1 + y'^2}$$

$$(n^2 - y^2)^2 = m^4 (1 + y'^2)$$

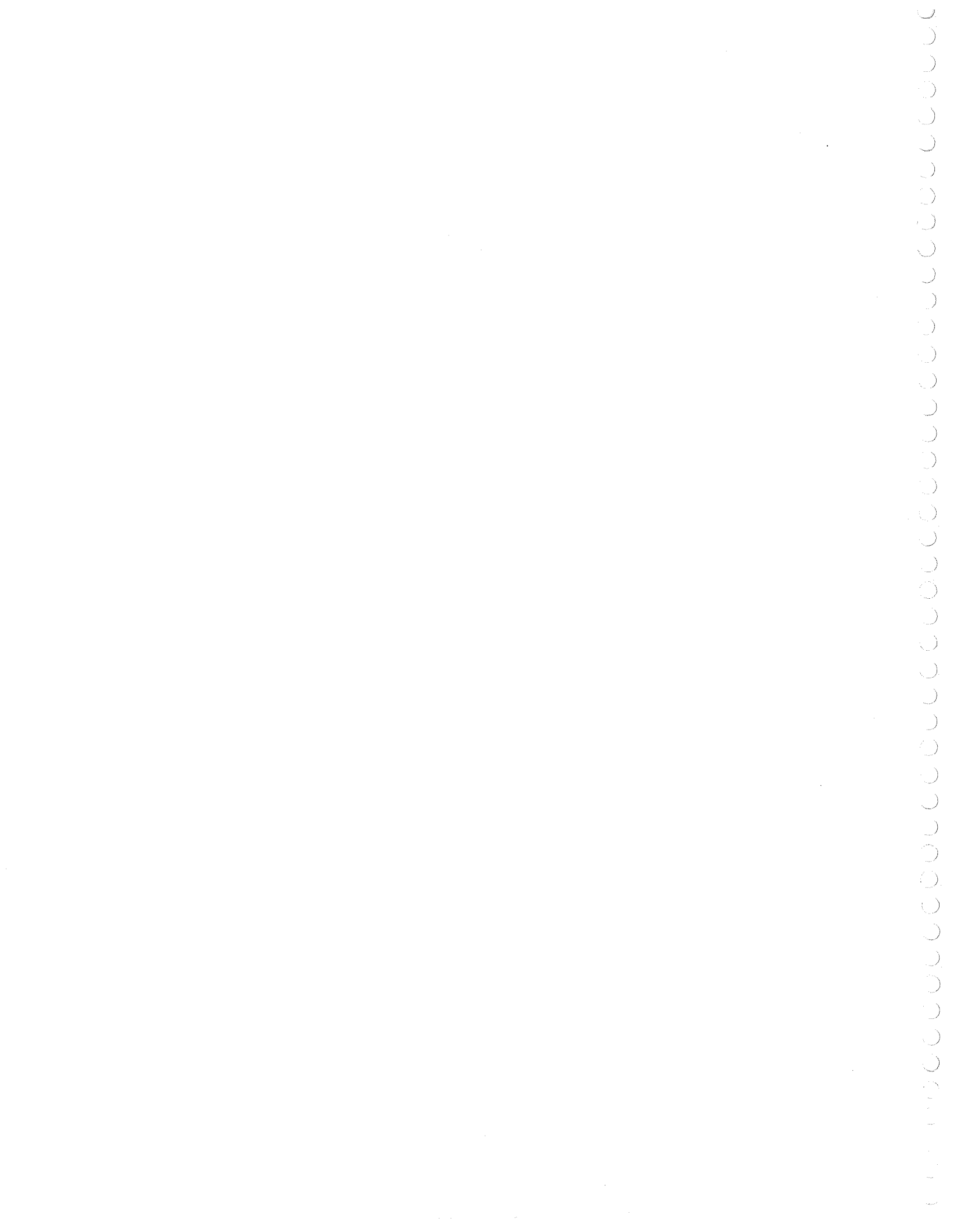
$$(n^2 - y^2)^2 - m^4 = m^4 y'^2$$

$$\int_0^{y(x)} \frac{m^2 dy}{\sqrt{(n^2 - y^2)^2 - m^4}} = \int_0^x dx$$

la raíz es $\sqrt{m^4 - m^4 - 2n^2 y^2 + y^4} = \left[(n^2 - m^2) - y^2 \right]^{1/2} \left[(n^2 + m^2) - y^2 \right]^{1/2}$

llamemos $p^2 = n^2 - m^2 > 0$, $q^2 = m^2 + n^2$, $q > p$

$$m^2 \int_0^{y(x)} \frac{dy}{\sqrt{(p^2 - y^2)(q^2 - y^2)}} = x \quad 0 < p < q$$



Esta integral sale en tablas:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}} = \frac{1}{a} \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{x}{b}, \frac{b}{a} \right) \quad 0 < x < b < a$$

$$0 \leq k = \frac{b}{a} \leq 1$$

(Dwight 781.01)

$$\text{con } a = q \quad k = \frac{p}{q} = \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{n^2 + m^2}} \\ b = p$$

entonces la integral es

$$m^2 \cdot \frac{1}{q} \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{y}{p}, \frac{p}{q} \right) = x \Rightarrow$$

$$y(x) = p \operatorname{sn} \left(\frac{qx}{m^2}, \frac{p}{q} \right)$$

tenemos que determinar n y m en términos de d y L .

$$\text{como } y \left(\frac{d}{2} \right) = \sqrt{K + \lambda} = \sqrt{n^2 - m^2} = p$$

debe cumplirse

$$1 \cdot p = p \operatorname{sn} \left(\frac{qd}{2m^2}, \frac{p}{q} \right)$$

$$\operatorname{sn} \left(\frac{dq}{2m^2}, \frac{p}{q} \right) = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{qd}{2m^2} = K \left(\frac{p}{q} \right)} \quad (1)$$

K integral elíptica



arco hipocicloides de lazo

$$L = 2 \int_0^{d/2} \sqrt{1+y^2} dx$$

$$= 2 \int_0^{d/2} \frac{n^2 - y^2}{m^2} dx$$

$$L = \frac{n^2}{m^2} d - \int_0^{d/2} \frac{y^2}{m^2} dx = \frac{n^2}{m^2} d - \frac{p^2}{m^2} \int_0^{d/2} \operatorname{sn}^2\left(\frac{qx}{m^2}, \frac{p}{q}\right) dx$$

con $u = \frac{qx}{m^2}$, $dx = \frac{m^2}{q} du$ $x \Big|_0^{d/2} \rightarrow u \Big|_0^{\frac{dq}{2m^2}}$

$$L = \frac{n^2}{m^2} d - \frac{p^2}{q} \int_0^{\frac{dq}{2m^2}} \operatorname{sn}^2\left(u, \frac{p}{q}\right) du$$

$$= \frac{n^2}{m^2} d - \frac{p^2}{q} \int_0^{K(k)} \operatorname{sn}^2(u, k) du$$

$$= \frac{n^2}{m^2} d - \frac{p^2}{q} \cdot \frac{1}{k^2} \left(u - E(\operatorname{am}(u), k) \right) \Big|_0^K$$

como $\operatorname{am}(0) = 0$
y $E(0, k) = 0$

$$L = \frac{n^2}{m^2} d - \frac{p^2}{k^2 q} \left[K(k) - E(\operatorname{am}(K(k)), k) \right]$$



$$L = \frac{n^2}{m^2} d - \frac{p^2}{k^2 q} [K(k) - E(k)], \quad k = \frac{q}{p}$$

→

$$L = \frac{n^2}{m^2} d - q [K(k) - E(k)] \quad (2)$$

De (1)

$$\frac{qd}{2m^2} = K\left(\frac{p}{q}\right)$$

y de (2) obtenemos n y m en términos de L y d ,
con lo que la solución está completa.

$$y(x) = p \operatorname{sn}\left(\frac{qx}{m^2}, \frac{p}{q}\right)$$

U.S. DEPARTMENT OF JUSTICE
FEDERAL BUREAU OF INVESTIGATION
WASHINGTON, D.C. 20535

• There is a nice exercise about Mylar Balloons in

W. H. Paulsen, "What is the shape of a Mylar Balloon"

The American Mathematical Monthly
101 (1994) 953 - 958

Taken from: "Calculus of Variations and PDE's of the 1st order" vol. 1.
C. Carathéodory, Holden Day, Inc., San Francisco 1965
Call #: 515.64 c 262 v. I 1965-67.

BIOGRAPHICAL NOTE

Constantin Carathéodory was born in Berlin on September 13, 1873, but he grew up in Brussels where his father was the Turkish ambassador to Belgium from 1875 to 1900. He came from a respected Greek family which had lived in Constantinople since the beginning of the nineteenth century and whose members had held many important diplomatic and governmental positions.

Carathéodory's preliminary education ended with graduation from a *Gymnasium*; he then entered the *Ecole Militaire de Belgique*, where four years later he finished training as an engineering officer. After additional technical studies in London and Paris he went to Egypt to work as an engineer along the Nile.

In 1900 he decided to go to Germany to devote himself exclusively to mathematics. He studied four years in Berlin and Göttingen as a student of Schwarz and Hilbert and graduated from Göttingen in 1904. His academic work as a lecturer at Göttingen and Bonn and later his duties at the technical *Hochschulen* in Hanover and Breslau met with such success that in 1913 he succeeded Professor Felix Klein at the University of Göttingen. Later, in 1918, he went to the University of Berlin.

After only two years in Berlin he accepted the request of the Greek government to take over the founding and organization of the newly planned Greek university in Smyrna. His accomplishments in establishing the institute and in obtaining well-known Greek and foreign professors were, however, destroyed when Turkish troops occupied and burned the city.

For the next two years he served at the university and technical *Hochschule* in Athens and in 1924 finally accepted a position at the University of Munich where he remained until his death on February 2, 1950.

Constantin Carathéodory's success as a mathematician was greatly aided by his gift for languages, a talent which he possessed to a high degree. He knew both Greek and French as native tongues and mastered German to such perfection that most of his publications in that language are considered to be stylistic masterpieces. In addition to this he spoke English, Italian, and Turkish and read both classical Latin and Greek literature as an evening diversion. Mastery of so many languages enabled him to communicate freely and cordially with researchers of many nations on his extended foreign travels and greatly to enlarge his field of vision and various spheres of professional activity.

R. D.

References:

A. M. Arthurs, "Complementary Variational Principles"

Clarendon Press - Oxford 1970 (Bibl. Mat. 515.64 A791 C, 1970, c1)

Contiene variis PV's y sus "principios complementarios" (duals)

Eg.

Thomas-Fermi, pp. 77-79.

Liouville Eqn. pp. 72-73

Scattering Length

Capacity of a cube pp. 43-44

Elastostatic Capacity pp. 41-42

Ritz & Temple Bounds pp. 40, 41

