La Ley de Gravitación Universal

Ya hemos visto en los capítulos 1 y 2 que todo cuerpo material es atraído por la Tierra. Cerca de la superficie de la Tierra esta fuerza es vertical, proporcional a la masa del cuerpo y la constante de proporcionalidad, como hemos visto, se conoce como *aceleración de gravedad* y es aproximadamente $g \approx 9,81$ [m/seg^2]. En 1666, Isaac Newton se dió cuenta que esste hecho, conocido desde mucho tiempo es solo una aproximación de una Ley de Fuerzas mucho mas general, la que es responsable no solo de que los cuerpos caigan hacia la Tierra, sino que también que la Luna orbite alrededor de la Tierra o que la Tierra orbite alrededor del Sol. La Ley de Fuerzas descubierta por Newton fue publicada en su libro el *Principia* (citado en el Capítulo 2) en 1687. Se conoce como Ley de Gravitación Universal. Consideremos dos partículas puntuales (en el sentido discutido a principios del capítulo 1), de masas m_1 y m_2 respectivamentes. La ley de gravitación de Newton dice que estas partículas solo por tener masa se atraen mediante una fuerza que es proporcional al producto de las masas e inversamente al cuadrado de la separación entre ellas. La constante de proporcionalidad e conoce como Constante de Gravitación Universal, usualmente se denomina por G, y su valor numérico determinado experimentalmente, en el Sistema Universal de Unidades está dado por $G \approx 6,67 \times 10^{-11}$ [N–m^2/kg^2].

Para ser más precisos, supongamos que la partícula 1 está ubicada en la posición $\vec{r}_1$ y la partícula 2 en la posición $\vec{r}_2$, como se indica en la figura

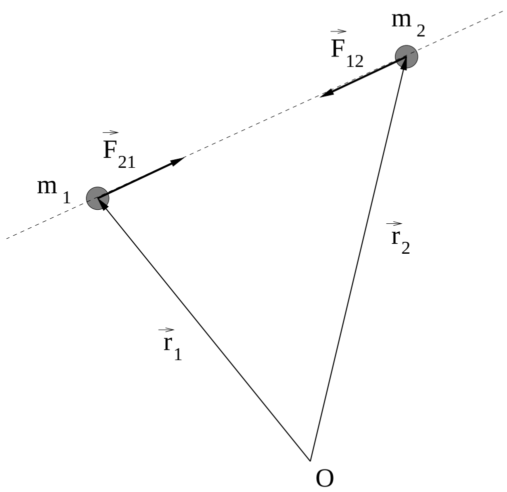

Figura 1: Atracción gravitacional entre dos partículas

Entonces, la fuerza gravitacional que 1 ejerce sobre 2 está dada por

$$\vec{F}_{21} = -Gm_1m_2\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_2|^3}. \tag{1}$$

La Ley de Gravitación Universal satisface el Principio de Acción y Reacción, pues de (1) se sigue que $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. En realidad, satisface el principio de acción y reacción en forma fuerte pues la fuerza de interacción entre los dos cuerpos está dirigida a lo largo de la línea que los une.

Es parte de la Ley de Gravitación Universal que ésta satisface lo que habitualmente se conoce como el *Principio de Superposición*, i.e., si dos cuerpos 1 y 2 interactúan con un tercero, la fuerza de atracción que ejerce el sistema $(1, 2)$ sobre 3 es la suma vectorial de las fuerzas de atracción que ejercen independientemente 1 y 2 sobre 3, i.e.,

$$\vec{F}_{3,(1,2)} = \vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2}, \tag{2}$$

Para hacer contacto con los comentarios que hicimos al empezar esta sección surge un problema no menor. La Ley de Gravitación Universal (1) se aplica directamente sobre partículas puntuales (i.e., partículas cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con las distancias que las separan). Así, no podemos aplicar directamente la Ley de Gravitación Universal para hacer contacto con la fórmula del peso de un cuerpo cerca de la superficie de la Tierra. Si bien el cuerpo puede ser *puntual* la Tierra está lejos de serlo. Esta observación retrasó un tiempo la publicación del Principia, hasta que Newton logró demostrar el siguiente resultado, que es de mucha importancia para nuestra discusión:

Si un cuerpo esférico, como la Tierra, tiene su masa distribuida con simetría esférica, entonces la fuerza que este cuerpo hace sobre un objeto puntual ubicado fuera del primero se puede calcular como si el primer cuerpo fuese puntual y toda su masa estuviese ubicada en su centro

Comentario: Que el cuerpo en cuestión tenga simetría esférica significa que su densidad de masa solo depende de la distancia a su centro.

Una vez que contamos con este poderoso resultado de Newton podemos hacer contacto con la vieja formula del peso. Consideremos un objeto material de masa m ubicado sobre la superficie de la Tierra. Entonces, la Ley de Gravitación Universal, combinada con el poderoso Teorema de Newton, nos dice que la fuerza con que la Tierra atrae al objeto de masa m está dirigida a lo largo de la vertical (i.e., hacia el Centro de la Tierra) y su magnitud está dada por

$$|F| = \frac{G\,M}{R^2} m, \tag{3}$$

en que G es la constante de Gravitación Universal, M la Masa de la Tierra, y R el radio de la Tierra. Pero, por otra parte, esta fuerza debe ser efectivamente el peso del objeto, es decir debe ser igual a $m\,g$, de modo que tenemos la identidad

$$g = \frac{GM}{R^2}. \tag{4}$$

La ecuación anterior nos sirve para determinar la masa de la Tierra. Ya conocemos los valores experimentales de g y G en el Sistema Universal de unidades.Por otra parte, el radio de la tierra está dado casi exactamente por

$$R = \frac{40000}{2\pi}[\mathrm{km}] \approx 6,37 \times 10^6[\mathrm{m}]. \tag{5}$$

Comentario: De hecho, cuando en 1791, Pierre Simon Laplace y la Comisión Francesa encargada de definir el entonces llamado Sistema Métrico, el metro fue definido de tal manera que la circunferencia de la Tierra es 40000 [km], i.e., cada cuadrante (distancia del polo al ecuador es de 10000 [km]), de modo que es trivial recordar el Radio de la Tierra.

Reemplazando los valores numéricos de g, G y R en (4), encontramos la masa de la Tierra,

$$M \approx 5,98 \times 10^{24}[\mathrm{kg}]. \tag{6}$$

Movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza central

En esta sección estudiamos el movimiento de una partícula (e.g., un satélite, un planeta, un cometa, etc.) bajo la acción de la fuerza de gravitación. Empezamos por discutir en general el movimiento bajo la acción de fuerzas centrales.

Consideremos una partícula de masa m, sometida a una *fuerza central*, es decir a una fuerza de la forma

$$\vec{F} = f(|\vec{r}|)\hat{r}. \tag{7}$$

Entonces, la ecuación de movimiento de la partícula sometida a dicha fuerza será

$$m\frac{d}{dt}\vec{r} = f(r)\hat{r}, \tag{8}$$

en que $r = |r|$. Por ejemplo, para el caso de una partícula atraída gravitacionalmente por un cuerpo puntual, $f(r) = -k/r^2$ en que $k = GM$ (G es la constante de gravitación universal y M la masa del centro de fuerzas).

Conservación de momentum angular

Una de las propiedades importante del movimiento de una partícula sometida a la acción de una fuerza central es la conservación del momentum angular de la partícula con respecto al centro de fuerzas. La ecuación de movimiento que gobierna la evolución del momentum angular está dada por

$$\frac{d\vec{\ell}_O}{dt} = \vec{\tau}_O, \tag{9}$$

en que $\vec{\ell}_O = \vec{r} \times \vec{p}$ denota el momentum angular de la partícula con respecto al punto O (en este caso O es el centro de fuerzas). Aquí $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ es el momentum lineal de la partícula. En (9) $\tau_O = \vec{r} \times \vec{F}$ es el torque ejercido por la fuerza $\vec{F}$ sobre la partícula, con respecto al punto O. Como la fuerza que estamos considerando es una fuerza central, $\vec{F}$ es paralelo a $\vec{r}$ y por lo tanto $\vec{\tau}_O = 0$. Entonces, de (9) concluimos que

$$\frac{d\vec{\ell}_O}{dt} = 0, \tag{10}$$

y por lo tanto el momentum angular de la partícula, con respecto al punto O, es conservado (i.e., el vector ℓ_0 es constante). La conservación del momentum angular de la partícula simplifica de inmediato el problema. Como en general,

$$\vec{r} \cdot \vec{\ell}_O = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = 0, \tag{11}$$

y puesto que ahora $\vec{\ell}_O$ es un vector constante, la ecuación (11) representa la ecuación de un plano que pasa por el orígen (i.e., por el punto O) y cuya normal es $\vec{\ell}_O$. De este modo, el movimiento bajo la acción de una fuerza central ocurre en un plano (el plano perpendicular a $\vec{\ell}_O$). Para describir este movimiento usaremos coordenadas polares (ρ, θ) y utilizaremos como orígen el centro de fuerzas. Recordemos que en coordenadas polares

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho}, \tag{12}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta}, \tag{13}$$

y por lo tanto,

$$\vec{p} = m\dot{\rho}\hat{\rho} + m\rho\dot{\theta}\hat{\theta}. \tag{14}$$

De (12) y (14) tenemos

$$\vec{\ell}_O \equiv \vec{r} \times \vec{p} = m\rho^2\dot{\theta}\hat{k}, \tag{15}$$

y por la consevación del momentum angular tenemos que

$$m\rho^2\dot{\theta} = \vec{\ell}_0 \cdot \hat{k} \tag{16}$$

es una constante de movimiento la cual denotaremos de aquí en adelante ℓ. Por otra parte, como la aceleración en polares está dada por

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta}, \tag{17}$$

y $\hat{r} = \hat{\rho}$ y $r = \hat{\rho}$, de (8) tenemos que las ecuaciones de movimiento de la partícula están dadas por

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = f(\rho) \tag{18}$$

y

$$m(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}). \tag{19}$$

Esta última ecuación es simplemente la conservación de momentum angular (i.e., $m\rho^2\dot{\theta} = \ell$). De la conservación de momentum angular podemos despejar $\dot{\theta}$ en términos de θ, i.e.,

$$\dot{\theta} = \frac{\ell}{m\rho^2}, \tag{20}$$

y reemplazarlo en (18), para así obtener una ecuación que sólo involucra a la variable ρ,

$$m\ddot{\rho} - \frac{\ell^2}{m\rho^3} = f(\rho). \tag{21}$$

Básicamente, y debido a la conservación del momentum angular, hemos reducido el problema original a un problema "unidimensional".

Otra propiedad importante de las fuerzas centrales es que son *conservativas.* De hecho, si llamamos $V(\rho)$ a la primitiva de $-f(\rho)$ (i.e., $f(\rho) = -dV/d\rho$), vemos que al multiplicar (21) por $\dot{\rho}$, esta ecuación se puede integrar y así obtenemos

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{\ell^2}{2m\rho^2} + V(\rho) = E, \tag{22}$$

en que E es la energía total de la partícula.

Comentario: También podríamos haber llegado a (22) procediendo de la manera general que discutimos en el Capítulo 3. Puesto que $\vec{F} = f(\rho)\hat{\rho}$, y $d\vec{r} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\theta\hat{\theta}$ a lo largo de la trayectoria, $\vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\rho)d\rho = -dV$ (ya que hemos llamado V a la primitiva de f). Entonces $\vec{F}$ es *conservativa* y deriva del potencial $V(\rho)$. Como $\vec{F}$ es la única fuerza que actúa sobre la partícula, su energía total se conserva. Su energía cinética está dada por

$$K = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho\dot{\theta}^2\right), \tag{23}$$

en coordenadas polares. Sin embargo, por la conservación de momentum angular, utilizando (20) para reemplazar $\dot{\theta}$ en términos de ρ en (23), obtenemos

$$K = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{\ell^2}{2m\rho^2}, \tag{24}$$

de modo que (22) representa la conservación de energía $K + V = E$.

La segunda ley de Kepler: Ley de las áreas

La conservación del monentum angular tiene una interpretación geométrica muy simple en términos de la geometría de la órbita de la partícula.

En 1609, J. Kepler (1571–1630) enunció su segunda ley concerniente a la órbita de los planetas del modo siguiente:

Segunda Ley de Kepler: El movimiento de un planeta alrededor de su órbita es tal que el vector que une el Sol con el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

En la figura hemos dibujado el planeta P en su movimiento alrededor del sol. Usando coordenadas polares, con el sol en el orígen, la distancia del sol al planeta está dada por ρ. En un intervalo de tiempo suficientemente pequeño dt, el planeta se mueve de modo que su posición angular cambia en $d\theta$. El área que barre el vector que une el sol con el planeta, en el intervalo de tiempo δt (área achurada en la figura), corresponde aproximadamente al área del triángulo de altura $\approx \rho$ y base $\approx \rho d\theta$. Es área de este triángulo es precisamente

$$dA = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta. \tag{25}$$

El área barrida por unidad de tiempo es,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\frac{d\theta}{dt}. \tag{26}$$

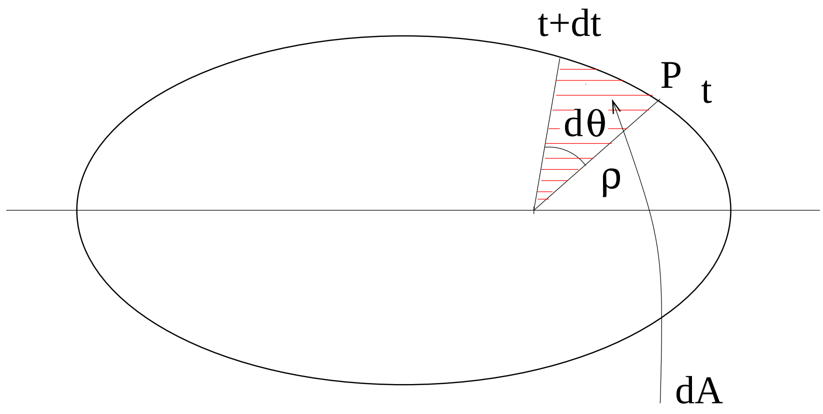

Figura 2: Areas barridas en tiempos iguales son iguales

Como consecuencia de la conservación del momentum angular (que a su vez es solo consecuencia del hecho que la fuerza es central), reemplazando (16) en (26) vemos que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\ell}{2\,m}, \tag{27}$$

es constante. Que dA/dt es constante es, precisamente, el contenido de la segunda ley de Kepler.

Movimientos posibles de una partícula sometida al potencial de Kepler

A partir de las leyes de conservación de energía y de momentum angular de una partícula sometida a la acción de una fuerza central, resumidas en la ecuación (22), es posible discutir cualitativamente los movimientos posibles de una partícula sometida al potencial de Kepler. Después de todo, hemos "reducido" el problema a un problema unidimensional, y en el capítulo 3 vimos como discutir cualitativamente los movimientos de una partícula cuya energía $E = K + V$ es conservada. La ecuación (22) es precisamente de la forma $K + V = E$ siempre que interpretemos adecuadamente el potencial V.

Como vimos en la introducción a este capítulo, un cuerpo que se mueve alrededor del sol (o alrededor de un planeta) está sometido a la acción de un potencial de la forma

$$V(\rho) = -\frac{G\,M\,m}{\rho}, \tag{28}$$

en que M es la masa del Sol (o del planeta) en torno al cual se mueve el cuerpo bajo consideración y G es la constante de Gravitación Universal. Al potencial dado por (28) lo llamaremos *potencial de Kepler*. Para simplificar un poco la notación llamaremos $k = GM$ y así usaremos $V = -km/\rho$. Con el objeto de llevar la ecuación (22) a una ecuación de la forma $K + V = E$, correspondiente a un problema unidimensional (i.e., en que K es de la forma $K = m\dot{\rho}^2/2$, debemos considerar como energía potencial no solamente el potencial de Kepler. Debemos agregarle el término $\ell^2/(2m\rho^2)$, que obtuvimos al deshacernos de $\dot{\theta}$ usando la conservación del momentum angular. Así pues, con el objeto de continuar nuestra discusión, es conveniente definir

$$V_{ef}(\rho) = V(\rho) + \frac{\ell^2}{2\,m\rho^2} = -\frac{k\,m}{\rho} + \frac{\ell^2}{2\,m\rho^2}. \tag{29}$$

A la función $V_{ef}(\rho)$ la llamaremos *potencial efectivo*. En términos del potencial efectivo, entonces, (22) es de la forma

$$E = K + V_{ef} = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + V_{ef}(\rho). \tag{30}$$

El primer término a la derecha de (29) es el potencial de Kepler. El segundo término se denomina comunmente la *barrera centrífuga*. Este nombre se debe a que es el momentum angular de la partícula previene que la partícula en cuestión caiga al sol. Como el momentum angular, $\ell = m\rho^2\dot{\theta}$, es conservado, si éste no es cero, a medida que la partícula se acerca al sol debe aumentar su velocidad angular, para mantener el producto $\rho^2\dot{\theta}$ constante. Si la velocidad angular aumenta, aumenta la fuerza centrífuga que previene que la partícula siga cayendo. Por supuesto que si el momentum angular de la partícula es cero, ésta caerá inevitablemente al sol (o al planeta, i.e., al centro de fuerzas).

En la figura (**??**) hemos graficado el potencial efectivo como función de ρ. Cerca de $\rho = 0$ el término que domina es la barrera centrífuga. Por otra parte, para valores grandes de ρ el término que domina es el potencial de Kepler (que es negativo).

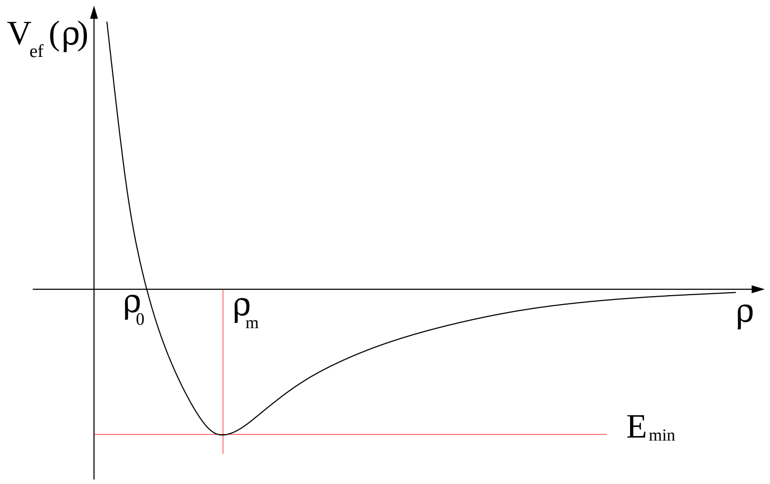

Figura 3: Potencial Efectivo

La función V_{ef} tiene un solo cero positivo que está dado por

$$\rho_0 = \frac{\ell^2}{2\,m^2\,k}. \tag{31}$$

Así mismo, la función $V_{ef}(\rho)$ tiene un sólo mínimo el cual ocurre para

$$\rho_m = 2\,\rho_0 = \frac{\ell^2}{m^2\,k}. \tag{32}$$

El valor del potencial en el mínimo es

$$V_{ef}(\rho_m) = -\frac{1}{2}\frac{m^3\,k^2}{\ell^2}. \tag{33}$$

En vista de las propiedades del potencial efectivo que acabamos de encontrar, una partícula que tiene un momentum angular ℓ, sólo puede tener valores de energía que van desde

$$E_{min} = V_{ef}(\rho_m) = -\frac{1}{2}\frac{m^3\,k^2}{\ell^2}. \tag{34}$$

hadsta $+\infty$. Cualitativamente existen cuatro tipos de movimientos posibles de la partícula en cuestión, dependiendo del rango de energía de la misma.

i) $E = E_{min}$: Si el valor de la energía de la partícula es justamente el mínimo de V_{ef}, $K = m\dot{\rho}^2/2 = 0$; así, la partícula se mueve en una órbita $rho = \rho_m$ constante, lo cual corresponde a una órbita circular.

Comentario: El radio del círculo puede derivarse más facilmente recurriendo al balance: fuerza gravitacional igual a la fuerza centrífuga en este caso, i.e.,

$$\frac{mv^2}{\rho} = \frac{k\,m}{\rho^2},$$

y utilizando la conservación del momentum angular

$$mv\rho = \ell.$$

Resolviendo para ρ en este par de ecuaciones encontramos de inmediato el valor del radio de la órbita circular, $\rho = \ell^2/(m^2\,k)$.

ii) $E_{min} < E < 0$: Como K es no negativo, y $E = K + V_{ef}$, la partícula sólo se puede mover en el rango de valores de ρ para los cuales se satisface

$$V_{ef}(\rho) \leq E. \tag{35}$$

Dada la forma del gráfico de $V_{ef}(\rho)$, si $E_{min} < E < 0$, de la condición (35) se sigue que existen dos radios, digamos ρ_{min} y ρ_{max} tales que la partícula se mueve een una órbita que satisface $\rho_{min} \leq \rho \leq \rho_{max}$. Así pues, se trata de órbitas acotadas. Más adelante veremos que en realidad corresponden a órbitas elípticas. Para determinar los valores de ρ_{max} y de ρ_{min} basta con resolver

$$V_{ef}(\rho) = E, \tag{36}$$

y dada la forma de $V_{ef}(\rho)$, i.e., la ecuación (29), la ecuación (36) es una ecuación cuadrática en la variable $1/\rho$. Las dos soluciones, ambas positivas, de (36) son

$$\frac{1}{\rho_{min}} = \frac{m^2\,k}{\ell^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\,E\,\ell^2}{m^3\,k^2}}\right), \tag{37}$$

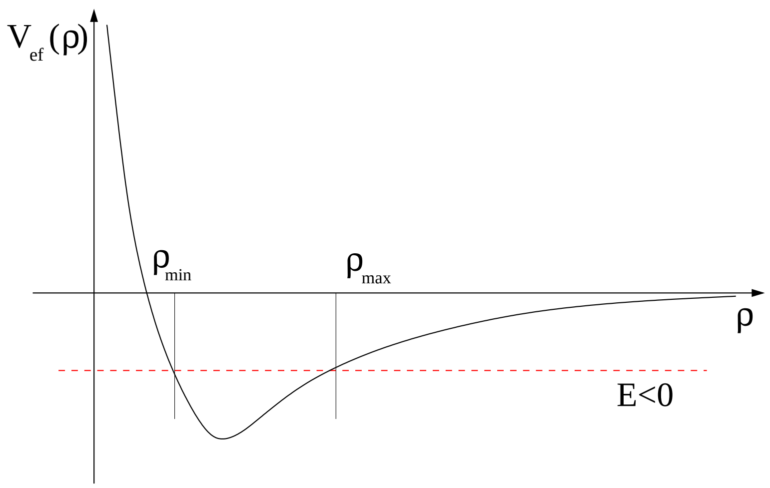

Figura 4: Energía $E < 0$ para orbitas elípticas

$$\frac{1}{\rho_{max}} = \frac{m^2\, k}{\ell^2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\,E\,\ell^2}{m^3\,k^2}}\right), \tag{38}$$

Estas dos ecuaciones jugarán un papel importante cuando determinemos la geometría de la órbita elíptica en términos de la dinámica de la partícula, la cual está contenida es sus valores del momentum angular, ℓ y de su energía, E.

iii) $E = 0$: para este valor de la energía, existe una solución de la ecuación $V_{ef}(\rho) = 0$, i.e., ρ_0. Vemos del gráfico del potencial efectivo que la partícula se puede mover en el rango de valores $\rho_0 \leq \rho \leq \infty$. De este modo, aunque la partícula no cae al sol (o a cualquiera sea el centro de fuerzas) sí se puede alejar indefinidamente. La órbita de la partícula en cuestión es, por tanto, una órbita no acotada. Veremos más adelante que en realidad corresponde a la ecuación de una parábola. Como la energía total de la partícula está dada por $E = m\vec{v}^2/2 - GMm/\rho = 0$, cuando la partícula se aleja indefinidamente (i.e., cuando $\rho \to +\infty$), su velocidad tiende a cero.

iv) $E > 0$: para este rango de valores de la energía, también existe una sola solución positiva de la ecuación $V_{ef}(\rho) = 0$, la que está dada por

$$\frac{1}{\rho_{min}} = \frac{m^2\, k}{\ell^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\,E\,\ell^2}{m^3\,k^2}}\right). \tag{39}$$

Vemos del gráfico del potencial efectivo que la partícula se puede mover en el rango de valores $\rho_{min} \leq \rho \leq \infty$. De este modo, aunque la partícula no cae al sol (o a cualquiera sea el centro de fuerzas) sí se puede alejar indefinidamente, tal como en el caso anterior. Nuevamente la órbita de la partícula en cuestión es, por tanto, una órbita no acotada. Veremos más adelante que en realidad corresponde a la ecuación de una hipérbola. Como la energía total de la partícula está dada por $E = m\vec{v}^2/2 - GMm/\rho > 0$, cuando la partícula se aleja indefinidamente (i.e., cuando $\rho \to +\infty$), su velocidad tiende a un valor finito no nulo.

La primera Ley de Kepler

La primera ley de Kepler, enunciada en 1609, dice lo siguiente:

Las órbitas de los planetas ocurren en un plano. El Sol se encuentra en ese plano. La trayectoria del planeta es una elipse y el Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse

En el Principia, publicado en 1687, Issac Newton derivó, a partir de su ley de Gravitación Universal y de su Mecánica, las tres leyes de Kepler, lo que ha sido uno de los grandes hitos en la historia de la física. Ya hemos visto que el hecho que la fuerza de gravedad sea una fuerza central implica la conservación del momentum angular del planeta alrededor del sol. A su vez, la conservación del momentum angular implica que la trayectoria del planeta ocurre en un plano, y el Sol se encuentra en ese plano. A propósito el plano en que se encuentra la órbita de la Tierra se conoce como el plano de la *eclíptica*. Nos resta, entonces, demostrar que las órbitas son efectivamente elipses. Nuestro punto de partida será la ecuación de movimiento (21) en que

$$f(\rho) = -\frac{k\,m}{\rho^2}, \tag{40}$$

de acuerdo a la ley de Gravitación Universal. En (40), $k = GM$, con G la constante de gravitación universal, M la masa del sol, y m la masa del planeta. De este modo nos vemos enfrentados a resolver la ecuación diferencial

$$m\ddot{\rho} - \frac{\ell^2}{m\rho^3} = -\frac{k\,m}{\rho^2}, \tag{41}$$

para ρ como función del tiempo. Esta es una ecuación diferencial ordinaria, de segundo orden, no lineal. Una vez conocida la solución $rho(t)$ usamos la ecuación (20) para encontrar $\theta(t)$. La órbita del planeta queda dada finalmente en forma paramétrica por el par de funciones $(\rho(t), \theta(t)$. Aquí procederemos en forma un tanto diferente. En lugar de encontrar la ecuación paramétrica de la trayectoria del planeta, lo que haremos es encontrar directamente la ecuación de la órbita, i.e., ρ como función de θ, i.e., $\rho(\theta)$, lo que es más simple de hacer.

Para motivar un poco los cambios de variables que haremos a continuación, conviene recordar la ecuación de una elipse en coordenadas polares. Las propiedades mas relevantes, desde el punto de vista de este capítulo, están desarrolladas en el apéndice. En particular, ahí encontramos la ecuación de una elipse en polares (ver la ecuación eq:ap4), que está dada por $\rho(\theta) = p/(1+e\cos\theta)$. Es evidente de esta ecuación que la dependencia del recíproco de ρ (i.e., de $1/\rho$) en la variable θ es mucho más simple que la dependencia del mismo ρ. Esto también se refleja en la solución de la ecuación $V_{ef} = E$ que hicimos más arriba, la cual era una cuadrática para $1/\rho$. Basados en ambos hechos es que vamos a introducir la nueva variable $u = 1/rho$ como nuestra nueva variable dependiente. A continuación buscaremos una ecuación diferencial para u como función de θ. Nótese de la ecuación (20) que $\dot{\theta}$ tiene siempre el mismo signo. En particular, si ℓ es positivo, $\dot{\theta} > 0$ y θ aumenta en forma monotónica en el tiempo. Así pues es perfectamente legítimo utilizar a la variable θ, en lugar del tiempo, como variable dependiente.

Usando la regla de la cadena tenemos

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\,\dot{\theta}, \tag{42}$$

pues $\rho = 1/u$. Usando (20) para reemplazar $\dot{\theta}$ en (42) en términos de ρ obtenemos

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\ell}{m}\frac{du}{d\theta}. \tag{43}$$

Iterando una vez más, calculamos a partir de la ecuación anterior,

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{\ell}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{\ell^2}{m^2}\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}. \tag{44}$$

Reemplazando $d^2\rho/dt^2$ en (41), multiplicando por $\rho^2\, m/\ell^2$ finalmente obtenemos la siguiente ecuación para u como función de θ:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = k\frac{m^2}{\ell^2}. \tag{45}$$

Esta es una ecuación muy simple para u como función de θ. Corresponde a la ecuación de movimiento armónico simple que hemos encontrado en repetidas oportunidades anteriormente en este libro. La solución general de (45) se puede escribir de la forma

$$u(\theta) = k\frac{m^2}{\ell^2} + A\cos(\theta - \theta_0), \tag{46}$$

en que A y θ_0 son constantes de integración que dependen del estado inicial del sistema. Siempre podemos elegir el eje polar de tal modo que θ_0 sea cero (esto equivale a elegir la orientación general de la órbita en el plano de la eclíptica). A partir de (46) podemos volver a nuestra variable ρ y escribir la ecuación de la órbita como

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \tag{47}$$

en que

$$p = \frac{\ell^2}{k\,m^2}, \tag{48}$$

y

$$e = \frac{A\ell^2}{km^2}. \tag{49}$$

La ecuación (47) es la ecuación general de una *cónica* en coordenadas polares. Los parámetros p y e que definen a la cónica se comocen como el *latus rectum* y la *excentricidad* de la cónica respectivamente (ver el Apéndice a este capítulo).

La dinámica de la órbita del planeta depende exclusivamente de su energía E y de su momentum angular ℓ, los que a su vez están determinados por las condiciones iniciales. Vemos de (48) que el parámetro p sólo depende del momentum angular ℓ. Por otra parte, en la expresión para la excentricidad, (49) aparece la constante de integración A que no conocemos. Lo que haremos a continuación será encontrar una expresión para la excentricidad en términos de E y ℓ. Para tal efecto, compararemos las expresiones "dinámicas" para los puntos de *retorno* que encontramos al resolver (36), i.e., las expresiones (37) y (38) para ρ_{min} y ρ_{max}, con las condiciones "geométricas" (96) y (97) derivadas a partir de (47).

En realidad basta comparar (96) con (36), recordando la expresión para p, (48). Obtenemos de inmediato que

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\,E\ell^2}{m^3 k^2}} = \sqrt{1 - \frac{E}{E_{min}}}, \tag{50}$$

como expresión para la excentricidad en términos de E y ℓ.

De (50) vemos que si la energía es E_{min}, la excentricidad es nula y la órbira es un círculo, con radio $\rho = p$. Si la energía es negativa, de modo que $E_{min} < E < 0$, entonces $0 < e < 1$, y la órbita es una elipse. Por otra parte, si la energía es nula, $e = 1$ y la órbita es una parábola. Finalmente, si $E > 0$, $e > 1$ y la órbita es una hipérbola.

Con esto concluimos la deducción de la primera ley de Kepler.

Así como hemos visto que el *latus rectum*, p, de la elipse depende solamente del momentum angular, veremos a continuación que el semieje mayor de la elipse, a, solamente depende de la energía del planeta. Tomando el cuadrado de la ecuación (50) para la excentricidad, obtenemos

$$1 - e^2 = -\frac{2\,E,\ell^2}{m^3\,k^2} = -\frac{2\,E\,p}{k}, \tag{51}$$

en que hemos usado (48) para obtener la última igualdad. Finalmente recordando que para una elipse, el semieje mayor puede ser expresado como $a = p/(1-e^2)$ (ver ecuación (90) en el Apéndice), obtenemos

$$a = -\frac{k\,m}{2\,E}, \tag{52}$$

que expresa el semieje mayor de la elipse solamente en términos de la energía. Esta última ecuación se puede escribir alternativamente como

$$E = -\frac{k\,m}{2\,a} = -\frac{G\,M\,m}{2\,a} \tag{53}$$

que expresa la energía del planeta en términos de la geometría de la órbita.

La tercera Ley de Kepler

Luego de publicar en 1609 sus dos primeras leyes sobre el movimiento planetario, tardó diez años en publicar su tercera ley. En 1619, en su libro *Harmonice Mundi* enunció la tercera ley del modo siguiente:

Los cuadrados de los períodos de revolución en torno al sol son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas

Los principales elementos en la derivación de la tercera ley son la ley de las áreas y la conexión entre la geometría de la elipse y la dinámica del movimiento de los planetas.

Como hemos visto en la derivación de la primera ley, los planetas desciben elipses, que son curvas cerradas en el plano. Así pues el movimiento de los planetas es periódico. Llamemos T al período de revolución del planeta alrededor del sol. Si integramos la ley de las áreas (27) en el tiempo, en un período completo (i.e., entre 0 y T) obtenemos

$$A = \frac{\ell}{2m}T, \tag{54}$$

en que A es el área total de la elipse. Pero el área de la elipse está dada en términos de los semiejes por

$$A = \pi\, a\, b. \tag{55}$$

(Ver derivación en el apéndice, en particular la ecuación (105). En términos de los parámetros p y e de la elipse los semiejes están dados por (ver apéndice, ecuaciones (90) y (92)),

$$a = \frac{p}{1-e^2} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}, \tag{56}$$

respectivamente. A partir de (56), podemos reagrupar convenientemente los términos de modo que el producto $a\, b = p^{1/2}a^{3/2}$, y luego reemplazar en (55) para obtener

$$A = \pi p^{1/2}a^{3/2}. \tag{57}$$

Igualando las dos expresiones para el área de la elipse, (54) y (57) que hemos encontrado, obtenemos la relación,

$$\frac{\ell}{2\, m}T = \pi p^{1/2}a^{3/2}. \tag{58}$$

Finalmente nuestra tarea se completa usando (48), que relaciona la dinámica del movimiento del planeta con la geometría de la elipse. Tomando el cuadrado de (58) y luego reemplazando la expresión para p contenida en (48) encontramos finalmente

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k} = \frac{4\pi^2}{GM}, \tag{59}$$

en que M es la masa del sol. Esta es precisamente la tercera ley de Kepler. No sólo se aplica al movimiento de los planetas alrededor del sol. Por supuesto que también es válida para el movimiento de satélites alrededor de planetas. En esdte último caso, basta cambiar la masa M del sol por la masa del planeta que hace las veces de centro de fuerzas.

Comentarios:

i) Como en los problemas gravitacionales, la masa inercial del palneta se cancela con la masa gravitacional del mismo, en realidad el único parámetro que aparece en las ecuaciones de movimiento de los planetas es $k = GM$. Esta combinación tiene precisamente las dimensiones de longitud al cubo dividido por tiempo al cuadrado. Es por tal motivo que la única combinación entre T y a que uno puede esperar que sea invariante es, precisamente el cuociente T^2/a^3.

ii) Las unidades de longitud y tiempo que hemos utilizado hasta ahora en este libro (i.e., el metro y el segundo) no son las mas convenientes para calcular movimientos de planetas y satélites. La unidad de tiempo más natural para describir el movimiento planetario es el *año terrestre*, que es el tiempo que tarda la Tierra en completar una revolución alrededor del sol. Aproximadamente, 1 [año] $\approx 3,16 \times 10^7$ [seg]. En cuanto a la unidad de longitud más conveniente, esta es la *Unidad Astronómica* [UA] que es la distancia promedio de la Tierra al Sol. Aproximadamente, 1 [U.A.] $\approx 1,496 \times 10^{11}$ [m].

La Masa del Sol

La tercera Ley de Kepler nos permite calcular la masa del Sol, conociendo la información de la orbita de la Tierra. O, para tal efecto la masa de un planeta conociendo los datos de las órbitas de satélies alrededor del planeta. El semieje mayor de la órbita de la Tierra es

$$a \approx 1,496 \times 10^{11}[\text{m}], \tag{60}$$

y el período de su órbita

$$T \approx 3,156 \times 10^7[\text{seg}]. \tag{61}$$

Por otra parte la Constante de Gravitación Universal es

$$G \approx 6,673 \times 10^{-11}\ [\text{N–m}^2/\ \text{kg}^2. \tag{62}$$

Reemplazando los valores de a, T y G en la terecera Ley de Kepler (59), encontramos

$$M_{sol} = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} \approx 1,989 \times 10^{30}[\text{kg}]. \tag{63}$$

Viaje a Júpiter

A partir del 4 de Octubre de 1957 (fecha del lanzamiento del Sputnik), el hombre se ha aventurado poco a poco fuera de la Tierra. Los primeros satélites artificiales solamente efectuaron órbitas en torno a la Tierra. En la década del los sesenta se hicieron los primeros viajes a la Luna, que culminaron con el viaje de tres astronautas que alunizaron el 20 de julio de 1969. Desde fines de los sesenta se enviaron satélites a distintos planetas del sistema solar. La única manera factible para que un satélite pueda "viajar" por el sistema solar es que se deje llevar por la influencia del sol. Cualquier otra manera es impracticable desde el punto de vista energético.

En esta sección haremos un viaje hipotético a Júpiter. Calcularemos cuando es el tiempo necesario para ir desde la Tierra a Júpiter dejándose llevar por la fuerza del sol. También calcularemos cual es la velocidad que debe tener un satélite, relativa a la Tierra, para poder realizar este viaje.

Tanto la Tierra como Júpiter describen órbitas aproximadamente circulares. El radio de la órbita de la Tierra es 1 [U.A], en tanto que el radio de laórbita de Júpiter es $\approx 5,2$ [U.A.]. Como dijimos más arriba la única manera de ir de un planeta a otro es dejarse llevar por la gravedad del Sol. Entonces el satélite que deseamos enviar a Júpiter debe describir una órbita elíptica con el sol en uno de us focos. Como la energía del satélite es inversamente proporcional al semieje

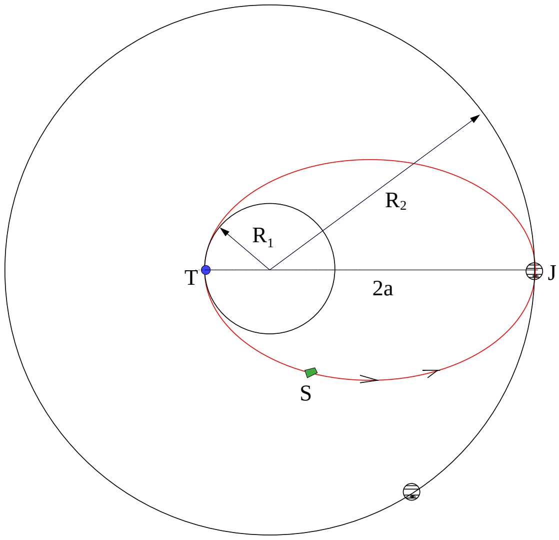

Figura 5: Viaje a Júpiter

de la elipse (ver ecuación (53), la trayectoria de menor energía es la elipse de menor semieje mayor tal que alcanza a tocar (i.e., es tangente) a las órbitas de la Tierra y de Júpiter. En la figura (**??**) hemos dibujado las órbitas de la Tierra, de Júpiter y de la nave que estamos enviando.

De nuestra discusión se desprende que el radio mínimo de la órbita de la nave debe coincidir con el radio de la órbita de la Tierra, en tanto que el radio máximo debe coincidir con el radio de la órbita de Júpiter. Así, $\rho_{min} = 1$ y $\rho_{max} = 5,2$ (ambos valores expresados en Unidades Astronómicas). De (98) tenemos entonces

$$a = \frac{1}{2}(1 + 5,2) \approx 3,1[\text{U.A.}] \tag{64}$$

Una vez obtenido el semieje de la órbita de nuestra nave, podemos aplicar la tercera Ley de Kepler para calcular el tiempo que tarda en recorrer la elipse en cuestión. Por la Tercera Ley de Kepler

$$\frac{T_{nave}^2}{a_{nave}^3} = \frac{T_{tierra}^2}{a_{tierra}^3} = 1, \tag{65}$$

si expresamos los períodos en años y las distancias en [U.A.]. Como en este caso, $a \approx 3,1$ [U.A.], de (65) obtenemos

$$T \approx 5,5\text{años}. \tag{66}$$

Como la elipse es una curva simétrica en torno al eje que une los focos, el tiempo de ida desde la Tierra a Júpiter es realmente $T/2$, i.e., aproximadamente $2,7$ años.

Velocidad de Escape

¿Cuál debe ser la velocidad que hay que dar a un cohete, puesto sobre la superficie de la Tierra, para que escape de su influencia gravitacional? A esta velocidad, que vamos a determinar a continuación se la conoce como *velocidad de escape*.

Si llamamos v_e a la velocidad del cohete, y éste se encuentra sobre la superficie de la Tierra, su energía cinética es $K = mv_e^2/2$, y su energía potencial es $V = -GMm/R$. Aquí, m es la masa del cohete, M la masa de la Tierra y R el radio de la Tierra. Entonces, la energía total del cohete en el momento de lanzamiento es

$$E = K + V = \frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GMm}{R}. \tag{67}$$

Ya hemos visto con anterioridad que la energía del cohete debe ser mayor o igual a cero para que éste pueda escapar. Imponiendo $E = 0$, en (67) vemos que la velocidad mínima para que el cohete pueda escapar es

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2\,g\,R} \approx 11,2[\text{km/seg}]. \tag{68}$$

Para obtener la segunda igualdad en la ecuación anterior, usamos la relación (4) entre G y g.

El Problema de los Dos Cuerpos en Gravitación y su Reducción al Problema de un Cuerpo

A lo largo de este capítulo siempre hemos supuesto que un planeta, o un satélite se mueve en torno a un centro de fuerzas, e.g., el Sol, o la Tierra, que se encuentra fijo. Esta suposición es muy buena si un pequeño satélite se mueve alrededor de un cuerpo de mucho mayor masa (e.g., cuando un satélite se mueve alrededor de la Tierra). Pero, ¿ qué sucede si dos cuerpos se mueven por su mutua interacción gravitacional y tienen masa comparable? Esto es lo que se conoce como el *Problema de los dos cuerpos*, el cual afortunadamente tiene una solución simple. Lo que haremos a continuación es reducir el problema de los dos cuerpos al problema de un cuerpo que se mueve en torno a un centro de fuerzas fijo.

Consideremos entonces dos cuerpos de masa m_1 y m_2 respectivamente, que interactúan a través de su mutua atracción gravitacional. Si llamamos $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ respectivamente a las posiciones de cada uno de los cuerpos, y utilizamos la Ley de Gravitación universal (1), sus respectivas ecuaciones de movimiento están dadas por

$$m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \tag{69}$$

y

$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = +\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \tag{70}$$

respectivamente. Si sumamos las dos ecuaciones anteriores, debido al principio de acción y reacción tendremos

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) = 0, \tag{71}$$

que representa la conservación de la velocidad del centro de masa del sistema. En efecto, si definimos como de costumbre la posición del centro de masa como

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \tag{72}$$

entonces, (71) se escribe simplemente como

$$M\frac{d^2\vec{R}_{cm}}{dt^2} = 0, \tag{73}$$

en que $M = m_1 + m_2$ es la masa total del sistema. Una vez introducido $\vec{R}_{cm}$ conviene introducir también la posición relativa de un cuerpo con respecto al otro, i.e.,

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \tag{74}$$

De (72) y (74) podemos despejar $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ en términos de $\vec{R}_{cm}$ y $\vec{r}$, obteniendo

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{cm} - \frac{\mu}{m_1}\vec{r}, \tag{75}$$

y

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_{cm} + \frac{\mu}{m_2}\vec{r}, \tag{76}$$

respectivamente, en que

$$\mu \equiv \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}, \tag{77}$$

es la *masa reducida* del problema. Como $\ddot{\vec{R}}_{cm} = 0$, de (76), (69) y (74), finalmente obtenemos la ecuación de movimiento para la coordenada relativa:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{G\, m_1\, m_2}{|\vec{r}|^3}\,\vec{r}. \tag{78}$$

Esta es una ecuación de movimiento que solo involucra a la coordenada relativa $\vec{r}$. El término de fuerza que aparece a la derecha de (78) es central y varía como el inverso del cuadrado de la distancia. Entonces, para resolver la ecuación de movimiento para $\vec{r}$ podemos aplicar todo lo que hemos visto en el resto del capítulo. Solo basta utilizar como expresión para k,

$$k = G(m_1 + m_2), \tag{79}$$

y reemplazar m por μ en todas las ecuaciones pertinentes.

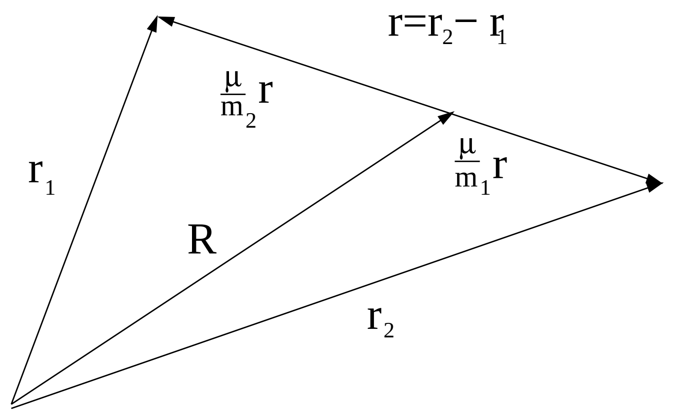

Figura 6: Energía $E < 0$ para orbitas elípticas

Apéndice: Geometría de una elipse

La *elipse* es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano tales que la suma de su distancia a dos puntos fijos es constante. A los puntos fijos a los que se hace mención en esta definición se les conoce como los *focos de la elipse.* Basados en esta definición es fácil obtener la ecuación de la elipse en coordenadas polares. Supongamos los dos puntos fijos (focos) A y B de la figura, se parados por una distancia c. Sea P un punto genérico de la elipse. Usaremos B como orígen de las coordenadas polares y la recta que pasa por los focos como eje polar. Llamaremos también d a la suma de las distancias de P a A y B respectivamente, i.e.,

$$d = |AP| + |BP|. \tag{80}$$

Nótese que por la desigualdad triangular, aplicada al triángulo ABP,

$$\frac{c}{d} \leq 1. \tag{81}$$

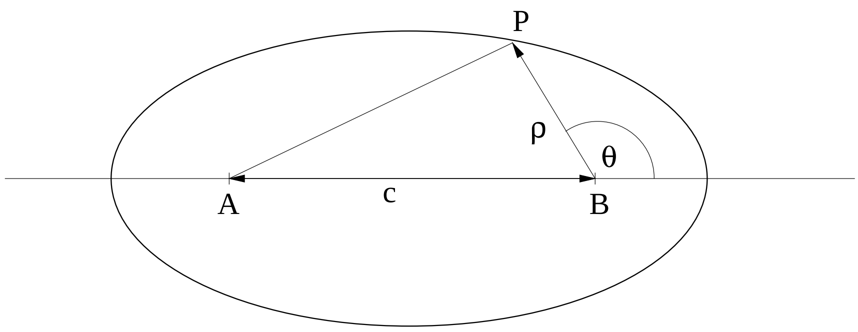

Figura 7: Geometría de una elipse

Llamemos (ρ, θ) a las coordenadas polares de P. En términos de estas coordenadas es simple escribir $|AP|$ y $|BP|$. En efecto,

$$|BP| = \rho, \tag{82}$$

y, usando el Teorema de los cosenos, aplicado al triángulo ABP,

$$|AP| = \sqrt{\rho^2 + c^2 + 2\,d\rho\cos\theta}. \tag{83}$$

Reemplazando estas dos expresiones en la definición de la elipse (80), obtenemos

$$\rho - d = \sqrt{\rho^2 + c^2 + 2\,d\rho\cos\theta}. \tag{84}$$

Tomando el cuadrado de la ecuación anterior y simplificando, obtenemos finalmente la ecuación de la elipse en polares,

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \tag{85}$$

en que

$$p \equiv \frac{d^2 - c^2}{2\,d} \tag{86}$$

y

$$e \equiv \frac{c}{d}. \tag{87}$$

Nótese que de la desigualdad triángular (81), $0 \leq e \leq 1$.

La elipse queda completamente determinada por las dos longitudes originales c y d. Además, como se desprende de (85) también queda totalmente determinada por los nuevos parámetros p y e recién introducidos. De hecho podemos pasar del par de parámetros (a, b) al nuevo par (p, e) facilmente por medio de (86) y (87). Nótese que en términos de p y e, c y d quedan determinados por

$$c = \frac{2\,p\,e}{1 - e^2}, \tag{88}$$

y

$$d = \frac{2\,p}{1 - e^2}. \tag{89}$$

El parámetro p tiene unidades de longitud, y se conoce como *latus rectum* (ó *lado recto*), y corresponde a la distancia BQ de la figura.

El parámetro e, como cuociente de dos distancias, es adimensional. Ya hemos visto que su valor varía entre 0 y 1. A este parámetro se le conoce como la *excentricidad* de la elipse. Si $e = 0$, entonces $c = 0$, i.e., los dos focos coinciden y la elipse se convierte en un círculo. e mide que tan diferente de un círculo es la elipse. Veremos poco más adelante algunas expresiones para la excentricidad que dejan mas claro su significado.

Obviamente la elipse es simétrica (bajo reflección) con respecto a la recta que pasa por los dos focos A y B. También es simétrica (bajo reflección) con respecto a la simetral que divide al segmento AB. Llamemos O al punto medio del segmento AB (ver figura). A la distancia OR de la figura se la llama *semieje mayor* y la denotaremos por a. Por otra parte a la distancia OS de la figura se la llama *semieje menor* y se denota por b. Como R es un punto de la elipse, $|AR| + |BR| = d$, pero $|AR| = |AO| + |OR| = (c/2) + a$. Analogamente $|BR| =$

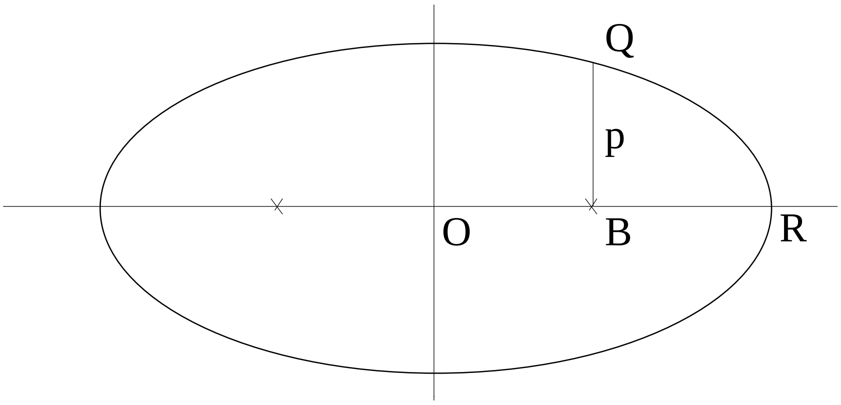

Figura 8: Ilustración del lado recto de la elipse

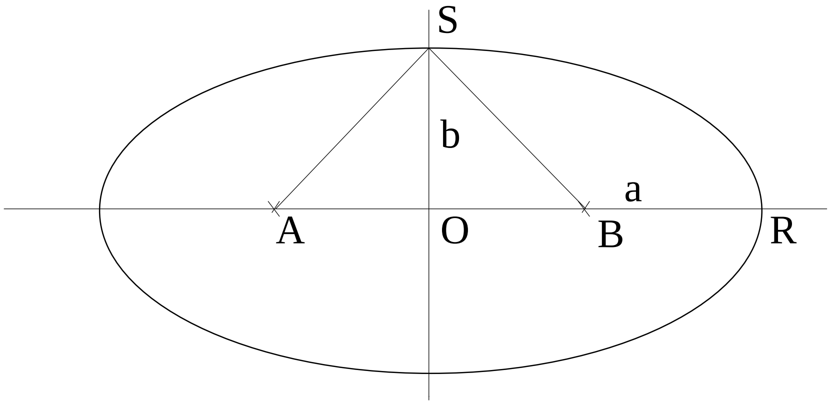

Figura 9: Ilustración de los semiejes de la elipse

$a - (c/2)$, de modo que $d = 2a$. Combinando esta última expresión con (89) obtenemos de inmediato

$$a = \frac{p}{1 - e^2}. \tag{90}$$

Por otra parte S es también un punto de la elipse. Como S se encuentra sobre la simetral del segmento AB, $|AS| = |BS| = d/2$. Por el Teorema de Pitágoras (aplicado al triángulo rectángulo OBS) tenemos

$$b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = |BS|^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2. \tag{91}$$

Reemplazando en (91) las expresiones para c y d dadas por (88) y (89) respectivamente, obtenemos finalmente

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}. \tag{92}$$

Hemos visto hasta ahora que la elipse queda dada unívocamente por el par de parámetros (c, d), ó también por el par de parámetros (p, e). Ahora vemos que la elipse también queda totalmente determinada por los dos semiejes. De hecho, a partir de (91) y (92), obtenemos facilmente

$$p = \frac{b}{a} b, \tag{93}$$

y

$$e = \sqrt{1 - \frac{b}{a}^2}. \tag{94}$$

La posición de los focos sobre la recta que usamos como eje polar se puede determinar en términos de a y e. Como $d = 2a$ y $e = c/d$ (ver (87)), $c = 2\,a\,e$, de modo que la posición del foco B está determinada por

$$OB = \frac{c}{2} = a\,e. \tag{95}$$

Para concluir con la geometría de la elipse conviene introducir dos nuevas longitudes: ρ_{min} y ρ_{max}, i.e., la mínima distancia de (un punto de) la elipse al foco B y la máxima distancia de (un punto de) la elipse a dicho foco. De (84) vemos que ρ_{min} ocurre para $\theta = 0$ (es decir ocurre para el punto R de la figura) y vale

$$\rho_{min} = \frac{p}{1+e}, \tag{96}$$

en tanto que ρ_{max} ocurre para $\theta = \pi$, corresponde al punto R' de la figura, y está dado por

$$\rho_{max} = \frac{p}{1-e}. \tag{97}$$

Es obvio de la geometría de la elipse que el semieje mayor, a es el promedio de estas dos distancias, i.e.,

$$a = \frac{1}{2}(\rho_{min} + \rho_{max}). \tag{98}$$

Reemplazando (96) y (97) en (98) reobtenemos la expresión (90) para el semieje mayor.

Finalmente dividiendo (97) por (96) encontramos

$$e = \frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{\rho_{max} + \rho_{min}}. \tag{99}$$

Para el círculo $\rho_{max} = \rho_{min} = 0$ de modo que $e = 0$ como ya sabíamos. También en términos de ρ_{max} y ρ_{min},

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{\rho_{max}} + \frac{1}{\rho_{min}}. \tag{100}$$

Para concluir con este apéndice necesitamos calcular el área encerrada por una elipse. Como se ha visto a través del capítulo, el área de la elipse juega un rol importante en la derivación de la tercera Ley de Kepler.

El cálculo del área de la elipse es más simple si uno expresa la ecuación de la elipse en coordenadas cartesianas. En cartesianas, la ecuación de la elipse de semiejes mayor a y menor b respectivamente está dada por

$$\frac{x}{a}^2 + \frac{y}{b}^2 = 1. \tag{101}$$

La ecuación (101) es invariante bajo reflecciones con respecto al eje x y al eje y. Si despejamos y como función de x en (101), obtenemos

$$y(x) = \pm b\sqrt{1 - \frac{x}{a}^{2}}. \tag{102}$$

Los dos signos que aparecen en la ecuación anterior, son una manifestación de la simetría de reflexión de la ecuación de la elipse con respecto al eje x. Debido a esta simetría, el área de la elipse se puede calcular simplemente como

$$A = 2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x}{a}^{2}}\, dx. \tag{103}$$

Efectuando el cambio de variables $x = a\,\mathrm{sen}\alpha$ en la integral en (103), obtenemos

$$A = 2\,a\,b\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2\alpha\, d\alpha. \tag{104}$$

Finalmente, usando $\cos^2\alpha = (1+\cos(2\alpha))/2$, obtenemos

$$A = \pi\,a\,b. \tag{105}$$

Comentario: El cálculo del área de una elipse es idéntico al cálculo del área de un círculo, pues la elipse es una deformación *afin* del círculo y el área es un invariante afin. Sin embargo, el cálculo del perímetro de la elipse es mucho más complicado porque el perímetro no es un invariante afin.

El problema inverso: determinación de la ley de fuerza que produce una órbita dada.

En las secciones anteriores dedujimos la ecuación de las órbitas que siguen las partículas (planetas, satélites) sometidas a una fuerza central proporcional al inverso del cuadrado de la distancia. En esta sección veremos el problema inverso, i.e., nos preguntaremos que ley de fuerzas producen órbitas dadas. Este problema fue considerado por el propio Newton (ver notas históricas al final de esta sección). El problema en cuestión es el siguiente: dada la ecuación de una órbita, $\rho = \rho(\theta)$, determinar la fuerza central $\vec{F} = F(\rho)\hat{\rho}$ que la produce.

Si consideramos una fuerza central

$$\vec{F} = F(\rho)\hat{\rho}, \tag{106}$$

a la cual está sometida una partícula de masa m, la componente radial de la ecuación de movimiento de la partícula está dada por

$$F(\rho) = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2). \tag{107}$$

Además, como la fuerza es central, se conserva el momentum angular, de modo que

$$m\rho^2\dot{\theta} = \ell. \tag{108}$$

Problema.

Para cada una de las órbitas siguientes, determine la ley de fuerza central que la produce:

a) $\rho(\theta) = a(1 + \cos\theta)$,

b) $\rho(\theta) = ae^{b\theta}$,

c) $1/\rho = A\cosh(\alpha\theta)$.

Sol.: a) $F(\rho) = -c/\rho^4$, b) $F(\rho) = -c/\rho^3$, c) $F(\rho) = a/\rho^5 - b/\rho^3, a > 0, b > 0$.

Notas históricas: Newton mismo estudió el problema inverso que hemos visto en esta sección. En la Proposición VI, Teorema V, del *Principia* propone el problema de encontrar la ley de fuerzas que produce órbitas dadas. Este problema ya había sido considerado por Newton en su *De Motu Corporum in Gyrum* (el movimiento de cuerpos que giran) que escribió en 1679 (de hecho este problema constituye la tercera proposición del *De Motu Corporum*). Como primera aplicación de esta proposición, Newton plantea al problema de encontrar la fuerza de atracción que produce como órbita una circunferencia tal que el centro de fuerza es un punto de la circunferencia (Proposición (iv) del *De Motu Corporum*, y Proposición VII del primer libro del *Principia*). En el mismo *De Motu*, en la Proposición (v) demuestra que si la órbita es una elipse y el centro de fuerzas coincide con el centro de la elipse entonces la fuerza de atracción es proporcional a la distancia (ver también la Proposición X, del primer libro del Principia). En la Proposición (vi) del *De Motu Corporum* demuestra que si la órbita es una elipse con el centro de fuerzas en uno de sus focos entonces la fuerza de atracción es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia (ver también la Proposición XI, del primer libro del *Principia*). Finalmente, en la Proposición IX del primer libro del *Principia*, Newton encuentra la ley de fuerzas que produce orbitas espirales.

PROBLEMAS

Problema 68:
Callisto es uno de los satelites de Júpiter descubiertos por Galileo Galilei en 1610. Su órbita alrededor de Júpiter es prácticamente circular ($e = 0,01$). El radio de la órbita de Callisto es de $1,88 \times 10^6$ [Km] y su período es de $16,69$ días.

a) ¿ Cuál es la Masa de Júpiter?,
b) El radio de la órbita de Io (otro de los satélites descubiertos por Galileo) es de $4,22 \times 10^5$ Km. ¿ Cuál es el período de su órbita?
Sol.: MJ= $1,89 \times 10^27$ [kg]; Io= $1,77$ días.

Problema 69:
Los satélites de comunicaciones se encuentran en órbitas ecuatoriales circulares sincrónicas con el movimiento de rotación de la Tierra (órbitas geoestacionarias). ¿ Cuál es el radio de estas órbitas, medido desde el centro de la Tierra?

Sol.: 42222 [Km].

Problema 70:
El 1 de Mayo de 1996 el cometa Hyakutake hizo su máximo acercamiento al Sol. La excentricidad de la órbita del cometa Hyakutake es $0,999696$ y su distancia mínima al Sol (perihelio) fué $0,230$ UA. A partir de ésta información encuentre:
a) El "latus rectum" de su órbita,
b) El largo de los semiejes mayor y menor,
c) La distancia máxima del cometa al Sol (afelio),
d) El período de su órbita (en años),
e) la velocidad del cometa en su paso por el perihelio.
La mayor parte de los cometas que nos visitan periódicamente proviene de una region del Sistema Solar que se denomina Nube de Oort y que se encuentra a distancia del órden de 30.000 UA. Determine si el Cometa Hyakutake provenía de la nube de Oort. (Los datos de la órbita de Hyakutake fueron obtenidos de la página Web: http://www.bdl.fr/s2p/hyakut/hyakut1.html)
Nota: 1 UA $= 1,56 \times 10^1 1$ m (semieje mayor de la órbita de la Tierra)

Problema 71:
El cometa Halley es uno de los cometas mas conocidos. Su último acercamiento al Sol se produjo en 1986. (Edmond Halley fue un astrónomo inglés que vivió entre 1656 y 1742. En 1705, Halley se dió cuenta que el cometa que él observó en 1682 era el mismo que había sido observado en 1456, 1531, y 1607. Entonces predijo que el cometa retornaría cada 76 años. Aunque Halley murió en 1742, el cometa reapareció 16 años más tarde como Halley lo había predicho, y hoy lleva su nombre). El semieje mayor de la órbita del Halley es de $36,18$ UA y su excentricidad es 0.97. A partir de estos datos determine el perihelio, el afelio, la velocidad del cometa en su perihelio y calcule el valor preciso de su período (ver http://www.nasa.gov).

Problema 72:
En clases hemos visto que las órbitas de los cuerpos que se mueven alrededor del Sol son cónicas (i.e., círculos, elipses, parábolas o hipérbolas). Demuestre que en cualquiera de los casos anteriores, el vector velocidad describe un círculo. Encuentre la posición del centro del círculo y su radio en términos del momentum angular L, del parámetro p, de la masa m del cuerpo y de la excentricidad e de la órbita. (Este resultado fue encontrado por Hamilton en 1846. La curva descrita por el vector velocidad se conoce como Odógrafo).
Sol.: Ver pág. 114., R. Benguria y M. C. Depassier, "Problemas resueltos de mecánica clásicat't', Ediciones UC, Santiago de Chile, 1996.

Problema 73:
Una partícula de masa m se mueve sobre un cono invertido, de ángulo de abertura α cuyo eje de simetría es vertical. Suponga que la partícula está inicialmente a una altura h (medida a partir del vértice del cono) y que se le da una velocidad horizontal v_0 tangente a la superficie del cono. Calcule las alturas máximas y mínimas que alcanza la partícula en su movimiento sobre el cono. Indicación: utilice el mismo tipo de técnicas que en el tratamiento del movimiento de una partícula bajo la acción del potencial de Kepler (ver, e.g., Prob. 17, pág. 86, R. Benguria y M. C. Depassier, op. cit.).

Problema 74:
La excentricidad del cometa Hale-Bopp (cuyo acercamiento máximo al Sol ocurrió en Marzo de 1997) es $0,9951172$ y su máximo acercamiento al Sol (rmin) fué $0,9141405$ UA. A partir de esta información determine:
a) los semiejes a y b de su órbita,
b) el "latus-rectum", p,
c) la máxima distancia al Sol en su órbita, rmax,
d) su velocidad en el perihelio,
e) el período de su órbita.
(ver http://cfa-www.harvard.edu/cfa/ps/Ephemerides/Comets/1995O1.html)

Problema 75:
Calcule el período de la órbita de un satélite que se mueve justo sobre la superficie de la Tierra (ignore efectos de roce con el aire). Repita el cálculo para el caso de Júpiter y la Luna.
Sol.: $84,4$ min, 173 min, 110 min.

Problema 76:
La mínima distancia que se acerca cierto cometa al Sol es la mitad del radio de la órrbita de la Tierra (supuesta circular), siendo su velocidad en ese punto el doble que la velocidad orbital de la Tierra. Usando las leyes de conservación, encuentre: a) velocidad del cometa cuando cruza la órbita de la Tierra, b) ángulo al cual el cometa cruza la órbita de la Tierra, c) la excentricidad de la órbita, d) el tipo de órbita.
Sol.: a) $42,1$ km/s, b) 45, c) $e = 1$, d) parabólica.

Problema 77:
Demuestre que el cometa del problema 76 cruza la órbita de la Tierra en puntos opuestos de un diámetro de la misma. (Indicación: use la Ley de áreas de Kepler con la ecuación de la órbita en coordenadas cartesianas).

Problema 78:
Se lanza una sonda espacial desde la Tierra a Júpiter, la cual sigue una órbita elíptica que justo toca las órbitas de ambos planetas, es decir su menor y mayor distancia al Sol son R_T (radio de la órbita terrestre) y R_J (radio de órbita joviana) respectivamente. a) Encuentre la velocidad de la sonda relativa a la Tierra justo en el instante de lanzamiento y la relativa a Júpiter justo cuando se encuentra cerca de éste, despreciando en ambos casos la atracción gravitacional del planeta respectivo; b) ¿ en qué punto de su órbita, relativo a la Tierra, debe encontrase Júpiter en el instante de lanzamiento de la sonda?; c) ¿ en qué punto se encuentra la Tierra en el instante que la sonda llega a Júpiter?
Sol.: $8,8$ km/s, b) $5,7$ km/s, c) 97 más adelante de la Tierra, d) 83 más adelante de Júpiter.

Problema 79:
Un planeta de masa $2m$ gira en torno al Sol en una órbita circular de radio R. Un segundo planeta de masa m moviéndose en la misma órbita circular, pero en la dirección contraria, colisiona inelásticamente con el primero (de tal manera que luego de la colisión ambos quedan pegados). a) ¿ Cuál es el semieje mayor

de la órbita resultante?; b) ¿ Cuál es la excentricidad de la órbita del cuerpo resultante?
Sol.: $a = 9R/17$; $e = 8/9$.

Una buena fuente de información sobre el Sistema Solar se encuentra en la página Web:
http://www.seds.org/nineplanets/nineplanets/nineplanets.html

Referencias

[1] S. Chandrasekhar, *Newton's Principia for the Common Reader*, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[2] Daniel Kleppner y Robert J. Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, McGraw Hill, Boston, Massachusetts, 1973. (Chapter 9, pp. 377–408).

[3] Johannes Kepler, *Astronomia Nova*, 1609.

[4] Johannes Kepler, *Harmonice Mundi*, 1619.

[5] José Maza, *Astronomía Contemporánea*, Editorial Universitaria, Santiago de Chile, 1988.