Ayudantía 1 FIS1513

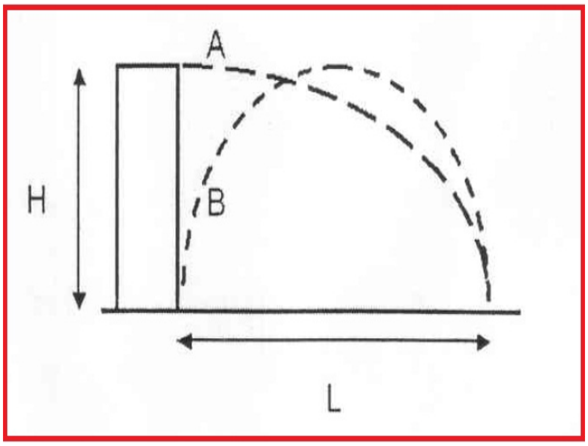
Felipe Soto Arévalo (frsoto@uc.cl)
Viernes módulo 4 - Sala B13

Problema 1. Se disparan dos proyectiles simultáneamente desde un edificio. El proyectil A se lanza horizontalmente desde la punta del edificio de altura H, y el proyectil B se lanza desde la puerta con altura 0. La altura máxima que alcanza este último es igual a la altura H del edificio. Si ambos proyectiles dan en el blanco que se encuentra a una distancia horizontal L del lanzamiento, calcular:

a) ¿Cuánto tiempo se demora A en llegar al blanco comparado con B? (Es decir, cuál es el valor de $\frac{t_A}{t_B}$)

b) ¿Cuál es el cociente entre las componentes horizontales de las velocidades de ambos? (Es decir, cuál es el valor de $\frac{V_{Ax}}{V_{Bx}}$)

c) ¿Cuál es el módulo de la velocidad de A al llegar al suelo (V_{Af})?



Solución.

a) Notemos que el tiempo que tarda en subir B es igual al que tarda en bajar. Pero además sabemos que dos partículas tardan lo mismo en bajar si es que lo hacen desde una misma altura con igual velocidad en el eje y, como en efecto ocurre con A respecto a la bajada de B. Entonces:

$$t = tiempo\ subida\ B \ = \ tiempo\ bajada\ B \ = \ tiempo\ bajada\ A \tag{1.1}$$

De (1.1) se sigue que:

$$\frac{t_A}{t_B} = \frac{t}{2t} = \frac{t}{2} \tag{1.2}$$

b) Notemos que ambos recorren la misma distancia total con velocidad constante en el eje X, pero A tarda la mitad que t por (1.2), entonces como a rapidez constante se satisface $v = \frac{d}{t}$, se concluye que:

$$\frac{V_{Ax}}{V_{Bx}} = \frac{2}{1} \tag{1.3}$$

c) Descomponemos V_{Af} en los dos ejes coordenados, obteniendo V_{Afx} y V_{Afy}, que son despejadas luego de establecer las ecuaciones de movimiento por separado en cada eje, obteniendo:

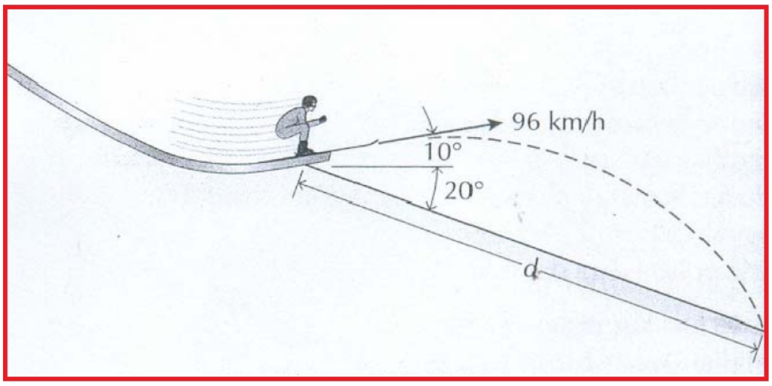
$$V_{Af} = \sqrt{V_{Afx}^2 + V_{Afy}^2} = \sqrt{\frac{L^2 g}{2h} + 2gh} \tag{1.4}$$

Problema 2. Un esquiador sale de un trampolín con una velocidad de 96[km/h] con una inclinación de 10° por sobre la horizontal (ver figura). En base a esto, determinar:

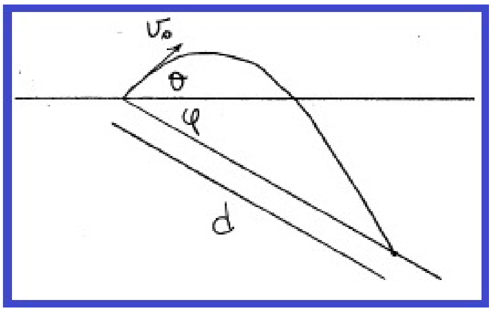
a) Altura máxima que alcanzará por sobre el extremo del trampolín.

b) Tiempo de vuelo de su salto.

c) Distancia del salto d (ver figura).



Solución. Para resolver este problema, omitiré en primera instancia los datos numéricos, pues estos incrementan las posibilidades de error en partes intrascendentes del problema en temas de dificultad, entonces nos guiaremos por la siguiente figura:



Debemos plantear las ecuaciones de movimiento, para lo cual utilizaremos el sistema cartesiano usual (en la ayudantía se explicaron las ventajas y desventajas frente a uno rotado):

$$x = v_o \cos\theta t \tag{2.1}$$

$$y = v_o \sin\theta t - \frac{gt^2}{2} \tag{2.2}$$

a) Físicamente podemos interpretarlo como la posición en la cual la velocidad es cero, pues pasa de tener velocidad positiva mientras sube a una velocidad negativa cuando comienza a bajar. Matemáticamente además tenemos la interpretación de maximizar la posición en y con las herramientas que tenemos. Entonces derivando la ecuación (2.2) se sigue que:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow t_{h_{max}} = \frac{v_o \sin\theta}{g} \tag{2.3}$$

Ahora reemplazamos el tiempo obtenido en (2.3) en la ecuación (2.2), con lo cual:

$$h_{max} = \frac{v_o^2 \sin^2\theta}{2g} \approx 6{,}3m \tag{2.4}$$

b y c) Debemos en este caso intersecar la ecuación de movimiento del esquiador con las de la pista, obteniendo las siguientes ecuaciones, para lo cual llamaremos t_v al tiempo de vuelo:

$$d\cos\phi = v_o \cos\theta t_v \tag{2.5}$$

$$-d\sin\phi = v_o \sin\theta t_v - \frac{gt_v^2}{2} \tag{2.6}$$

De (2.5) se sigue que:

$$t_v = \frac{d\cos\phi}{v_o\cos\theta} \tag{2.7}$$

En (2.6) reemplazamos lo obtenido en (2.7) y resulta:

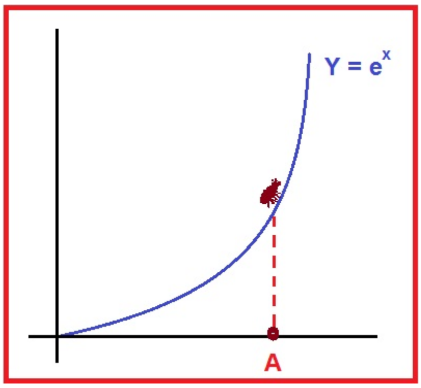
$$d = \frac{dv_o^2}{g}\left(\frac{\sin 2\theta}{2\cos\phi} + \frac{\sin\phi\cos^2\theta}{\cos^2\phi}\right) \approx 80{,}84m \tag{2.8}$$

De donde reemplazamos los datos numéricos ahora en (2.7) y obtenemos:

$$t_v \approx 2{,}89s \tag{2.9}$$

Problema 3.

Una hormiga se desplaza con rapidez constante v_0 a lo largo de un alambre que forma una curva que satisface la ecuación $y = e^x$ en el plano cartesiano (ver figura). Calcular en función de x y del parámetro entregado, la velocidad del punto A (que es la proyección de la hormiga sobre el eje X).



Solución.

Algunos escribieron las ecuaciones que describen el movimiento de los proyectiles. Recuerden que eso es un caso particular en donde se lanza un objeto en el campo gravitacional terrestre. Aquí no nos dicen que suceda eso (si fuera así, pobre hormiga). Sólo nos dan la ecuación de trayectoria.
Si escribimos la posición de la hormiga como:

$$\vec{r}(t) = [x(t), y(t)] \tag{1}$$

entonces la proyección de la hormiga sobre el eje X es simplemente $x(t)$, y la velocidad del punto A no es más que $\dot{x}(t)$.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = [\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}] \tag{2}$$

Sabemos además que la rapidez es constante e igual a v_0, de manera que:

$$v_0 = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2} \tag{3}$$

Como conocemos la ecuación de trayectoria, podemos relacionar $\dot{y}$ con $\dot{x}$ según:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = e^x \frac{dx}{dt} \tag{4}$$

Así:

$$v_0 = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dx}{dt})e^{2x}} \tag{5}$$

$$v_0 = \frac{dx}{dt}\sqrt{1 + e^{2x}} \tag{6}$$

Finalmente

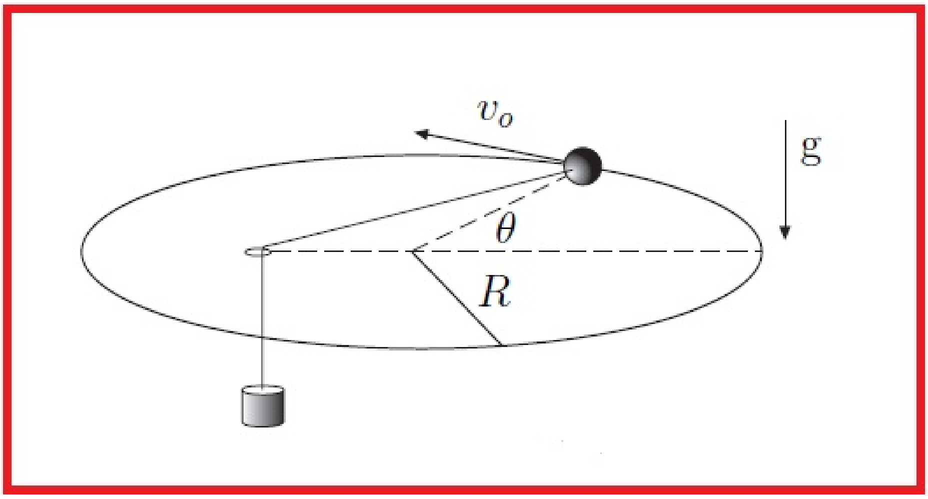
$$\frac{v_0}{\sqrt{1 + e^{2x}}} = \frac{dx}{dt} \tag{7}$$

Problema 4. Una partícula se mueve con rapidez v_0 constante, sobre un riel circular de radio R colocado en posición horizontal sobre una superficie también horizontal. La partícula se encuentra atada mediante una cuerda inextensible a un bloque que cuelga debajo de un agujero localizada a una distancia de $\frac{R}{2}$ del centro del riel. Suponga que v_0 es suficientemente grande como para que la cuerda no se destense.

a) Determine la rapidez del bloque en función del ángulo θ.

b) Obtenga la máxima rapidez del bloque.

c) Determine la aceleración $\vec{a}$ del bloque cuando la partícula que se mueve sobre el riel pasa por $\theta = 0$.



Solución. Propuesta *(resuelto en ayudantía).*

Problema 5. Sobre una mesa lisa horizontal se encuentran dos bloques juntos de masas M y m. Sobre el bloque de masa M (ubicado a la izquierda del otro) se aplica una fuerza horizontal F, de manera que ambos bloques se mueven. Calcule la fuerza normal de interacción entre ambos bloques (N_c). Repita el cálculo anterior, considerando ahora que la fuerza F actúa sobre el bloque de masa m en sentido contrario.

Solución. El desarrollo queda propuesto *(resuelto en ayudantía).* La solución es:

$$N_c = \frac{F}{1 + \frac{M}{m}}$$