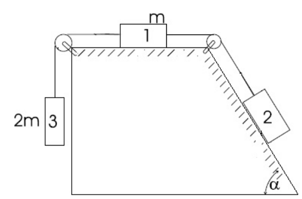
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1513 Estática y Dinámica
Ayudante: Francisco Moya (ftmoya@uc.cl)

Ayudantía 2

Solución

Solución 1 En el sistema de la figura, el coeficiente de roce cinético (o dinámico) entre los bloques 1 y 2 y la mesa es igual para ambos. Nos dicen que el bloque 3 cae con aceleración a. Encuentre las tensiones en las cuerdas y el coeficiente de roce entre los bloques y la superficie. Exprese sus resultados en términos de m, a, α, y g. (El bloque 2 posee masa m)

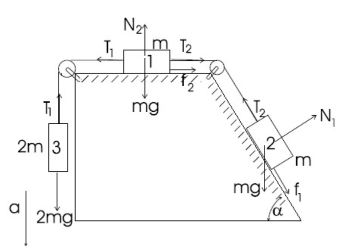


Hacemos el DCL y luego planteamos las ecuaciones de acuerdo al DCL que dibujamos. Recordar ser coherente con el sentido durante todo el ejercicio.

$$T_2 - f_1 - mg \operatorname{sen} \alpha = ma \tag{1}$$

$$T_1 - T_2 - f_2 = ma \tag{2}$$

$$2mg - T_1 = 2ma. \tag{3}$$



De la tercera ecuación tenemos la tensión

$$\boxed{T_1 = 2m(g - a).}$$

Sumando las ecuaciones (1) a (3) se cancelan las tensiones. Usando que las fuerzas de roce $f_1 = \mu N_1 = \mu mg\cos\alpha$, y $f_2 = \mu N_2 = \mu mg$, se obtiene el valor del coeficiente de roce

$$\boxed{\mu = \frac{2g - 4a - g\,\mathrm{sen}\,\alpha}{g(1+\cos\alpha)}.} \tag{5}$$

La tensión T_2 se lee de la primera o segunda ecuación y es

$$\boxed{T_2 = 2mg - 3ma - \mu mg,} \tag{6}$$

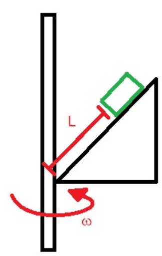
donde μ es el valor ya calculado.

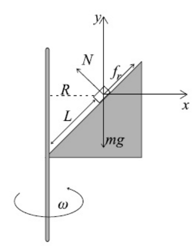
Si la lee de la otra ecuación encuentra el resultado

$$\boxed{T_2 = ma + mg\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mu mg\cos\alpha.} \tag{7}$$

Al reemplazar el valor de μ se comprueba que las dos expresiones son iguales. Por lo tanto el resultado se puede expresar como la ecuación (6) o (7).

Solución 2 Un juguete consiste en una cuña de ángulo 45º que gira con una velocidad angular w en torno a un eje vertical. Sobre la cuña se deposita un pequeño bloque de masa m cuyo coeficiente de roce estático con la cuña es μ_e menor a 1. Si el bloque se encuentra en reposo respecto a la cuña a una distancia L, calcule las fuerzas de roce y normal que actúan sobre él. ¿Cuál es el rango de valores que puede tener L de modo que el bloque no deslice sobre la cuña?





Poniendo los ejes como en la figura, y dibujando la fuerza de roce hacia arriba (dirección que tendría si la cuña gira lento y el bloque tiende a caer), las fuerzas son:

$$\vec{f_r} = f_r\cos(\theta)\hat{x} + f_r\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{y}, \tag{1}$$

$$m\vec{g} = -mg\hat{y}, \tag{2}$$

$$\vec{N} = -N\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{x} + N\cos\theta\hat{y}. \tag{3}$$

El bloque gira describiendo un círculo de radio $R = L\cos\theta$, por lo que las fuerzas producen una aceleración centrípeta (hacia el centro) $-m\omega^2 R$. La ecuación de movimento es entonces

$$-m\omega^2 R\hat{x} = \vec{f_r} + m\vec{g} + \vec{N}, \tag{4}$$

La componente $\hat{x}$ es

$$f_r\cos\theta - N\,\mathrm{sen}\,\theta = -m\omega^2 R, \tag{5}$$

y la componente y es

$$f_r\,\mathrm{sen}\,\theta + N\cos\theta = mg. \tag{6}$$

Multiplicando la ecuación (5) por $\cos\theta$ y la ecuación (6) por $\operatorname{sen}\theta$ y sumando, obtenemos la fuerza de roce

$$\boxed{f_r = mg\operatorname{sen}\theta - m\omega^2 R\cos\theta.}$$

Nota: Si dibujó hacia abajo la fuerza de roce, el resultado es con signo opuesto.

Multiplicando la ecuación (6) por $\cos\theta$ y la ecuación (5) por $\operatorname{sen}\theta$ y restando, obtenemos la normal

$$\boxed{N = mg\cos\theta + m\omega^2 R\operatorname{sen}\theta.}$$

b) El bloque no se desliza si $|f_r| \leq \mu_e N$. La fuerza de roce que hemos dibujado es positiva si $\omega^2 < g\tan\theta$ decir cuando gira suficientemente lento. En este caso la condición de no deslizamiento es

$$mg\operatorname{sen}\theta - m\omega^2 R\cos\theta \leq \mu_e(mg\cos\theta + m\omega^2 R\operatorname{sen}\theta),$$

que se puede escribir como

$$\frac{R\omega^2}{g} \geq \frac{\operatorname{sen}\theta - \mu_e\cos\theta}{\cos\theta + \mu_e\operatorname{sen}\theta}. \tag{10}$$

Por el contrario, si gira muy rápido el bloque tiende a subir. En ese caso la fuerza de roce sería hacia abajo, La condición que no resbale es en este caso

$$-[mg\operatorname{sen}\theta - m\omega^2 R\cos\theta] \leq \mu_e(mg\cos\theta + m\omega^2 R\operatorname{sen}\theta), \tag{11}$$

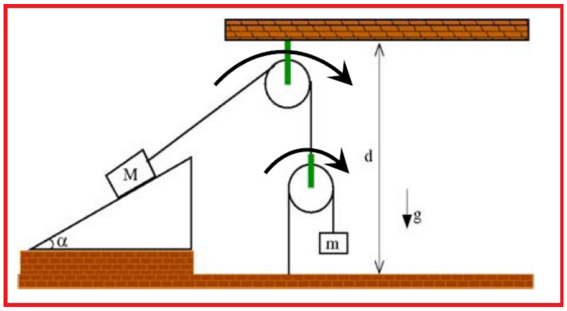
que es

$$\frac{R\omega^2}{g} \leq \frac{\operatorname{sen}\theta + \mu_e\cos\theta}{\cos\theta - \mu_e\operatorname{sen}\theta}. \tag{12}$$

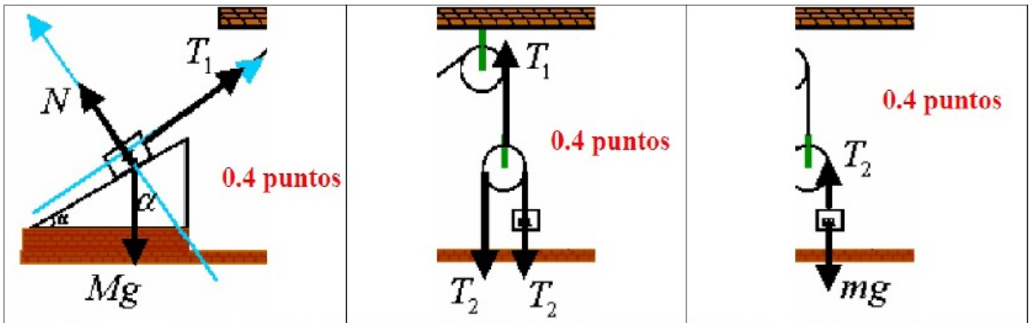
Reemplazando el valor $\theta = 45^o$ y $R = L\cos(45) = L/\sqrt{2}$, tenemos el resultado final

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}g}{\omega^2}\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right) \leq L \leq \frac{\sqrt{2}g}{\omega^2}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right).} \tag{13}$$

Solución 3 En el sistema de la figura, el bloque de masa M se puede deslizar por la superficie lisa de angulo α y esta unido, mediante una cuerda ideal y un sistema de poleas (sin masa), a un bloque de masa m que se mueve a lo largo de la vertical. Encuentre la aceleración de los dos bloques y la tension de la cuerda.



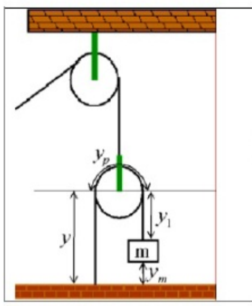
Supongamos que el sistema se mueve hacia la derecha, como se muestra en la figura. Dibujamos el diagrama de cada cuerpo y sus correspondientes ecuaciones de movimiento:



$T_1 - Mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = Ma_M$ (1)	$T_1 - 2T_2 = 0$ (2)	$T_2 - mg = -ma_m$ (3)
0.6 puntos	0.6 puntos	0.6 puntos

Aquí hacemos la ligadura, en el dibujo de la ayudantía de hoy tuve un error en dibujar y_p, ahora lo dibujo correctamente, creo que ahí si entenderán bien lo de la ligadura y en como se utiliza en los ejercicios.

Las aceleraciones a_M y a_m se pueden relacionar de la siguiente manera:



$$\begin{cases} L = y + y_p + y_1 \\ y = y_1 + y_m \end{cases}$$

0.5 puntos por esta explicación o algo equivalente

L es la longitud de la cuerda que es constante, y y_p la longitud de la cuerda sobre la polea que también es constante. Derivando con respecto al tiempo:

$$\begin{cases} 0 = \dot{y} + \dot{y}_1 \\ \dot{y} = \dot{y}_1 + \dot{y}_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \ddot{y} + \ddot{y}_1 \\ \ddot{y} = \ddot{y}_1 + \ddot{y}_m \end{cases} \Rightarrow \ddot{y}_m = 2\ddot{y} \Rightarrow \boxed{a_m = 2a_M}$$

0.5 puntos (4)

Resolvemos el sistema de ecuaciones, por ejemplo realizando la operación $2\times(3)+(2)-(1)$:

$$-2mg + Mg\,\text{sen}\,\alpha = -2ma_m - Ma_M \qquad (5)$$

Reemplazando (4) en (5)

$$-2mg + Mg\,\text{sen}\,\alpha = -4ma_M - Ma_M = -(4m+M)a_M$$

$$\Rightarrow \boxed{a_M = \frac{2m - M\,\text{sen}\,\alpha}{M+4m}g} \qquad (6) \quad \textbf{0.5 puntos}$$

Reemplazando (6) en (4)

$$\boxed{a_m = \frac{4m - 2M\,\text{sen}\,\alpha}{M+4m}g} \qquad (7) \quad \textbf{0.5 puntos}$$

Reemplazando (6) en (1)

$$\boxed{T_1 = \frac{2mMg(1+2\,\text{sen}\,\alpha)}{M+4m}} \qquad (8) \quad \textbf{0.5 puntos}$$

Reemplazando (8) en (2)

$$\boxed{T_2 = \frac{mMg(1+2\,\text{sen}\,\alpha)}{M+4m}} \quad \textbf{0.5 puntos}$$

Solución 4 Se sabe que un punto específico posee un movimiento que puede ser descrito por: $\vec{r} = \rho(t)\cdot\hat{\rho} + \theta(t)\cdot\hat{\theta} + k(t)\cdot\hat{k}$ en coordenadas cilíndricas. Encuentre las expresiones de velocidad y aceleración respectivas.

Aquí simplemente derivar bien y recordar que $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$ son dependientes del tiempo y tienen derivada respecto a este.