

Ayudantía 4

Ignacio Reyes (iareyes@uc.cl)

Dinámica, Trabajo y Energía

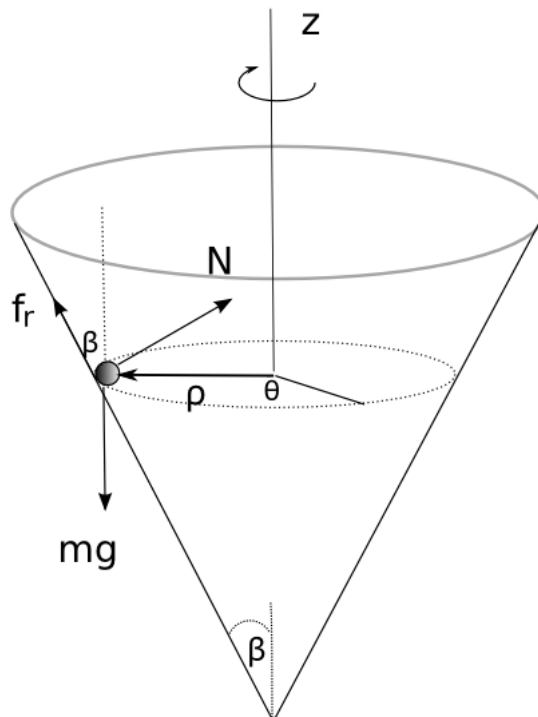
1. Prob. 2/I1-1-2010

Una partícula de masa m (figura 1) está posada sobre el manto interior de un cono que gira con rapidez angular ω respecto de su eje, tal que la masa no desliza en ningún sentido. La masa está a una distancia d de la cúspide del cono de ángulo de apertura β , y el coeficiente de roce estático del cono es μ_e .

- ¿Qué coordenadas conviene utilizar? Escribir la aceleración en esas coordenadas.
- Hacer el diagrama de cuerpo libre y escribir la ecuación de Newton.
- Determine las condiciones sobre ω para que el reposo relativo de la partícula posible: encontrar ω_- mínimo y ω_+ máximo.

1.1. Solución

a) Claramente por la simetría del problema nos conviene utilizar coordenadas cilíndricas-polares, como en la figura siguiente (donde también hemos dibujado las fuerzas):



En general, la aceleración en coordenadas cilíndricas es la aceleración “polar” en el plano horizontal más la

aceleración lineal en el eje vertical \hat{z} :

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{z} \quad (1)$$

Como siempre, el siguiente paso es aplicar las **condiciones de ligadura** geométrica: en este caso, que la partícula se encuentra girando en una circunferencia de radio constante $\rho = d \sin \beta$ a una altura constante $z = 0$; además, gira sin deslizar con el cono, es decir con rapidez angular constante $\dot{\theta} = \omega \rightarrow \ddot{\theta} = 0$. Esto simplifica la aceleración hasta:

$$\vec{a} = -d \sin \beta \omega^2 \hat{\rho} \quad (2)$$

es decir, todas las fuerzas deben siempre estar en el plano $\rho - z$ para que pueda darse este movimiento.

b) En la figura, dibujamos el roce estático f_r “hacia arriba” por simple elección (es el caso en que el roce *sostiene* a la partícula para que no caiga hacia abajo) pero podría haberse dibujado hacia abajo (sería el caso en que el roce previene que la masa salga “volando” hacia afuera por efecto del giro). En realidad da igual cómo se dibuja; la solución final dirá en qué sentido apunta. Además, noten que escribimos f_r a solas y **no** $f_r = \mu_e N$, porque en general **son distintos**. La ecuación de Newton será:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (3)$$

$$(f_r \sin \beta - N \cos \beta)\hat{\rho} + (N \sin \beta + f_r \cos \beta - mg)\hat{z} = -md\omega^2 \sin \beta \hat{\rho} \quad (4)$$

que leída por componentes significa:

$$f_r \sin \beta - N \cos \beta = -md\omega^2 \sin \beta \quad (5)$$

$$N \sin \beta + f_r \cos \beta - mg = 0 \quad (6)$$

que son dos ecuaciones acopladas para las dos incógnitas f_r y N .

c) Es intuitivo que si el cono gira demasiado lento (ω muy pequeño) la pelota caerá, y si gira demasiado rápido deslizará (ω muy grande). Claramente esto tiene que ver con la fuerza de roce. Entonces resolvemos las ecuaciones anteriores para hallar f_r y ver qué pasa. Para eliminar N podemos multiplicar (5) $\times \sin \beta$ y (6) $\times \cos \beta$ y luego sumarlas:

$$f_r \sin^2 \beta - N \cos \beta \sin \beta + N \sin \beta \cos \beta + f_r \cos^2 \beta - mg \cos \beta = -md\omega^2 \sin^2 \beta \quad (7)$$

$$\implies f_r = mg \cos \beta - md\omega^2 \sin^2 \beta \quad (8)$$

También podemos despejar la normal reemplazando (8) en (6):

$$N \sin \beta = \underbrace{mg - mg \cos^2 \beta}_{mg \sin^2 \beta} - md\omega^2 \sin^2 \beta \cos \beta \quad (9)$$

$$\implies N = m \sin \beta (g + d\omega^2 \cos \beta) \quad (10)$$

Ahora, sabemos que el módulo de la fuerza de roce estática cumple $|f_r| < \mu_e N$. Entonces tenemos dos casos límite: cuando $|f_r|$ es máximo y apunta hacia abajo, y cuando $|f_r|$ es máximo pero apunta hacia arriba (como en la figura).

- **Roce hacia arriba:** en este caso tendremos como caso limitante $f_r = +\mu_e N$ y reemplazando (8) y (10) y despejando ω^2 :

$$m(g \cos \beta - d\omega^2 \sin^2 \beta) = \mu_e m \sin \beta (g + d\omega^2 \cos \beta) \quad (11)$$

$$\rightarrow g(\cos \beta - \mu_e \sin \beta) = d\omega^2 (\mu_e \sin \beta \cos \beta + \sin^2 \beta) \quad (12)$$

$$\rightarrow \omega_-^2 = \frac{g(\cos \beta - \mu_e \sin \beta)}{\mu_e \sin \beta \cos \beta + \sin^2 \beta} \quad (13)$$

que es la rapidez angular **mínima** ω_- ; si el cono gira más lento que ω_- , la masa comenzará a caerse hacia abajo.

- Roce hacia abajo: aquí tendremos como caso limitante $f_r = -\mu_e N$ y reemplazando (8) y (10):

$$m(g \cos \beta - d\omega^2 \sin^2 \beta) = -\mu_e m \sin \beta (g + d\omega^2 \cos \beta) \quad (14)$$

$$\rightarrow g(\cos \beta + \mu_e \sin \beta) = d\omega^2(-\mu_e \sin \beta \cos \beta + \sin^2 \beta) \quad (15)$$

$$\rightarrow \omega_+^2 = \frac{g(\cos \beta + \mu_e \sin \beta)}{-\mu_e \sin \beta \cos \beta + \sin^2 \beta} \quad (16)$$

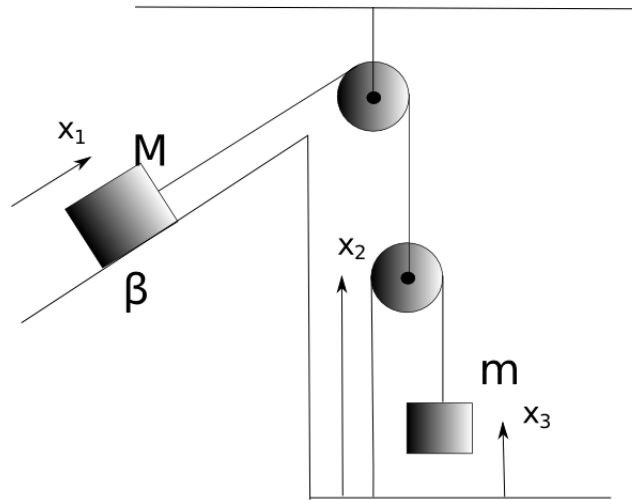
que es la rapidez angular **máxima** ω_+ ; si el cono gira más rápido que ω_+ , la masa empezará a deslizar por el cono.

2. Problema 2

Considere el sistema de poleas de la figura 2. Claramente puede resolverse el movimiento usando las ecuaciones de Newton. Sin embargo, también se puede extraer mucha información usando balance de energía. Si ambos cuerpos parten del reposo, encontrar sus respectivas velocidades cuando M ha recorrido una distancia Δx_1 a lo largo del plano.

2.1. Solución

Elegimos las coordenadas x_1, x_2, x_3 como en la siguiente figura. Es claro que como las cuerdas tienen largo



finito, se tienen las condiciones de ligadura:

$$\dot{x}_1 = -\dot{x}_2 = -\frac{1}{2}\dot{x}_3 \quad (17)$$

Este sistema **conserva** la energía mecánica total $E = K + V$ (no hay roce), por lo tanto $\Delta E = 0$ entre dos instantes diferentes. Entonces consideremos el tiempo inicial $t = 0$ como el sistema en reposo, $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0$. Ahora veamos qué sucede si el bloque M se ha desplazado una distancia Δx_1 a lo largo del plano. El cambio en la energía potencial viene dado por lo que sube M y baja m :

$$\Delta V = Mg\Delta x_1 \sin \alpha + mg\Delta x_3 \quad (18)$$

$$= Mg\Delta x_1 \sin \alpha - 2mg\Delta x_1 = g\Delta x_1(M \sin \alpha - 2m) \quad (19)$$

porque $\Delta x_3 = -2\Delta x_1$ (de la ligadura (17)). El cambio de la energía cinética es:

$$\Delta K = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 \quad (20)$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}4m\dot{x}_1^2 = \frac{1}{2}(M + 4m)\dot{x}_1^2 \quad (21)$$

Entonces el balance de energía nos otorga:

$$\Delta V + \Delta K = g\Delta x_1(M \sin \alpha - 2m) + \frac{1}{2}(M + 4m)\dot{x}_1^2 = 0 \quad (22)$$

de donde despejando la velocidad tenemos:

$$\dot{x}_1^2 = 2g\Delta x_1 \frac{(2m - M \sin \alpha)}{M + 4m} \quad (23)$$

que es la solución que buscábamos. Podemos ver que la velocidad se anula cuando $2m = M \sin \alpha$; esa es precisamente la condición para que el sistema se encuentre en equilibrio. Notemos que este problema obviamente puede resolverse dibujando las fuerzas y solucionando $\sum \vec{F} = m\vec{a}$. Ahora, el método de energía hace un poco más difícil calcular la aceleración y la solución $x_1(t)$, pues sólo nos otorga $\dot{x}(x)$.

3. Problema 3

Una partícula de masa m (fig. 3) es soltada desde el reposo desde una altura H respecto del suelo (punto A). El plano inclinado consta de dos tramos: desde A hasta D no tiene roce, y desde D hasta B posee un coeficiente de roce cinético μ_c . Más adelante hay un *loop* de radio R que **no** genera fricción.

a) Calcule la velocidad v_B con que llega la partícula al punto B usando trabajo y energía. Lo mismo puede calcularse resolviendo Newton (¿qué resulta más fácil?).

b) ¿Cuál es el valor mínimo de v_B (o bien de H) tal que la masa logre pasar el loop sin despegarse de la superficie?

3.1. Solución

a) Como se ha visto en clases, la expresión más general para la energía mecánica es:

$$\Delta K + \Delta V = \int_1^2 \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{x} \quad (24)$$

donde \vec{F}_{nc} es la fuerza **no-conservativa** neta. Analicemos lo que sucede entre los puntos A y B : la fuerza no conservativa que actúa entre los puntos D y B es el roce $f_r = -\mu N$ que apunta en sentido contrario al desplazamiento $d\vec{x}$, y donde $N = mg \cos \beta$ como en cualquier plano inclinado. Luego, el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es:

$$\int_A^B \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{x} = \int_D^B -\mu N dx = -\mu mg \cos \beta \int_D^B dx = -\mu mg \cos \beta \frac{H}{2 \sin \beta} = -\frac{\mu mg H}{2 \tan \beta} \quad (25)$$

Además, como comienza del reposo, el cambio en la energía cinética es $\Delta K = \frac{1}{2}mv_B^2$, y el cambio en la potencial es $\Delta V = -mgH$. Entonces según (24) tenemos:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - mgH = -\frac{\mu mg H}{2 \tan \beta} \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = gH \left(2 - \frac{\mu}{\tan \beta} \right) \quad (26)$$

Como podrán notar, para responder la misma pregunta con las ecuaciones de Newton, habríamos tenido, en el eje del plano inclinado (considerando x avanzando hacia “abajo”)

$$-\mu N + mg \sin \beta = m\ddot{x} \quad (27)$$

Esta ecuación se integra una vez para obtener la velocidad $\dot{x}(t)$; el problema es que no conocemos el tiempo t en el cual la partícula llega abajo. Para eso tendríamos que integrarla nuevamente para tener $x(t)$ y ahí imponer $x(t) = H/\sin \beta$ para obtener t y eso reemplazarlo en $\dot{x}(t)$. Como ven, si no nos piden el tiempo de llegada, lo más eficiente es utilizar energía-trabajo.

b) Como hemos visto en otros casos, la condición de que dos cuerpos se separen es que la normal entre ellos se anule. Entonces lo que buscamos es que a lo largo del loop la normal **no** se anule; el caso limitante será cuando $N = 0$ en el punto más alto del loop. En coordenadas polares tenemos:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} \quad (28)$$

y para el loop tenemos $r = R, \dot{r} = \ddot{r} = 0$. Ahora, las únicas fuerzas son la normal y el peso, y en $\theta = \pi/2$ tenemos:

$$\vec{F} = -N\hat{r} - mg\hat{z} \quad , \quad \hat{r} = \hat{z} \quad \text{en } \theta = \pi/2 \quad (29)$$

por lo tanto la ecuación de Newton es:

$$-(N + mg)\hat{r} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta} \quad (30)$$

que indica claramente que en $\theta = \pi/2$ la aceleración angular es nula $\ddot{\theta} = 0$ (no hay fuerzas tangenciales). El caso límite será $N = 0$; multiplicando (29) por R y recordando que $v_C = R\dot{\theta}$:

$$mgR = R^2\dot{\theta}^2 = v_C^2 \quad \Rightarrow \quad v_C = \sqrt{mgR} \quad (31)$$

v_C es la velocidad mínima para que la masa no se despegue. Por último, entre los puntos B y C la energía mecánica se conserva:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mg \cdot 2R + \frac{1}{2}mv_C^2 \quad (32)$$

donde simplificando y reemplazando v_C , obtenemos la mínima velocidad v_B para nos despegarse:

$$\text{mín}(v_B)^2 = 4gR + mgR = 5gR \quad (33)$$

que reemplazado en (26) otorga la altura H mínima para completar el loop.

4. Problema 4

El sistema de la figura 4 comienza desde el reposo, con el resorte en su largo natural. Suponga que el resorte tiene constante de estiramiento $k = 5mg/l_0$. No hay roce.

- ¿Cuánto se habrá desplazado el sistema cuando el bloque de arriba se despegue del piso?
- Encuentre la velocidad del bloque en ese momento.

4.1. Solución

a) Imaginemos que el bloque se ha desplazado una distancia x hacia la derecha. El largo del resorte será l , donde $l^2(x) = l_0^2 + x^2$. El módulo de la fuerza elástica es $f_k = k(l - l_0)$. En el eje vertical, y antes del despegue, tenemos la ecuación de Newton

$$f_k \sin \theta + N - mg = 0 \quad (34)$$

donde la normal N es variable y el ángulo viene dado por $\sin \theta = l_0/l(x)$. El estiramiento \bar{l} del despegue se da cuando $N = 0$, es decir:

$$k(\bar{l} - l_0)\frac{l_0}{\bar{l}} = mg \quad \Rightarrow \quad k\bar{l}l_0 - kl_0^2 = mg\bar{l} \quad \Rightarrow \quad \bar{l} = \frac{kl_0^2}{l_0k - mg} \quad (35)$$

y ahora reemplazamos $k = 5mg/l_0$ en lo anterior, obteniendo:

$$\bar{l} = \frac{\frac{5mg}{l_0}l_0^2}{\frac{5mg}{l_0}l_0 - mg} = \frac{5}{4}l_0 \quad (36)$$

y entonces la distancia \bar{x} de despegue viene dada por:

$$\bar{x}^2 = \bar{l}^2 - l_0^2 = \left(\frac{25}{16} - 1\right)l_0^2 \Rightarrow \bar{x} = \frac{3}{4}l_0 \quad \blacksquare \quad (37)$$

b) ¿Cómo hallamos la velocidad $|\bar{v}|$ en ese momento? Como el sistema es conservativo, la variación de la energía total es nula (parten del reposo):

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}k(\bar{l} - l_0)^2 + \frac{1}{2}m\bar{v}^2 - mg\bar{x} = 0 \quad (38)$$

$$m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\frac{5mg}{l_0} \cdot \left(\frac{1}{4}l_0\right)^2 - mg\frac{3}{4}l_0 = 0 \quad (39)$$

$$\Rightarrow \bar{v}^2 = \frac{19}{32}gl_0 \quad \blacksquare \quad (40)$$

Nuevamente, este resultado podría haberse obtenido usando el teorema del trabajo y la energía, pero para ello tendríamos que haber resuelto la tensión T y luego integrado.