Estática y Dinámica - FIS-1513

Interrogación I - Solucion

Viernes 3 de Septiembre del 2010.

PROFESORES: Sebastian Reyes, Maria Cristina Depassier y Jeronimo Maze

---

Instrucciones
-Tiene 2 horas para resolver los siguientes problemas.
-Resuelva cada uno de ellos en cuadernillos separados. Escriba su nombre y el número de pregunta en cada uno de los cuadernillos. Sea claro y ordenado.
-Escriba los resultados finales de cada problema con lápiz pasta, de lo contrario perderá el derecho a recorrección.
-Todos los problemas tienen el mismo peso en la nota final.

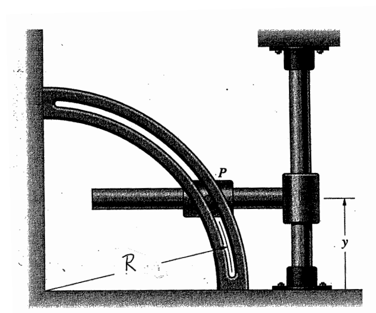
Problema 1

En la figura el punto P se mueve en la rendija circular de radio R. Calcule la velocidad y aceleración del punto P de la figura en términos de R y de la posición y, velocidad $\dot{y}$ y aceleración $\ddot{y}$ de la barra horizontal.

a) (3 puntos) Exprese la velocidad y aceleración de P en coordenadas cartesianas (x, y).

b) (2 puntos) Exprese la velocidad y aceleración de P en en coordenadas polares.

c (1 punto) Calcule la fuerza que el aro ejerce sobre el punto P. Suponga conocida la masa de P.



Solución:

a) De la figura vemos que $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$. Hay distintas maneras de hacer el problema, aquó solo se muestra una forma. Las componentes verticales de la velocidad y aceleración son $\dot{y}$ e $\ddot{y}$ dadas. Falta calcular la componente horizontal de la velocidad.

Podemos escribir

$$x = \sqrt{R^2 - y^2}$$

derivando una vez obtenemos

$$\boxed{\dot{x} = -\frac{y\dot{y}}{\sqrt{R^2 - y^2}}}$$

y derivando nuevamente

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{\dot{y}^2}{\sqrt{R^2 - y^2}} - \frac{y\ddot{y}}{\sqrt{R^2 - y^2}} - \frac{y^2\dot{y}^2}{(R^2 - y^2)^{3/2}}}$$

b) En coordenadas polares conviene despejar $\dot{\theta}$ en términos de $\dot{y}$. Derivando $y = R\sin\theta$ obtenemos

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{R^2 - y^2}}$$

La velocidad es entonces

$$\boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{R^2 - y^2}}\hat{\theta}}$$

La aceleración está dada por

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{\rho} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}.$$

La segunda derivada de θ es

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{R^2 - y^2}} + \frac{y\dot{y}^2}{(R^2 - y^2)^{3/2}}$$

y la aceleración es, finalmente,

$$\boxed{\vec{a} = -R\frac{\dot{y}^2}{R^2 - y^2}\hat{\rho} + R\left(\frac{\ddot{y}}{\sqrt{R^2 - y^2}} + \frac{y\dot{y}^2}{(R^2 - y^2)^{3/2}}\right)\hat{\theta}}$$

c) Para calcular la fuerza que el riel circular ejerce, usamos

$$\vec{N} + \vec{T} = m\vec{a}$$

donde llamamos $\vec{N}$ a la fuerza que hace el riel circular y $\vec{T}$ la fuerza que ejerce la barra horizontal. En coordenadas cartesianas $\vec{T} = t\hat{y}$ y $\vec{N} = -N\hat{\rho} = -N(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y})$. La componente $\hat{x}$ de la ecuación para la aceleración nos dice

$$m\ddot{x} = -N\cos\theta = -\frac{N}{R}\sqrt{R^2 - y^2}$$

de donde despejamos

$$\boxed{N = \frac{-mR\ddot{x}}{\sqrt{R^2 - y^2}}}$$

en que $\ddot{x}$ es el calculado en a).

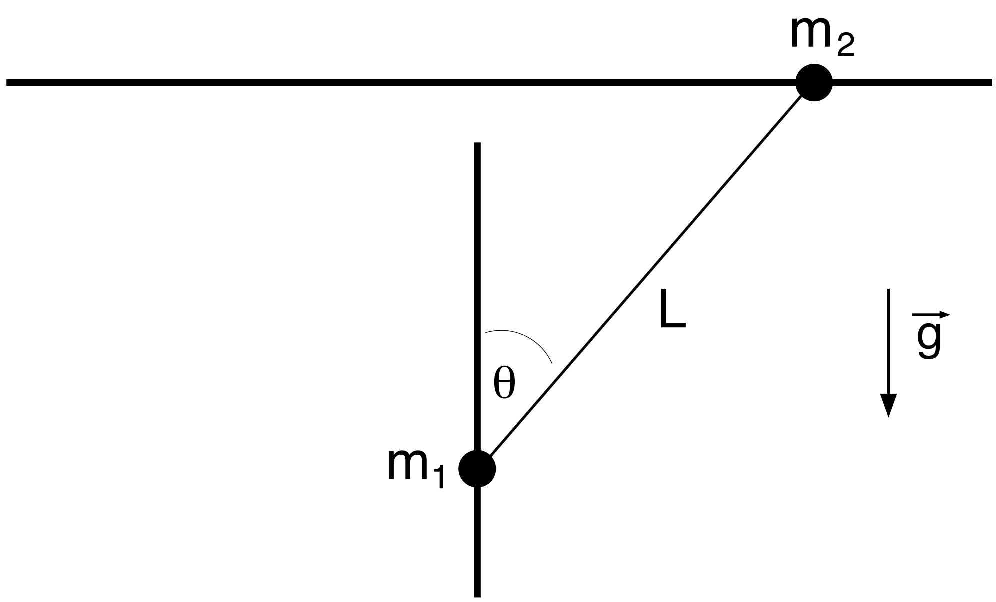
Problema 2

Considere dos partículas de masas m_1 y m_2 que deslizan sin roce por una barra vertical y una horizontal respectivamente tal como se indica en la figura. Ambas están unidas por una barra sin masa de largo L.

a) (3 puntos) Determine la ecuación de movimiento para el ángulo θ.

b) (1,5 puntos) Encuentre la tensión T de la barra en función de θ.

c) (1,5 puntos) Para el caso en que $m_1 = m_2$, determine la frecuencia para pequeñas oscilaciones en torno a $\theta = 0$.



Solución:

a) Conviene plantear las ecuaciones movimiento vertical para m_1 y vertical para m_2.

$$m_1 \ddot{x} = m_1 g - T\cos\theta \tag{1}$$
$$m_2 \ddot{y} = -T\sin\theta. \tag{2}$$

Pero, $x = L\cos\theta$ y $y = L\sin\theta$. Por lo tanto,

$$-m_1 L(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = m_1 g - T\cos\theta \tag{3}$$
$$m_2 L(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = -T\sin\theta. \tag{4}$$

Ahora, eliminando T de las ecuaciones anteriores obtenemos la ecuación de movimiento buscada,

$$\ddot{\theta}(m_1\sin^2\theta + m_2\cos^2\theta) + \dot{\theta}^2(m_1 - m_2)\sin\theta\cos\theta = -\frac{m_1 g}{L}\sin\theta. \tag{5}$$

b) De la ecuación (4) se puede obtener directamente,

$$T = m_2 L(\dot{\theta}^2 - \ddot{\theta} \cot \theta). \tag{6}$$

c) El resultado (5) para $m_1 = m_2$ queda simplemente,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0. \tag{7}$$

Sabemos que para θ pequeño esta ecuación es aproximadamente la de un oscilador armónico con frecuencia natural $\omega = \sqrt{g/L}$.

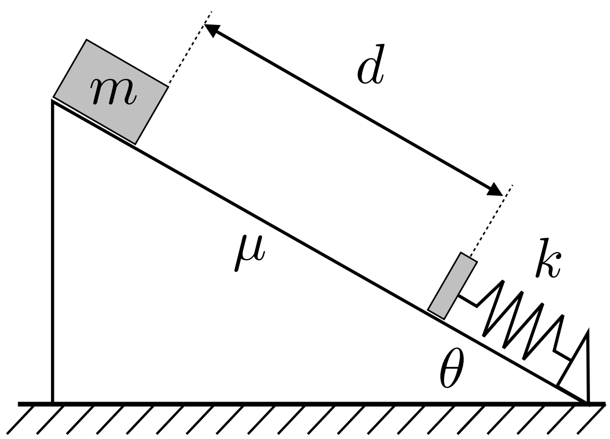
Problema 3

Considere un plano inclinado de ángulo θ. Sobre el plano se coloca un bloque de masa m, inicialmente en reposo, a una distancia d de un resorte de constante elástica k el que se encuentra en su largo natural. El coeficiente de roce estático y dinámico entre el plano inclinado y el bloque es μ_e y μ_d, respectivamente.

a) (1 punto) Encuentre la relación entre el coeficiente de roce estático μ_e y el ángulo θ para que el bloque comience a descender.

b) (3 puntos) Suponiendo que el bloque impacta al resorte, encuentre la máxima compresión del resorte s_{max} (*Sugerencia: escriba sus resultados en términos de* $e = \tan\theta - \mu_d$).

c) (2 puntos) Una vez que el bloque ha comprimido al resorte una distancia s_{max}, determine la condición que debe satisfacer el coeficiente de roce estático μ_e para que el bloque permanezca en reposo.

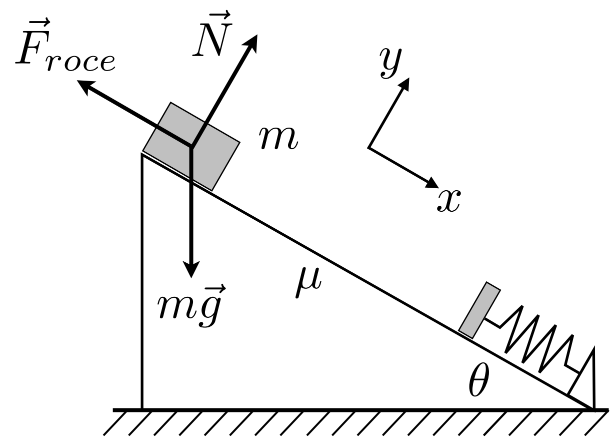


Hint: la solucion para la ecuacion cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ *es*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{ó} \qquad x = \frac{-b}{2a}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}\right) \tag{8}$$

Solución:

a) (1 punto) Encuentre la relación entre el coeficiente de roce estático μ_e y el ángulo θ para que el bloque comience a descender.



Para que el bloque comience a descender, la fuerza de roce estático debe ser menor que la componente de la fuerza de gravedad a lo largo del plano inclinado. En el diagrama de la figura, el peso esta dado por $\vec{P} = mg\sin\theta\hat{i} - mg\cos\theta\hat{j}$. Mientras que la fuerza de roce y la normal están dadas por, $\vec{F_{roce}} = -F_{roce}\hat{i}$ y $\vec{N} = N\hat{j}$. Escribiendo la ecuación de movimiento,

$$(mg\sin\theta - F_{roce})\hat{i} + (N - mg\cos\theta)\hat{j} = m\ddot{x}\hat{i}, \tag{9}$$

nos podemos dar cuenta que para que el bloque descienda el plano basta que $\ddot{x} > 0$, lo que a su vez implica que

$$mg\sin\theta - F_{roce}^{max} > 0.$$

La fuerza máxima de roce esta dada por $F_{roce}^{max} = \mu_e N = \mu_e mg\cos\theta$. De manera que, $mg\sin\theta - \mu_e mg\cos\theta > 0$, ó

$$\mu_e < \tan\theta. \tag{10}$$

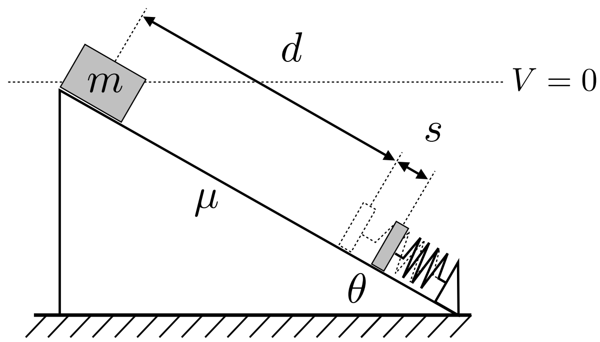
b) (3 puntos) Suponiendo que el bloque impacta al resorte, encuentre la máxima compresión del resorte s_{max} (*Sugerencia: escriba sus resultados en términos de* $e = \tan\theta - \mu_d$).

La fuerza de roce es una fuerza no conservativa y por lo tanto la energía no se conserva. El cambio de energía será igual al trabajo realizado por la fuerza de roce W_{roce},

$$E_f - E_i = W_{roce}. \tag{11}$$

Si elegimos la referencia para el potencial gravitatorio donde se encuentra el bloque inicialmente, la energía inicial esta dada por

$$E_i = K_i + V_i = 0 + 0. \tag{12}$$



Mientras que la energía final esta dada por

$$E_f = K_f + V_f + K_{resorte} = 0 - mg(d+s)\sin\theta + \frac{1}{2}ks^2. \tag{13}$$

El trabajo realizado por la fuerza de roce es

$$W_{roce} = -\mu_d mg\cos\theta(d+s). \tag{14}$$

Por lo tanto, reemplazando en la ecuación (11), tenemos que

$$-mg(d+s)\sin\theta + \frac{1}{2}ks^2 = -\mu_d mg\cos\theta(d+s), \tag{15}$$

la que puede ser reescrita como

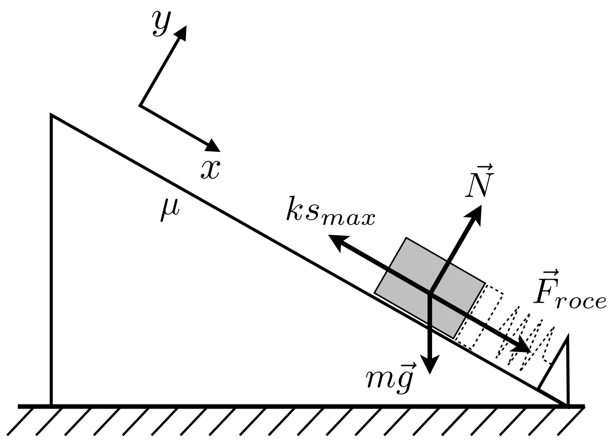
$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}ks^2 - mgs(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) - mgd(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) &(16)\\
0 &= \frac{1}{2}ks^2 - mgs\cos\theta(\tan\theta - \mu_d) - mgd\cos\theta(\tan\theta - \mu_d) &(17)\\
0 &= \frac{1}{2}ks^2 - mgs\cos\theta e - mgd\cos\theta e &(18)\\
0 &= \frac{k}{2mge\cos\theta}s^2 - s - d, &(19)
\end{aligned}$$

donde hemos definido $e \equiv \tan\theta - \mu_d$ para simplificar el algebra. Esta es una ecuación cuadrática en s de coeficientes $a = \frac{k}{2mge\cos\theta}$, $b = -1$ y $c = -d$. Utilizando la solución para le ecuación cuadrática obtenemos,

$$s = \frac{mge\cos\theta}{k}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2kd}{mge\cos\theta}}\right). \tag{20}$$

Sin embargo, la compresión del resorte no puede ser negativa y por lo tanto

$$s_{max} = \frac{mge\cos\theta}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kd}{mge\cos\theta}}\right). \tag{21}$$



c) (2 puntos) Una vez que el bloque ha comprimido al resorte una distancia s_{max}, determine la condición que debe satisfacer el coeficiente de roce estático μ_e para que el bloque permanezca en reposo.

Para que el bloque permanezca en reposo, la fuerza de roce *más* la componente del peso debe ser mayor que la fuerza ejercida por el resorte. Formalmente, si escribimos la segunda Ley de Newton en el sistema coordenado de la figura, obtenemos

$$(mg\sin\theta + F_{roce} - ks_{max})\hat{\imath} + (N - mg\cos\theta)\hat{\jmath} = m\ddot{x}\hat{\imath}. \tag{22}$$

El bloque permanece en reposo si $\ddot{x} = 0$, ó,

$$mg\sin\theta + F_{roce} - ks_{max} = 0 \tag{23}$$

Ya que la fuerza de roce satisface $F_{roce} \leq \mu_e N$, tenemos que

$$ks_{max} - mg\sin\theta \leq \mu_e mg\cos\theta, \tag{24}$$

y finalmente, la condición para el coeficiente de roce estático es,

$$\frac{ks_{max}}{mg\cos\theta} - \tan\theta \leq \mu_e. \tag{25}$$