

**Facultad de Física, P. Universidad Católica de Chile**

**FIS-1513: Estática y Dinámica**

Secciones 01–02–03, Profesores: Rafael Benguria, Samuel Hevia y Roberto Rodríguez

**SOLUCIÓN: Interrogación 1**

Viernes 9 de Septiembre de 2011

Tiempo: 120 minutos

---

NOMBRE:

SECCION:

---

**INDICACIONES GENERALES**

- [1] No olvide escribir su nombre y su sección en el espacio entre líneas que se ha dejado más arriba.
- [2] No se limite a escribir fórmulas. Es importante que siempre explique lo que está haciendo.
- [3] Esta Interrogación es sin uso de calculadora.
- [4] Pruebas escritas con lápiz a mina ó en las que se ha utilizado corrector pierden el derecho a reclamo.

P1	
P2	
P3	
P4	
NI	

**Problema 1.**

**a)** Demuestre que en el lanzamiento de un proyectil con rapidez inicial  $v_0$  y ángulo de lanzamiento  $\alpha$  (medido con respecto a la horizontal), la altura máxima que alcanza el proyectil (por sobre la altura desde donde fue lanzado) está dada por

$$h = \frac{1}{2} \frac{(v_0 \operatorname{sen} \alpha)^2}{g}.$$

(0,5 puntos).

**Solución:** Este resultado es bien conocido del problema de lanzamiento de proyectiles. Se puede derivar de muchas maneras. Quizás la más simple es usando conservación de energía y conservación de momentum en la dirección horizontal. Aquí sin embargo lo derivaremos directamente de la ecuación de movimiento del proyectil (que se mueve bajo la acción del campo gravitatorio constante). Eligiendo coordenadas cartesianas, con el eje  $x$  como el eje horizontal, y el eje  $y$  como el vertical (dirigido hacia arriba), y de modo que el origen coincida con el punto de lanzamiento, la ecuación de movimiento de la partícula (i.e.,  $m\vec{a} = m\vec{g}$ , en que  $\vec{g} = -g\hat{j}$ ) en el sistema de coordenadas elegido se puede escribir como:

$$(1) \quad \ddot{y} = -g,$$

y

$$(2) \quad \ddot{x} = 0.$$

En tanto que las condiciones iniciales del movimiento del proyectil están dadas por  $x(0) = y(0) = 0$ , en tanto que  $\dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha$  y  $\dot{y}(0) = v_0 \operatorname{sen} \alpha$ . Usando estas condiciones iniciales y el Teorema Fundamental del Cálculo, podemos escribir la ecuación de la trayectoria del proyectil (en forma paramétrica) como

$$(3) \quad y(t) = v_0 \operatorname{sen} \alpha t - \frac{1}{2} g t^2,$$

y

$$(4) \quad x(t) = v_0 \cos \alpha t.$$

En el punto mas alto de la trayectoria la velocidad vertical, i.e.,  $\dot{y}$ , es cero. De (3), obtenemos que  $\dot{y} = v_0 \operatorname{sen} \alpha - g t$ , expresión que se anula para  $T = v_0 \operatorname{sen} \alpha / g$ . La altura máxima por lo tanto está dada por

$$(5) \quad h = y(T) = \frac{1}{2} \frac{(v_0 \operatorname{sen} \alpha)^2}{g},$$

que era lo que se pedía demostrar.

**(b)** Considere una rueda de radio  $R$  que gira en torno a un eje horizontal (fijo) con velocidad angular constante  $\omega$ . En todo el borde de la rueda existen partículas de barro, las que pueden ser desprendidas de la rueda. Calcule la altura máxima a la que puede llegar el barro desprendido de la rueda. (1,0 punto).

**Indicaciones:** i) Le puede ser útil el resultado derivado en la parte **a)**; ii) Puede ser conveniente que parametrize el punto de desprendimiento de las partículas de barro por la posición angular (digamos  $\theta$  de la partícula de barro en el instante en que se desprende;

**Solución:** Las partículas de barro se pueden desprender de cualquier punto del borde. Parametricemos los distintos puntos del borde ( de donde se desprenden las partículas de barro) por su posición angular, como se indica en la figura (en que el ángulo  $\theta$  varía entre 0, que corresponde a la posición más baja de la rueda y  $\pi$ , que corresponde a la posición más alta de la rueda). Mientras las partículas de barro están en el borde de la rueda, tienen rapidez  $v_0 = \omega R$ , y esta es la rapidez que tienen en el momento de desprenderse. Por otra parte (tal como se ve en la figura) al desprenderse su vector velocidad forma

un ángulo  $\theta$  con la horizontal. La altura inicial, medida desde la posición más baja de la rueda, de las partículas de barro al desprenderse es:

$$h_i(\theta) = R - R \cos \theta,$$

y, utilizando el resultado de la parte a), la altura que alcanzan las partículas desde la posición inicial (dado que  $v_0 = \omega R$ , y  $\alpha = \theta$ ) está dada por

$$\frac{1}{2} \frac{(\omega R \operatorname{sen} \theta)^2}{g},$$

Sumando estas dos expresiones, la altura máxima medida desde el suelo (punto más bajo de la rueda) que alcanzan las partículas de barro (como función de  $\theta$ ) es:

$$h(\theta) = R(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} \frac{(\omega R \operatorname{sen} \theta)^2}{g}.$$

Finalmente, para encontrar que tan alto puede llegar el barro, maximizamos la función  $h(\theta)$  como función de  $\theta$ . Derivando, obtenemos,

$$\frac{dh}{d\theta} = R \operatorname{sen} \theta \left( 1 + \frac{\omega^2 R}{g} \cos \theta \right).$$

Para encontrar la posición angular  $\theta$  que maximiza  $h$ , buscamos las raíces de  $h'(\theta) = 0$ . En el caso en que  $g/(\omega^2 R) \leq 1$  hay tres raíces:

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi, \quad \text{y} \quad \theta_3 = -\arccos \frac{g}{\omega^2 R}.$$

Evaluando tenemos  $h(\theta_1) = 0$ ,  $h(\theta_2) = 2R$ , y

$$h(\theta_3) = R \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{g}{\omega^2 R} + \frac{\omega^2 R}{g} \right) \right] > 2R,$$

(pues,  $x + (1/x) \geq 2$  si  $x \geq 0$ ). En el caso en que  $g/(\omega^2 R) > 1$  (baja velocidad angular), existen solo dos soluciones (0 y  $\pi$ ) y el barro nunca excede  $2R$ , i.e., nunca sobrepasa el extremos superior de la rueda.

**Problema 2.** Considere el sistema de masas y poleas mostrado en la figura. Si los coeficientes de rozamiento (roce) estático y cinético (dinámico) entre el bloque A y la superficie del plano inclinado son  $\mu_e$  y  $\mu_c$  respectivamente, determine:

(a) El valor mínimo de  $\mu_e$  de manera tal que el bloque A no deslice. (0,5 puntos).

**Solución:** En este problema existen dos posibles movimientos dependiendo de los valores relativos de las masas  $m$  y  $M$  de los dos bloques. Puede todo el sistema deslizarse hacia la derecha (lado de  $M$  grande) o hacia la izquierda (lado de  $m$  chico), y en ambas partes vamos a analizar separadamente las dos posibilidades. Supongamos pues la primera posibilidad. Si llamamos  $T$  a la tensión de la (única) cuerda del problema, entonces sobre el bloque  $M$  actúan dos fuerzas (ambas a lo largo de la vertical):  $2T$  hacia arriba y  $Mg$  hacia abajo. En equilibrio estático la suma de las fuerzas actuando sobre  $M$  debe ser cero, y así tenemos,

$$(6) \quad 2T = Mg,$$

En cuanto al bloque  $m$  que se desliza sobre el plano inclinado de ángulo  $\theta$ , si la gravedad (dada la relación de masas) está tirando el sistema hacia la derecha, sobre él actúan tres fuerzas: la tensión de la cuerda (hacia arriba a lo largo del plano inclinado), la fuerza de roce en la dirección opuesta y el peso hacia abajo. Descomponiendo las fuerzas a lo largo de la superficie y en la dirección perpendicular a esta, respectivamente, las ecuaciones de equilibrio para  $m$  quedan entonces dadas por

$$(7) \quad T - f_R - mg \sin \theta = 0,$$

y

$$(8) \quad N - mg \cos \theta = 0,$$

respectivamente. Eliminando la tensión  $T$  entre las ecuaciones (6) y (7) obtenemos,

$$(9) \quad f_R = \frac{Mg}{2} - mg \sin \theta = g \left( \frac{M}{2} - m \sin \theta \right).$$

De acuerdo al modelamiento usual de las fuerzas de roce, debemos tener que

$$(10) \quad f_R \leq \mu_e N = \mu_e mg \cos \theta.$$

Entonces, de (9) y (10) obtenemos finalmente que

$$\mu_e \geq \frac{(M/2) - m \sin \theta}{m \cos \theta}.$$

Es fácil repetir este ejercicio en la otra situación (en que la razón de masas hace que el sistema este forzado hacia la izquierda), en cuyo caso se obtiene la relación,

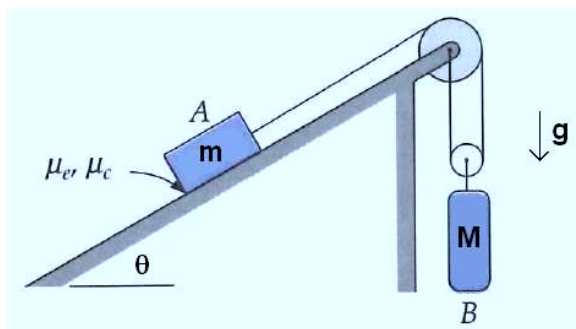
$$\mu_e \geq \frac{(m \sin \theta - (M/2))}{m \cos \theta}.$$

De hecho, la relación de masas que distingue a las dos situaciones es: el signo de  $(M/2) - m \sin \theta$ .

(b) La aceleración de cada cuerpo y las tensiones en las cuerdas, en el caso que el valor de  $\mu_e$  sea menor que el valor determinado en (a). (1,0 punto).

**NOTA:** considere la polea y cuerdas como ideales.

**Solución:** Hagamos en detalle el caso en que  $(M/2) - m \sin \theta > 0$ , i.e., el caso en que el sistema se mueve hacia la derecha (el otro caso es completamente análogo). Ya hemos identificado todas las fuerzas que



actúan sobre cada una de los bloques. Además, en este caso, como el bloque  $m$  se desliza, la fuerza de roce está dada por

$$f_R = \mu_c N = \mu_c mg \cos \theta.$$

Para parametrizar el movimiento de los dos bloques usaremos las coordenadas  $x$  e  $y$  de la figura (i.e.,  $y$  mide la posición del bloque  $M$  verticalmente hacia abajo desde la polea, en tanto que  $x$  mide la posición de  $m$  a lo largo del plano (hacia abajo) también medida desde la polea. Dado lo anterior, las ecuaciones de movimiento del bloque  $M$  está dada por,

$$(11) \quad Mg - 2T = M\ddot{y}.$$

La ecuación de movimiento del bloque  $m$  está dada por,

$$(12) \quad \mu_c mg \cos \theta + mg \sin \theta - T = M\ddot{x}.$$

Finalmente la ecuación de ligadura, asociada al hecho que la cuerda que une los dos bloques es ideal, y dada la manera como la cuerda está dispuesta, está dada por

$$2y + x = \ell,$$

de donde deducimos que

$$(13) \quad 2\ddot{y} = -\ddot{x}.$$

Resolviendo las ecuaciones (11), (12), y (13) para las incógnitas,  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$  y  $T$ , encontramos,

$$\ddot{y} = -\frac{\ddot{x}}{2} = g \frac{[M - 2m(\mu_c \cos \theta + \sin \theta)]}{4m + M}$$

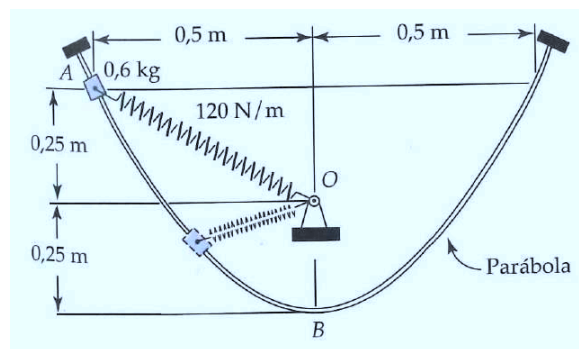
6

y

$$T = g \frac{Mm}{4m + M} (2 + (\mu_c \cos \theta + \sin \theta)).$$

**Problema 3.** La argolla de 0,6 kg (de la figura) parte desde el reposo en  $A$  y se desliza por la guía parabólica lisa (contenida en un plano vertical) bajo la influencia de su propio peso y del resorte de constante 120 N/m. Encuentre la rapidez de la argolla cuando ésta pasa por el punto  $B$  de la figura y la correspondiente fuerza normal que la guía ejerce sobre ella. La longitud natural del resorte es de 200 mm.

(1,5 puntos).



**Solución:** En este problema se pueden introducir los datos numéricos de inmediato, que es quizás el método más directo. Aquí lo haremos para una parábola más general, bajo la misma situación del problema.

Consideremos la parábola de ecuación:

$$(14) \quad y(x) = \frac{1}{2r}x^2,$$

Se ve de inmediato que  $y'' = 1/r$ , y por lo tanto  $r$  es el radio de curvatura en el punto  $B$ . Notese que en el caso del problema  $OB$  es precisamente el radio de curvatura. Llamemos  $(q, q^2/(2r))$ , las coordenadas del punto  $A$  (que está sobre la parábola, y por eso si  $x = q$ ,  $y = q^2/(2r)$ ). El punto  $O$  tiene coordenadas  $(0, r)$  y el punto  $B$  obviamente tiene coordenadas  $(0, 0)$  (i.e, está en el origen). Cuando la argolla pasa por el punto  $A$ , el largo del resorte está dado por (de acuerdo a Pitágoras),

$$(15) \quad L = \sqrt{\left(\frac{q^2}{2r} - r\right)^2 + q^2} = r\sqrt{1 + \frac{q^4}{4r^4}}.$$

Si tomamos la altura 0 como nivel de referencia del potencial gravitatorio, y dado que en  $A$  la argolla está en reposo, la energía total del sistema está dada por

$$E_A = mg\frac{q^2}{2r} + \frac{1}{2}k(L - \ell)^2,$$

en que  $\ell$  es el largo natural del resorte. Por otra parte, si llamamos  $v$  a la velocidad de la argolla al pasar por el punto  $B$ , tenemos que

$$E_B = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(r - \ell)^2.$$

Como las fuerzas en este problema son conservativas, tenemos que  $E_A = E_B$  y luego de un poco de álgebra encontramos que

$$(16) \quad mv^2 = mgr\frac{q^2}{r^2} + kr^2 \left[ \frac{q^4}{4r^4} + \frac{2\ell}{r} - \frac{2\ell}{r} \sqrt{\frac{q^4}{4r^4} + 1} \right]$$

Finalmente, para encontrar la reacción  $N$  de la barra en el punto  $B$  usamos la ecuación de movimiento, i.e., la suma de las fuerzas en la dirección radial (con centro en  $O$ ) es igual a la masa por la aceleración, de modo que,

$$(17) \quad mg - N - k(r - \ell) = -m\frac{v^2}{r},$$

y, reemplazando el valor encontrado para  $v^2$ , dado por (16) en la ecuación (17) y simplificando, finalmente obtenemos,

$$(18) \quad N = mg \left( 1 + \frac{q^2}{r^2} \right) + kr \left[ \frac{q^4}{4r^4} + 3\frac{\ell}{r} - 1 - \frac{2\ell}{r} \sqrt{\frac{q^4}{4r^4} + 1} \right].$$

Para los datos numéricos del problema,  $q/r = 2$  y  $\ell/r = 4/5$ ,  $m = 0,6$  y  $k = 120$ , de (18) obtenemos,

$$N = 3g + 6(27 - 8\sqrt{5}),$$

y si tomamos  $g = 10$ , finalmente  $N = 192 - 48\sqrt{5} = 48(4 - \sqrt{5}) \approx 84,5\text{N}$ . Así mismo, de (16) obtenemos,

$$v^2 = g + 10(7 - 2\sqrt{5}) = 20(4 - \sqrt{5}) \approx 35,2,$$

de donde,  $v \approx 5,9\text{m/s}$ .

**Problema 4.** Considere un péndulo simple de masa  $m$ , sujeto desde un punto fijo  $O$  por medio de una cuerda ideal de largo  $\ell$ . Suponga que el péndulo se deja evolucionar desde el reposo, desde una desviación inicial  $\theta_0$ , medida con respecto a la vertical.

a) Encuentre la expresión para la tensión de la cuerda  $T$  como función de la desviación  $\theta$  del péndulo con respecto a la vertical (i.e.,  $T(\theta)$ ). (1,0 punto).

**Solución:** Conviene elegir coordenadas polares (con centro en  $O$ , y la vertical hacia abajo como eje polar) para representar el movimiento de  $m$ . Entonces la posición de  $m$  en polares está dada por  $\rho = \ell$  (una constante) y  $\theta$ , la desviación del péndulo con respecto a la vertical. Sobre  $m$  actúan dos fuerzas: la tensión  $T$  de la cuerda (dirigida desde  $m$  hacia  $O$ ) y el peso  $mg$  dirigido verticalmente hacia abajo.

En la base polar, la fuerza total actuando sobre la partícula está dada entonces por

$$\vec{F} = -T\hat{\rho} + mg \cos \theta \hat{\rho} - mg \sin \theta \hat{\theta}.$$

Por otra parte, la aceleración en polares está dada, en general, por

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta}.$$

En este caso,  $\rho = \ell$  (una constante), y por lo tanto,  $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$ . Así, en este caso, Por otra parte, la aceleración en polares está dada, en general, por

$$\vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \ell\ddot{\theta})\hat{\theta}.$$

Entonces, de la segunda Ley de Newton, igualando las componentes a lo largo de  $\rho$  de la fuerza y de  $m\vec{a}$  obtenemos,

$$(19) \quad -T + mg \cos \theta = -m\ell\dot{\theta}^2,$$

de donde obtenemos,

$$(20) \quad T = mg \cos \theta + m\ell\dot{\theta}^2.$$

Por otra parte, la velocidad de  $m$  en polares (con  $\rho = \ell$ , i.e., con  $\dot{\rho} = 0$ ) quedada dada por  $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\hat{\theta}$ , de modo que  $v^2 = \ell^2\dot{\theta}^2$ . Como en este problema solo intervienen fuerzas conservativas se conserva la energía total, la que está dada por

$$(21) \quad E = K + V = \frac{1}{2}mv^2 - mg \cos \theta = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta,$$

en que hemos tomado la altura del punto  $O$  como nivel de referencia del potencial gravitatorio. En el instante inicial, si partimos del reposo con una desviación inicial  $\theta_0$ ,  $v = 0$  y  $\theta = \theta_0$ , y de (21) obtenemos,

$$(22) \quad \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta = -mg \cos \theta_0.$$

Despejando  $\dot{\theta}^2$  de (22) y reemplazándolo en (20) finalmente obtenemos,

$$(23) \quad T = 3mg \cos \theta - 2mg \cos \theta_0.$$

b) Asumiendo que  $m = 20$  [kg], tomando el valor de  $g$  como  $10$  m/seg<sup>2</sup>, la desviación inicial como  $\theta_0 = 30^\circ$ , y que la tensión máxima que puede resistir la cuerda que sostiene al péndulo es de  $220$  N, ¿es capaz el péndulo de realizar sus oscilaciones sin que la cuerda se corte? Si su respuesta es negativa, determine el valor de  $\theta$  para el cual la cuerda se corta. (0,5 puntos).

**Solución:** La tensión  $T(\theta)$  dada por (23) es creciente en  $\theta$  y es, por lo tanto máxima en la posición inferior (i.e., en  $\theta = 0$ ). En este caso, con los datos del problema,

$$T(0) = 200 \left(3 - \sqrt{3}\right) \approx 254\text{N} > 220,$$

así es que la cuerda se corta antes de llegar a la posición más baja. La desviación angular (digamos  $\theta_1$ ) para la que la cuerda se cortara está determinada por la condición  $T(\theta_1) = 220$ , de donde obtenemos (para los datos del problema,

$$\cos \theta_1 = \frac{220 + 200\sqrt{3}}{600} = \frac{11}{30} + \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,994.$$