Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física

FIS1532 Estática y Dinámica
Guía de Ejercicios Cinemática

Felipe Soto Arévalo

1. Ejercicios Resueltos

Problema 1. En otro planeta llamado *"Planeta"* se tiene una gravedad $g' = \frac{3}{2}g$ (siendo g la gravedad de la Tierra), se dispara un proyectil de manera que su alcance (distancia horizontal recorrida) resulta ser el triple de la altura máxima que alcanza.

a) ¿Cuál es el ángulo α de lanzamiento del proyectil?

b) Si v_o es la rapidez inicial del proyectil ¿Cuál es su tiempo de vuelo?

Solución. .

Se trata de un simple lanzamiento de proyectil. Para describir el movimiento elegimos coordenadas cartesianas de modo que el orígen coincida con el punto de lanzamiento. En forma paramétrica las coordenadas del proyectil están dadas por

$$x(t) = v_0 \cos\alpha\, t, \qquad y(t) = v_0 \text{sen}\alpha\, t - \frac{1}{2}g' t^2,$$

en que v_0 es la rapidez del proyectil en el momento del lanzamiento y α es el ángulo del lanzamiento. Eliminando t entre las dos ecuaciones anteriores se obtiene la ecuación de la trayectoria del proyectil (que es una parábola):

$$y(x) = x\tan\alpha - \frac{g' x^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Para encontrar el rango basta resolver la ecuación $y = 0$, de donde encontramos dos soluciones $x_1 = 0$ y $x_2 = v_0^2 \text{sen}(2\alpha)/g'$. Esta última corresponde al "rango" o "alcance":

$$R(\alpha) = \frac{v_0^2 \text{sen}(2\alpha)}{g'}.$$

Por otra parte, para encontrar la altura máxima, basta encontrar el máximo de la parábola, i.e., el punto donde $dy/dx = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \tan\alpha - \frac{g'}{v_0^2\cos^2\alpha}x,$$

e imponiendo $dy/dx = 0$ encontramos la altura máxima, que está dada por

$$h(\alpha) = \frac{v_0^2}{\text{sen}^2\alpha}2g'.$$

Finalmente, exigiendo que $R(\alpha) = 3h(\alpha$, encontramos

$$\text{sen}2\alpha = \frac{3}{2}\text{sen}^2\alpha,$$

y, dado que $\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha$, finalmente obtenemos

$$\alpha = \arctan\frac{4}{3}$$

Para obtener el tiempo de vuelo t_v basta resolver la ecuación

$$x(t_v) = v_0\cos\alpha\, t_v = R(\alpha),$$

de modo que el tiempo de vuelo resulta ser,

$$t_v = \frac{2v_0}{g'}\text{sen}\alpha.$$

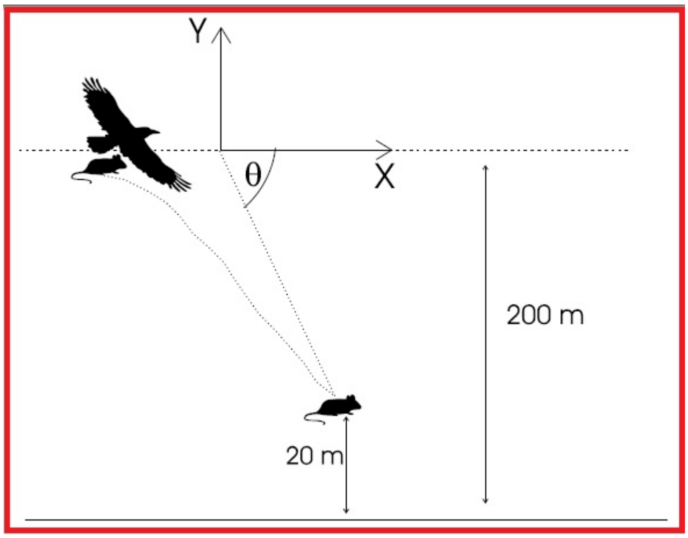
En donde: $sen(\alpha) = \frac{4}{5}$

Problema 2. Un halcón vuela horizontalmente a 10[m/s] a una altura de 200[m] sobre el suelo. La presa que lleva entre sus garras se le suelta al despistado halcón. Este último continúa volando 2[s] con la misma rapidez y a la misma altura antes de intentar recuperar su presa. Para lograrlo, desciende en línea recta con rapidez constante y recaptura el ratón a 20[m] sobre el suelo.

a) ¿Durante cuánto tiempo el ratón disfruta su caída libre?

b) ¿Qué ángulo forma el halcón con la horizontal durante su descenso?

c) Encuentre la rapidez de descenso del halcón.



Solución. .

La ecuación de movimiento del ratón es

$$x_r = v_{0x}t, \tag{1}$$

$$y_r = H - \frac{1}{2}gt^2, \tag{2}$$

y del halcón

$$x_h = v_{0x}t \qquad y_h = H + v_{0y}(t-2), \tag{3}$$

ya que el halcón debe seguir con la misma velocidad horizontal que el ratón para poder alcanzarlo. En esta fórmula $H = 200$ metros y $v_{0x} = 10$ m/s.

a) El ratón cae libremente hasta $h = 20$ metros. El tiempo que tarda en llegar a esta altura, se lee de la ecuación (2), es

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = 6\text{seg.}} \tag{4}$$

b) En el intervalo entre $t = 2$ seg y $t = 6$seg el halcón desciende hasta la altura h. De la segunda fórmula (3) obtenemos la velocidad vertical: $h = H + v_{0y}(6-2)$, de donde resulta

$$v_{0y} = -\frac{180}{4} = -45\text{m/s}.$$

La rapidez del halcón es entonces

$$\boxed{v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{2125} = 5\sqrt{17 \times 5}} \tag{5}$$

c) El ángulo que forma con la horizontal es

$$\boxed{\tan\theta = \frac{45}{10} = \frac{9}{2}} \tag{6}$$

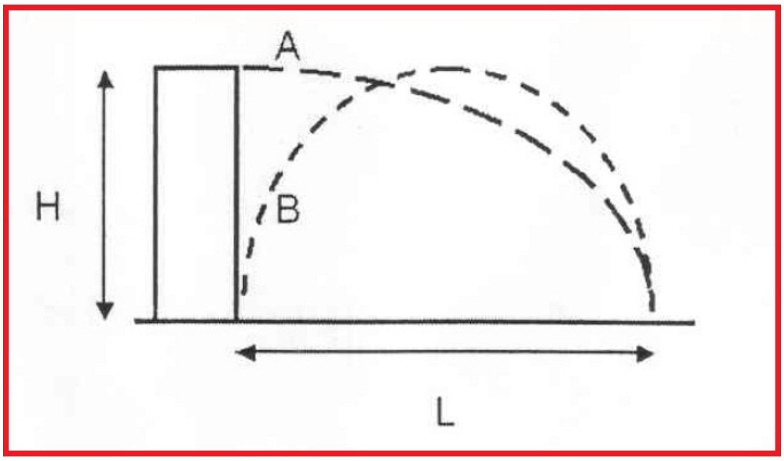
2. Ejercicios Propuestos

Problema 3. Se disparan dos proyectiles simultáneamente desde un edificio. El proyectil A se lanza horizontalmente desde la punta del edificio de altura H, y el proyectil B se lanza desde la puerta con altura 0. La altura máxima que alcanza este último es igual a la altura H del edificio. Si ambos proyectiles dan en el blanco que se encuentra a una distancia horizontal L del lanzamiento, calcular:

a) ¿Cuánto tiempo se demora A en llegar al blanco comparado con B? (Es decir, cuál es el valor de $\frac{t_A}{t_B}$)

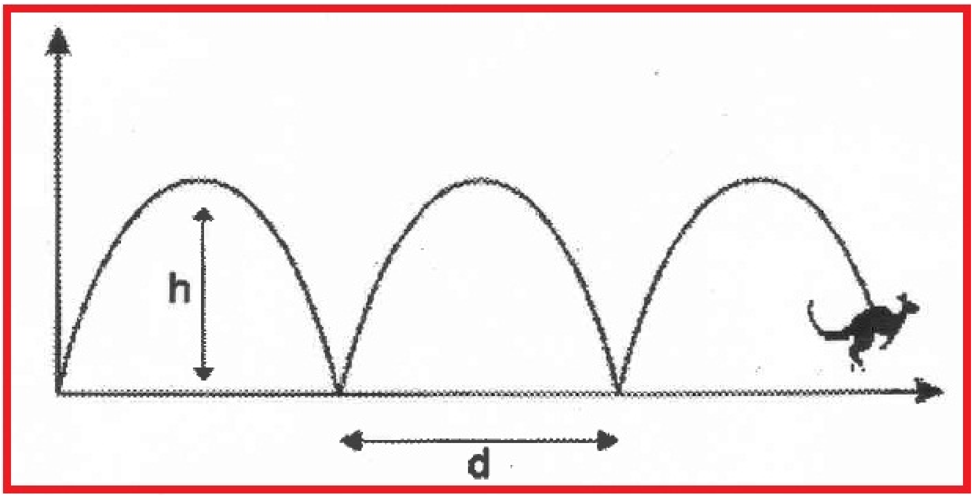
b) ¿Cuál es el cociente entre las componentes horizontales de las velocidades de ambos? (Es decir, cuál es el valor de $\frac{V_{Ax}}{V_{Bx}}$)

c) ¿Cuál es el módulo de la velocidad de A al llegar al suelo ($V_A f$)?



Problema 4. Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria parabólica definida por la ecuación $y = cx^2$ con una rapidez constante v_0. Encuentre expresiones para la velocidad $\vec{v}$ y la aceleración $\vec{a}$ de la partícula cuando se encuentra en la posición (x_0, y_0).

Problema 5. Un afamado canguro australiano corre saltando. En cada ocasión, salta una distancia horizontal **d** hasta alcanzar verticalmente una altura máxima **h** (ver figura). Calcule la velocidad horizontal v_x con la cual nuestro canguresco amigo se desplaza en términos de **h**, **d** y **g**.



Problema 6. Una partícula se mueve en el plano según las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cdot \cos(\omega t) \\ y(t) &= b \cdot \sin(\omega t) \end{aligned}$$

En donde a, b, ω son constantes positivas y tales que $a > b$. En base a esto:

a) Describa cualitativamente la forma de la trayectoria descrita por la partícula.

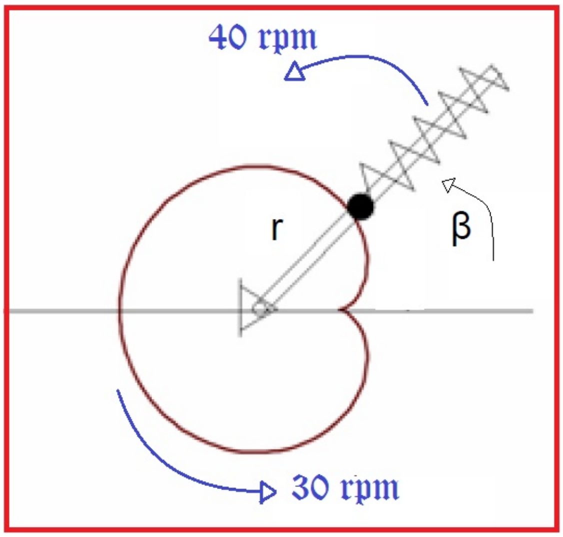
b) Determine el tiempo que tarda la partícula en volver al punto de partida.

c) Determine velocidad y rapidez de la partícula, indicando además los puntos de la trayectoria en que se alcanza el mínimo y máximo de esta última.

Problema 7. El siguiente sistema consiste en una leva cuyo contorno satisface la ecuación $r = 10 - 7{,}5 \cdot cos(\beta)$ y que rota en sentido horario dando 30 revoluciones por minuto. Además hay un actuador que rota en sentido opuesto a la leva dando 40 revoluciones por minuto. Determine en el instante en que $\beta = 30°$:

a) $\vec{v} = \vec{\dot{r}}$

b) $\vec{a} = \vec{\ddot{r}}$



Problema 8. Un esquiador sale de un trampolín con una velocidad de 96[km/h] con una inclinación de 10° por sobre la horizontal (ver figura). En base a esto, determinar:

a) Altura máxima que alcanzará por sobre el extremo del trampolín.

b) Tiempo de vuelo de su salto.

c) Distancia del salto d (ver figura).