Francisco Moya M.
ftmoya@uc.cl

Cinemática 2D y 3D

Problema 1:

Se observa una partícula en movimiento con respecto a un sistema de Referencia inercial. La trayectoria está dada por las siguientes funciones:

$$\rho = Ae^{k\theta} \qquad z = h\rho$$

donde ρ, θ y z son las respectivas coordenadas cilíndricas (con A, k, h positivos). Suponiendo que su rapidez es constante (V_0) y conocida:

a) Calcule la velocidad $\vec{v}$ de la partícula en función de θ, A, k, h y V_0

b) Encuentre su aceleración $\vec{a}$ en función de los mismos parámetros.

c) Pruebe que $\vec{a} \perp \vec{v}$

d) Encuentre $\theta(t)$

Solución:

Como sabemos que usamos coordenadas cilíndricas, la posición de la partícula está dada por:

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k} = Ae^{k\theta}\hat{\rho} + hAe^{k\theta}\hat{k}$$

Luego derivamos en función del tiempo:

$$\dot{\vec{r}} = Ake^{k\theta}\dot{\theta}\hat{\rho} + Ae^{k\theta}\dot{\theta}\hat{\theta} + hkAe^{k\theta}\dot{\theta}\hat{k}$$

$$\dot{\vec{r}} = Ae^{k\theta}\dot{\theta}\left(k\hat{\rho} + \hat{\theta} + hk\hat{k}\right)$$

Como la rapidez es constante y vale V_0, tenemos:

$$\|\dot{\vec{r}}\| = V_0$$

Fco. Moya
ftmoya @uc.cl

$$\Rightarrow \|\dot{\vec{r}}\| = A\dot{\theta}e^{k\theta}\sqrt{k^2+1+h^2k^2} = V_0$$

$$\Rightarrow \quad A\dot{\theta}e^{k\theta} = \frac{V_0}{\sqrt{k^2+1+h^2k^2}} \quad (1)$$

Luego entonces:

$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \frac{V_0}{\sqrt{k^2+1+h^2k^2}}\left(k\hat{\rho}+\hat{\theta}+hk\hat{k}\right)}$$

b) Con el resultado anterior y derivando:

$$\vec{a} = \frac{V_0}{\sqrt{k^2+1+h^2k^2}}\left(k\dot{\theta}\hat{\theta} - \dot{\theta}\hat{\rho}\right)$$

$$= \frac{V_0\dot{\theta}}{\sqrt{k^2+1+h^2k^2}}\left(k\hat{\theta} - \hat{\rho}\right)$$

Ahora bien $\dot{\theta}$ es desconocido, pero de (1)

$$\dot{\theta} = \frac{V_0}{Ae^{k\theta}\sqrt{k^2+1+h^2k^2}}$$

Luego:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{V_0^2}{Ae^{k\theta}\left(k^2+1+h^2k^2\right)}\left(k\hat{\theta} - \hat{\rho}\right)}$$

c) Recordemos que cuando 2 vectores son $\perp$, el producto punto entre ambos es 0, luego hay que probar que $\vec{a}\cdot\vec{v} = 0$.

Existen 2 formas:

(1) hacer el producto punto (largo!!!)

(2) usar que $\vec{v}\cdot\vec{v} = V_0^2$, así:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \vec{a}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{a} = 2\vec{a}\cdot\vec{v} = 0$$

Aquí se usó la regla de la cadena para un producto, y luego el argumento de que la rapidez es constante, y por ende su derivada es 0.

d) Para hallar $\theta(t)$, usaremos $\dot{\theta}(t)$.

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{V_0}{Ae^{k\theta}\sqrt{k^2+1+h^2k^2}}$$

$$\Rightarrow e^{k\theta}\,d\theta = \frac{V_0}{A\sqrt{h^2k^2+1+k^2}}\,dt \quad / \int$$

$$\Rightarrow \int e^{k\theta}\,d\theta = \int \frac{V_0}{A\sqrt{h^2k^2+1+k^2}}\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{e^{k\theta}}{k} = \frac{V_0}{A\sqrt{h^2k^2+1+k^2}}\,t + C_1$$

Luego $\theta(t)$:

$$\boxed{\theta(t) = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{kV_0}{A\sqrt{k^2+1+h^2k^2}}\,t + kC_1\right)}$$

* Notemos que:

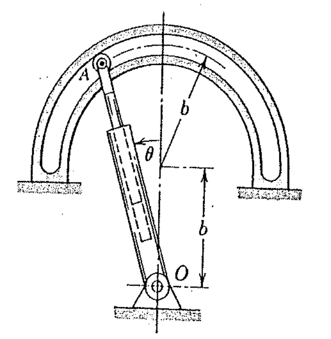
- C_1 depende de las condiciones iniciales
- Con la información encontrada en d) y MathLab podemos animar el movimiento de la particula asignandole Condiciones iniciales. Esto se verá más adelante en el curso.

Fco. Moya
ftmoya@uc.cl

Fco. Moya (ftmoya@uc.cl)

Problema 2:

El movimiento del rodillo A, en la ranura circular fija, está gobernado por el brazo OA, cuya parte superior desliza libremente en la inferior para acomodarse a la variación de la distancia de A a O al variar θ. Si el brazo tiene una velocidad angular constante, en sentido antihorario, $\dot{\theta} = K$ durante un intervalo de su movimiento, determinar la aceleración a del punto A para cualquier posición en dicho intervalo.

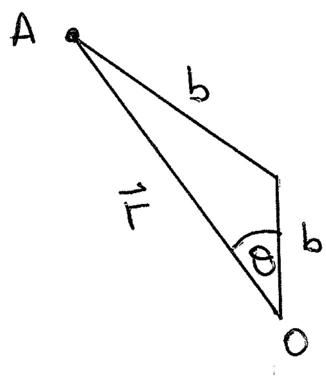


Solución:

Primero debemos elegir un sistema de referencia inercial para poder describir el movimiento. Como es en 2D y el movimiento es a través de una ranura circular escogeremos polares con centro en O.

Buscamos una relación geométrica conveniente para así encontrar $\vec{r}(t)$ y luego derivar 2 veces y hallar $\ddot{\vec{r}}$.

Usando el Teorema del Coseno tenemos:



$$(1) \quad b^2 = \|\vec{r}\|^2 + b^2 - 2b\|\vec{r}\|\cos\theta$$

Fco. Moya (ftmoya @uc.cl)

Luego con (1) tenemos:

$$\|\vec{r}\|^2 = 2b\|\vec{r}\|\cos\theta$$ / simplificamos $\|\vec{r}\|$, considerando que $\|\vec{r}\| \neq 0$ $\forall$ tiempo.

$$\Longrightarrow \|\vec{r}\| = 2b\cos\theta$$

* Podrian haber llegado a lo mismo usando triángulo isósceles.

Luego:

$$\vec{r} = 2b\cos\theta\,\hat{\rho}$$

Ahora todo se reduce a derivar bien.

$$\dot{\vec{r}} = -2b\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta}\,\hat{\rho} + 2b\cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

y:

$$\ddot{\vec{r}} = -4b\cos\theta\,\dot{\theta}^2\,\hat{\rho} - 4b\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta}^2\,\hat{\theta}$$

Por ende:

$$\|\ddot{\vec{r}}\| = 4b\dot{\theta}^2$$

y como $\dot{\theta} = k$

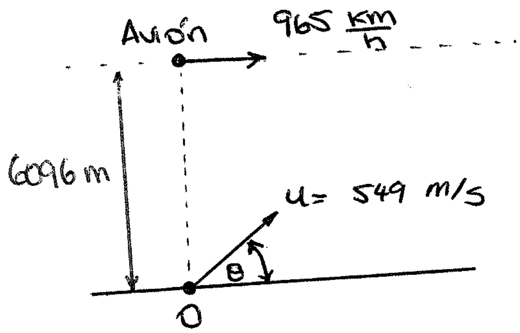
$$\Longrightarrow \underline{\underline{a = 4bk^2}}$$

* Es importante que comprueben dimensionalmente si su resultado es correcto. Si b mide distancia ($[L]$) y k velocidad angular ($\frac{1}{[T]}$) $\Rightarrow$ a se está midiendo en ($\frac{[L]}{[T]^2}$) lo cual es correcto.

Problema 4:

Fco. Moya (ftmoya@uc.cl)

Calcular el ángulo de tiro θ de un cañón antiaéreo con una velocidad de salida de 549 m/s, si le debe alcanzar de lleno a un avión que vuela horizontalmente a 965 $\frac{km}{h}$ a una altura de 6096 m. El cañón se dispara en el instante en que el avión vuela sobre su vertical. Hallar el tiempo t requerido para que el proyectil alcance el avión.



Solución:

Como consejo para la resolución de problemas en general, usaremos pasos a seguir siempre (obviamente si el problema no lo amerita no debemos necesariamente seguirlos).

1) identificar nº de cuerpos involucrados
2) Elegir Sistema de Referencia (inercial por el momento)
3) Plantear ecuaciones para cada cuerpo de acuerdo a sus sistemas de Referencia
4) Solucionar un sistema de ecuaciones

Paso 1: 2 cuerpos

Paso 2: Usaremos coordenadas cartesianas con origen en O

Paso 3:

Avión:

(1) $Y = 6096$

(2) $X = V_x t$; $V_x = 965 \frac{km}{h}$

$$= 965 \frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \cdot \frac{1000\,m}{\cancel{km}} \cdot \frac{1\,\cancel{h}}{3600\,s}$$

$$= \frac{4825}{18} \frac{m}{s}$$

Fco. Moya (ftmoya@uc.cl)

Proyectil:

(3) $V_x = 549 \cos\theta$

(4) $V_y = 549 \operatorname{sen}\theta - gt$

(5) $x = 549 \cos\theta\, t$

(6) $y = 549 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{gt^2}{2}$

Luego procedemos a imponer un choque, es decir:

$$X_{avión} = X_{proyectil}$$

$$Y_{avión} = Y_{proyectil}$$

$$\Rightarrow \quad 549 \cos\theta\, t = \frac{4825}{18} t$$

/ como ocurre en $t \neq 0$ simplificamos t

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{4825}{9882}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\theta = 60^\circ 46'}}$$

Luego:

$$6096 = 549 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{gt^2}{2}$$

Usando θ $\Rightarrow$:

$$6096 = 479.11 t - 4.9t^2$$

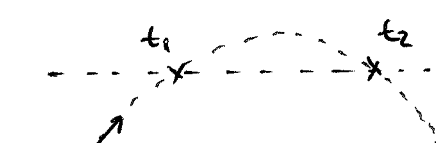
Solucionando:

$$t_1 = 15.0357$$

$$t_2 = 82.7419$$

¿Cuál es el t que nos piden?

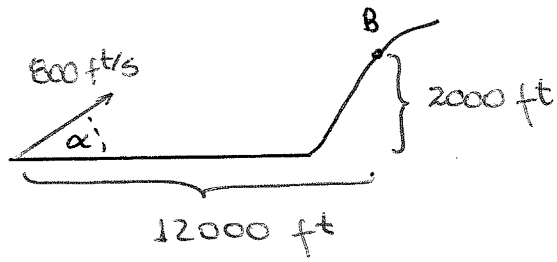
Evaluan t_1 y t_2 en alguna ecuación einterpreten que nos dice, así descartarán soluciones no validas, o como en este caso t_2 que nos indica una segunda intersección.



Problema 5:

Fco. Moya (ftmoya@uc.cl

Se dispara un proyectil con una velocidad inicial de 800 ft/s a un blanco B localizado a 2000 ft por arriba del cañon A y a una distancia horizontal de 12000 ft. Despreciando el aire, determine el ángulo α de disparo. $\left[g = 32.2\ \frac{ft}{s^2}\right]$



Solución:

Colocando el origen en el cañón tenemos:

(1) $V_x = 800 \cos\alpha$

(2) $x = V_x t$

$\Rightarrow$ El tiempo que requiere el proyectil es:

$$12000 = 800 \cos\alpha\, t$$

$$\rightarrow t = \frac{15}{\cos\alpha}$$

Luego:

$$y = V_y t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad / g = 32.2\ \frac{ft}{s^2}$$

$$\Rightarrow y = 800 \operatorname{sen}\alpha\, t - 16.1 t^2$$

imponemos que $y = 2000$ ft

$$\rightarrow 2000 = 800 \operatorname{sen}\alpha \frac{15}{\cos\alpha} - 16.1 \left(\frac{15}{\cos\alpha}\right)^2$$

Usando que: $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha$

$$\Rightarrow 2000 = 800(15)\, tg\,\alpha - 16.1(15^2)(1 + tg^2\alpha)$$

Fco.Maya @uc.cl

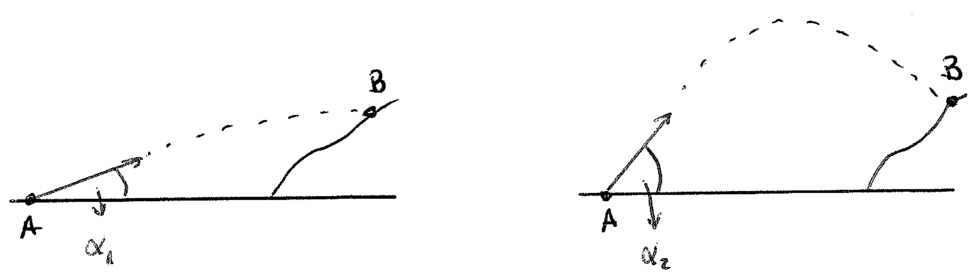
$$3622\, tg^2\alpha - 12000\, tg\,\alpha + 5622 = 0$$

Resolvemos la cuadrática para $tg\alpha$ y obtenemos:

$tg\,\alpha = 0.565$ y $tg\,\alpha = 2.75$

$\Longrightarrow \alpha_1 = 29.5°$ $\Longrightarrow \alpha_2 = 70°$

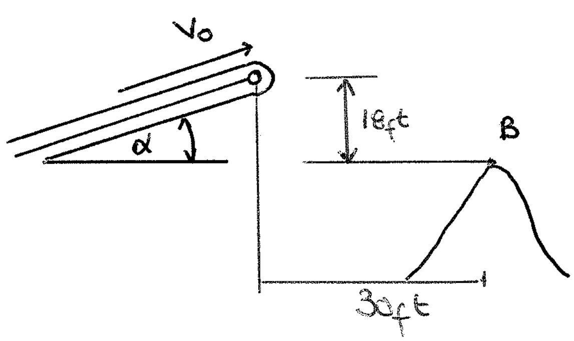
* Dibujo de los ángulos:



Problemas Propuestos

Problema 6:

Desde una banda transportadora se descarga arena en A y cae en la punta de un montículo formado en B. Sabiendo que la banda transportadora forma un ángulo $\alpha = 20°$ con la horizontal, determínese la rapidez V_o de la banda.

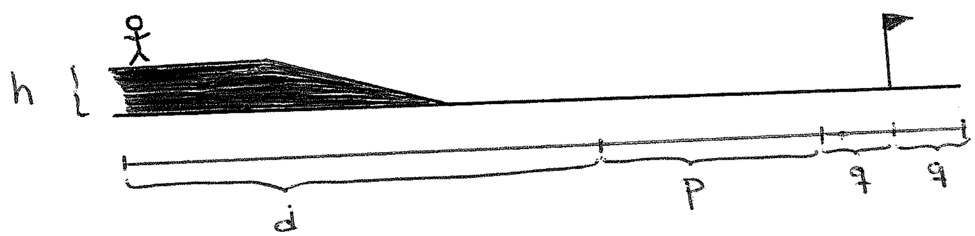


Fco. Moya (ftmoya@uc.cl

Problema 7:

Un golfista desea conocer en que ángulos puede lanzar para distintas situaciones. Lo que el conoce es que puede imprimir una velocidad v_0 a la pelota.

$\downarrow \vec{g}$



a) Desea obtener un tiro a q [m] del hoyo

b) Cae en la zona entre $[d, d+p]$ [m]

c) Empieza a correr un viento de derecha a izquierda con una magnitud tal que se puede modelar como una aceleración de a [m/s^2]. Así y todo, el golfista desea un hoyo en 1, pues esto le significará el título mundial.

* hoyo en 1 se logra en $(d+p+q)$ [m]