# Capítulo 3: Energía y Trabajo

Consideremos una partícula que se encuentra solamente sometida a la fuerza de gravedad, i.e., a su propio peso. Como hemos visto en los capítulos anteriores, la ecuación de movimiento de la partícula está dada por

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = +m\vec{g}. \tag{1}$$

Ahora, si multiplicamos la ecuación anterior por $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, esta puede ser integrada una vez. En efecto, por la regla de la cadena, es simple verificar que el lado izquierdo se puede escribir como una derivada,

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right). \tag{2}$$

El término entre paréntesis se conoce como *energía cinética de la partícula.* Es un número real, nonegativo, que depende del módulo de la velocidad de la partícula, y por supuesto de la masa de ésta. Usaremos la notación

$$K \equiv \frac{1}{2}m\vec{v}^2, \tag{3}$$

para referirnos a la energía cinética de la partícula.

Si procedemos en forma similar con el lado derecho de (1), observamos que

$$+m\vec{g} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(+m\vec{g} \cdot \vec{r}\right), \tag{4}$$

también es una derivada exacta. También le daremos un nombre al término entre paréntesis en (4). A la cantidad

$$V(\vec{r}) = -m\vec{g} \cdot \vec{r}, \tag{5}$$

que depende sólo de la posición de la partícula, y no de su velocidad, la denominaremos *energía potencial* de la partícula. Si llamamos $\hat{k}$ a la dirección vertical (hacia arriba), entonces $\vec{g} = -g\hat{k}$, de modo que la energía potencial se puede expresar como

$$V(z) = m\,g\,z, \tag{6}$$

en que $z$ es la proyección del vector posición a lo largo de la vertical, i.e., $z = \vec{r}\cdot\hat{k}$.

De las ecuaciones (2), (4), y (6) vemos que la ecuación (1), al multiplicarla por $\vec{v}$ se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}(K + V) = 0, \tag{7}$$

con $K$ y $V$ dadas respectivamente por (3) y (6). La ecuación (7) implica de inmediato que

$$K + V = E, \tag{8}$$

en que $E$ es una constante de integración. El valor de $E$ queda determinado por el estado inicial del sistema, i.e., por el valor inicial de la posición $z(0)$ y la velocidad inicial $\vec{v}(0)$. A esta constante de integración la llamremos la *energía total* del cuerpo, y de (8) vemos que la energía total es la suma de las energías cinética y potencial.

*Comentarios:*

i) En la determinación de la energía potencial, el orígen de coordenadas puede ser escogido arbitrariamente. En otras palabras, existe libertad para elegir el *nivel cero* del potencial. Claro está que una vez elegido este nivel cero, se debe mantener fijo.

ii) La ecuación de *conservación de energía*, (8), es una ecuación diferencial de primer orden, pues en ella solo aparecen las componentes de la velocidad y la posición de la partícula. Recordemos que la segunda ley de Newton es una ecuación diferencial de segundo orden.

iii) La ecuación de conservación de energía es una ecuación escalar, al contrario de la segunda ley de Newton, la cual es una ecuación vectorial.

iv) Finalmente, debemos notar que la ecuación de conservación de energía contiene menos información que la ecuación de movimiento, por lo que a menudo (e.g., en sistemas en dos o más dimensiones) debe ser complementada con otros teoremas de conservación, o con información proveniente de la ecuación de movimiento.

## 0.1 Lanzamiento de proyectiles (revisión)

El movimiento de cuerpos que realizan movimientos unidimensionales bajo la acción de la gravedad es muy simple de determinar usando conservación de energía. Por ejemplo, si lanzamos un objeto hacia arriba con velocidad $v_0$ podemos calcular de inmediato la altura máxima que alcanza. En efecto, si tomamos como nivel de referencia de la energía potencial el nivel de lanzamiento, la energía inicial del cuerpo es sólo energía cinética, i.e.,

$$E_i = K_i = \frac{1}{2} m v_0^2, \tag{9}$$

en que $m$ es la masa del objeto. Ahora, en el punto más alto de su trayectoria, i.e., en el momento que su velocidad es cero y empieza a caer, su energía es solamente potencial. Si llamamos $h$ a la altura en ese instante (que corresponde a la altura máxima de la trayectoria), la energía del cuerpo es

$$E_f = V_f = m\,g\,h. \tag{10}$$

Como la energía total se conserva (si la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es la gravedad), igualando $E_i$ y $E_f$, de (9) y (10) obtenemos

$$h = \frac{v_0^2}{2\,g}. \tag{11}$$

Otro cálculo que es muy simple usando conservación de energía es el cálculo de la velocidad que adquiere un cuerpo despues de caer una altura $h$ desde el reposo. Si tomamos como nivel de referencia la altura inicial, tanto la energía cinética como la potencial del cuerpo son nulas, i.e.,

$$E_i = 0. \tag{12}$$

Si llamamos $v_f$ a la velocidad que adquiere el cuerpo luego de caer una altura $h$, su energía cinética en ese momento es

$$K_f = \frac{1}{2} m v_f^2, \tag{13}$$

en tanto que su energía potencial es

$$V_f = m\, g(-h) = -m\, g\, h, \tag{14}$$

de modo que su energía total en ese momento es

$$E_f = K_f + V_f = \frac{1}{2} m v_f^2 - m\ g\, h. \tag{15}$$

Como la energía se conserva y la energía inicial era cero, de (15 obtenemos de inmediato

$$v_f = \sqrt{2\, g\, h}, \tag{16}$$

la cual es independiente de la masa del cuerpo que cae (de acuerdo al experimento de Galileo, [**?**]).

Cuando consideramos movimientos de proyectiles en dos dimensiones, no basta utilizar conservación de enrgía para resolver completamente el movimiento. Sin embargo, si sólo actúa la gravedad sobre el proyectil, la componente de la fuerza sobre el proyectil a lo largo de la horizontal es nula. Entonces, de acuerdo a la segunda Ley de Newton, la componente horizontal del momentum lineal del proyectil se conserva. En resumen, en lo que concierne al movimiento de proyectiles en dos dimensiones tenemos dos cantidades conservadas: la energía total y la componente horizontal del momentum lineal. A modo de ejemplo, utilicemos estas dos cantidades conservadas para reencontrar la altura máxima que alcanza un proyectil que es lanzado con velocidad $v_0$ y ángulo de tiro $\theta$. Si elegimos como nivel de referencia de la energía potencial el nivel de lanzamiento, la energía total en el momento de lanzamiento es

$$E_i = K_i = \frac{1}{2} m v_0^2. \tag{17}$$

Por otra parte, la componente horizontal del momento lineal en el momento del lanzamiento es

$$p_i = m\, v_0 \cos\theta. \tag{18}$$

Como la componente horizontal del momentum lineal del proyectil es conservada, la componente horizontal, digamos $v_x$, de su velocidad es conservada y está dada en todo momento por $v_x = v_0 \cos\theta$. En el punto más alto de su trayectoria la componente vertical de su velocidad, digamos $v_y$ es nula, y así la energía cinética del proyectil está dada sólo por

$$K_f \equiv \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}m\,v_0^2\cos^2\theta. \tag{19}$$

Por otro lado, si llamamos $h$ la altura máxima, la energía potencial en el punto más alto de la trayectoria está dada por

$$V_f = m\,g\,h. \tag{20}$$

Por la conservación de la energía, de (17), (19), y (20) obtenemos

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2\theta + m\,g\,h, \tag{21}$$

de donde finalmente reobtenemos

$$h = \frac{v_0^2}{2\,g}\mathrm{sen}^2\theta. \tag{22}$$

## 0.2 Las fuerzas normales y el plano inclinado: revisión

Acabamos de ver que para un cuerpo que solo sufre la fuerza de gravedad la energía es conservada. A medida que avancemos en este capítulo veremos para que otro tipo de fuerzas tendremos una ley de conservación de la energía. Supongamos ahora que además de gravedad un cuerpo está sujeto a una fuerza normal, como es el caso de un bloque que se mueve sobre un plano inclinado. En tal caso la ecuación de movimiento del bloque está dada por

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{N}, \tag{23}$$

en que $\vec{N}$ es la fuerza normal que ejerce el plano sobre el bloque. Podemos repetir el procedimiento utilizado anteriormente, y multiplicar (23) por $\vec{v}$. Obviamente el término de la izquierda dará origen a la derivada de la energía cinética, en tanto que el primer término de la derecha dará origen a menos la derivada de la energía potencial. Finalmente, como el bloque se desliza a lo largo de la superficie del plano inclinado, en todo momento $\vec{v}$ es ortogonal a la normal, i.e., $\vec{v}\cdot\vec{N} = 0$. Entonces, nuevamente tendremos la misma ley de conservación de energía anterior, i.e., (8), con $K$ dado por (3) y $V$ dado por (6). Usando la ley de conservación de energía es simple reobtener la aceleración de un bloque que desliza por un plano inclinado liso (i.e., en ausencia de roce). Utilizando como nivel de referencia de la energía potencial el vértice superior del plano inclinado (ver figura), la energía potencial del bloque estará dada por

$$V = -m\,g\,x\mathrm{sen}\alpha, \tag{24}$$

en que hemos usado el mismo sistema de coordenadas que en la figura (**??**). Por otra parte la energía cinética del bloque está dada por

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \tag{25}$$

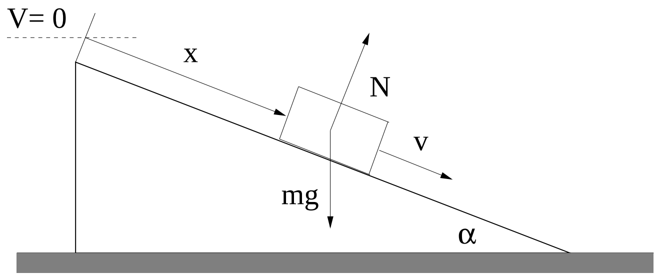


Figure 1: Plano inclinado

de modo que la energía total del bloque es

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - m\, g\, x\, \mathrm{sen}\alpha. \tag{26}$$

Como $E$ es constante, $dE/dt = 0$, de modo que derivando (26) con respecto al tiempo obtenemos

$$m\,(\ddot{x} - g \mathrm{sen}\alpha)\, \dot{x} = 0. \tag{27}$$

El bloque no está inmovil sobre el plano inclinado, i.e., $\dot{x} \neq 0$, y, entonces, de (27) reobtenemos el valor de la aceleración del bloque,

$$\ddot{x} = g\, \mathrm{sen}\alpha. \tag{28}$$

## 0.3 El péndulo simple y las cuerdas ideales; revisión

Algo similar a lo que ocurre con las fuerzas normales ocurre con las tensiones de las cuerdas en el caso de la dinámica de una partícula. Consideremos, por ejemplo, el péndulo simple que discutimos en detalle en el capítulo anterior. De acuerdo al modelo de cuerda ideal, la tensión en la cuerda actúa a lo largo de la cuerda. Como el péndulo efectúa un movimiento circular, perpendicular a la cuerda, el producto $\vec{T} \cdot \vec{v} \equiv 0$ en todo instante, de modo que nuevamente tendremos una ley de conservación de le energía. Si nos referimos a la figura, la ecuación de movimiento del péndulo simple es

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}. \tag{29}$$

Si multiplicamos (29) por $\vec{v}$, el término de la izquierda corresponde a la derivada de la energía cinética del péndulo con respecto al tiempo. El primer término de la derecha corresponde a menos la derivada de la energía potencial del péndulo con respecto al tiempo, y el último término, como hemos notado, es identicamente cero. Así, en este caso también la energía total se conserva. Usando coordenadas polares, tal como lo hicimos en la discusión de la sección (nn), la velocidad de la masa $m$ del péndulo está dada por $\vec{v} = \ell \dot{\theta} \hat{\theta}$, de modo que su energía potencial es

$$K = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2. \tag{30}$$

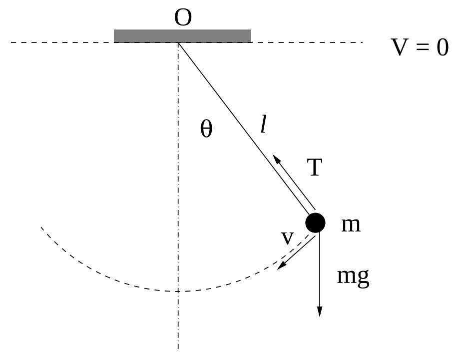


Figure 2: Péndulo simple

Por otra parte, si elegimos el nivel del punto de suspensión del péndulo (i.e., el punto $O$ en la figura (**??**)) como nivel de referencia de la energía potencial, la energía potencial de $m$ está dada por

$$V(\theta) = m\,g\,(-\ell\cos\theta) = -m\,g\,\ell\cos\theta. \tag{31}$$

Como la energíatotal del péndulo es conservada, de (29) y (30) tenemos

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - m\,g\,\ell\cos\theta = E, \tag{32}$$

en que $E$, la energía total del péndulo, es una constante de movimiento cuyo valor depende del estado inicial del péndulo. Si derivamos (32) con respecto al tiempo, usando la regla de la cadena, y simplificando por $\dot{\theta}$ (pues el péndulo está en movimiento y $\dot{\theta} \neq 0$), obtenemos

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\mathrm{sen}\theta = 0, \tag{33}$$

que es precisamente la ecuación de movimiento del péndulo (2–46) que encontramos en el capítulo anterior.

# 1 Balance de energía y trabajo

Luego de haber considerado esta serie de ejemplos, consideremos el caso general de una partícula de masa $m$ sometida a la acción de una fuerza cualquiera $\vec{F}$. De acuerdo a la segunda ley de Newton, su ecuación de movimiento está dada por

$$m\vec{a} = \vec{F}. \tag{34}$$

Procediendo de la manera usual, multipliquemos la ecuación anterior por $\vec{v}$. Entonces, el término de la izquierda es la derivada de la energía cinética con respecto al tiempo. Así obtenemos

$$\frac{d}{dt}K = \vec{F}\cdot\vec{v}, \tag{35}$$

en que $K = m\vec{v}^2/2$. Tal como vimos en el capítulo anterior, la trayectoria $\vec{r}(t)$ de la partícula queda determinada por la ecuación (34) y por las condisciones iniciales (i.e., por los valores de $\vec{r}$ y $\vec{v}$ en el instante inicial). En la figura (**??**) hemos dibujado esquematicamente la trayectoria de la partícula en cuestión. Integremos ahora 35) en el tiempo entre dos instantes cualquiera, digamos $t_1$ y $t_2$. De este modo obtenemos,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} K \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} \, dt. \tag{36}$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, la integral de la izquierda corresponde a

$$K(t_2) - K(t_1), \tag{37}$$

es decir, a la diferencia entre la energía cinética de la parttícula en el instante $t_2$ y la energía cinética de la partícula en el instante $t_1$. Entonces,

$$\Delta K \equiv K(t_2) - K(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} \, dt. \tag{38}$$

De acuerdo a la definición de la velocidad (que hicimos en el capítulo 1), $\vec{v}\, dt = d\vec{r}$, en que $d\vec{r}$ es el vector desplazamiento entre dos puntos cercanos en la trayectoria de la partícula. En rigor, $d\vec{r}$ es tangente a la trayectoria, tal como se ilustra en la figura (**??**)

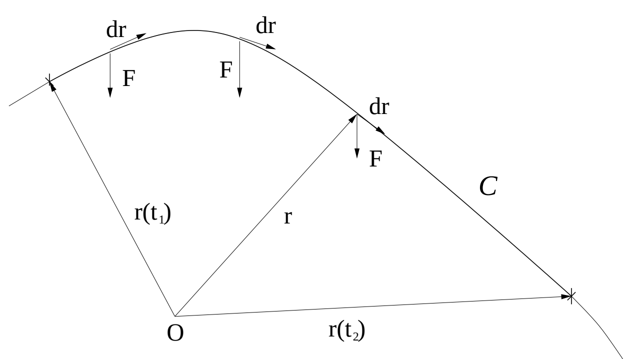


Figure 3: Balance Energía y Trabajo

Con esta observación podemos reescribir el lado derecho de (38) como

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \tag{39}$$

en que hemos llamado $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}(t_1)$ y $\vec{r}_2 \equiv \vec{r}(t_2)$, respectivamente. Observando la estructura de (39) es conveniente definir en general

$$W_{A,B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{40}$$

a lo largo de una curva cualquiera, suave, $\mathcal{C}$, como se ilustra en la figura.

A la cantidad $W_{A,B}$ definida en (40) la llamaremos el *trabajo* que hace la fuerza $\vec{F}$ para llevar a la partícula a lo largo del camino $\mathcal{C}$ desde el punto $A$ hasta el punto $B$. Debemos notar que en general $W_{A,B}$ no depende solamente de los puntos $A$ y $B$ sino que además del camino $\mathcal{C}$.

Utilizando está definición podemos reescribir (38) como

$$\Delta K = K(t_2) - K(t_1) = W_{\vec{r}_1,\vec{r}_2}, \tag{41}$$

es decir, la variación de la energía cinética entre los instantes $t_1$ y $t_2$ es igual al trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ sobre la partícula desde $\vec{r}_1$ hasta $\vec{r}_2$ a lo largo de la trayectoria.

## 2 Potencia

La rapidez con que una fuerza hace trabajo se llama *Potencia.* De acuerdo a (40), el trabajo que realiza una fuerza como función del tiempo está dado por

$$W(t) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}(t)} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \tag{42}$$

en que la integral está calculada a lo largo de la trayectoria de la partícula, $\vec{r}_1$ es un punto fijo cualquiera de la trayectoria y $\vec{r}(t)$ es la posición de la partícula en el instante $t$. W(t) dado por (42) representa el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ entre $\vec{r}_1$ y $\vec{r}(t)$ a lo largo de la trayectoria de la partícula. Derivando (42), usando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \tag{43}$$

de modo que la potencia que realiza $\vec{F}$ está dada por

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \tag{44}$$

*Comentario:* En la sección 7, más adelante, discutimos las unidades usuales de energía y trabajo.

## 3 Dependencia del trabajo en el camino

Como hemos dicho en la sección anterior, dada una fuerza cualquiera, en general el trabajo no solo depende de los puntos $A$ y $B$ sino que además de la trayectoria. A modo de ejemplo, consideremos un *campo de fuerzas* en dos dimensiones dado por

$$\vec{F}(x,y) = 3\,y\hat{\imath} + 2\,x\hat{\jmath}, \tag{45}$$

y calculemos el trabajo que esta fuerza hace para llevar una partícula desde el origen $O = (0,0)$ hasta el punto $B = (1,1)$ a lo largo de los dos caminos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ de la figura. El camino $\mathcal{C}_1$ de la figura consiste en la unión del segmento

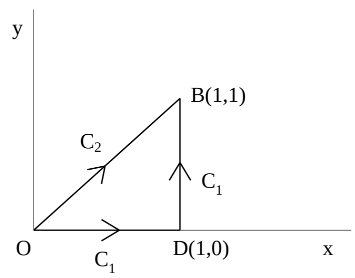


Figure 4: Trabajo a lo largo de dos caminos, $C_1$ y $C_2$

horizontal que va desde $O = (0, 0)$ hasta $D = (1, 0)$ y el segmento vertical que va desde el punto $D = (1, 0)$ hasta $B = (1, 1)$. El segmento horizontal puede ser parametrizado por $\vec{r} = x\hat{\imath}$, con $x$ variando entre 0 y 1. Entonces, sobre ese segmento $d\vec{r} = dx\hat{\imath}$, y $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 3y$. Sin embargo, sobre el segmento horizontal en cuestión $y = 0$, de modo que $\vec{F} \cdot d\vec{r} \equiv 0$ en cada punto del segmento y, de este modo el trabajo que hace $\vec{F}$ desde $O$ hasta $D$ es nulo. Ahora, los puntos del segmento vertical que une $D$ con $B$ pueden ser rotulados por $\vec{r} = 1\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$, con $x = 1$ e $y$ variando entre 0 y 1. Así $d\vec{r} = dy\hat{\jmath}$ y $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 2x\,dy = 2\,dy$, pues $x = 2$ en cada punto del segmento vertical. Entonces,

$$W_{D,B} = \int_0^1 2\,dy = 2, \tag{46}$$

y, como $W_{O,D} = 0$, el trabajo $W_{O,B}$ a lo largo del camino $\mathcal{C}_1$ es 2.

Por otra parte, el camino $\mathcal{C}_2$ es la recta diagonal que une el origen $O$ con el punto $B$. Los puntos de esta diagonal pueden ser rotulados por $\vec{r} = x\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$ (pues sobre la diagonal, $y = x$), de modo que $d\vec{r} = (\hat{\imath} + \hat{\jmath})\,dx$ y $\vec{F} = 5\,x\,dx$. Entonces, el trabajo que hace $\vec{F}$ desde $O$ hasta $B$ por el camino $\mathcal{C}_2$ está dado por

$$W_{O,B} = \int_0^1 5\,x\,dx = \frac{5}{2}, \tag{47}$$

que es distinto al trabajo calculado anteriormente a traves del camino $\mathcal{C}_1$.

Este ejemplo ilustra el hecho que en general el trabajo depende no solo de los puntos inicial y final, sino que además del camino.

# 4 Fuerzas conservativas y el teorema de conservación de la energía

Llamaremos *fuerzas conservativas* a aquellas fuerzas para las cuales el trabajo que ellas realizan entre dos puntos, sólo depende de estos puntos y no del camino que los une. Si recordamos la definición de trabajo dada por (40), y el Teorema Fundamental del Cálculo, para que el trabajo no dependa del camino es suficiente que el producto $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ se pueda escribir como una diferencial exacta, i.e., es suficiente que exista una función $V$ de modo que $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dV$ (aquí hemos introducido el signo menos solo por conveniencia posterior). De existir esta función $V$, que llamaremos genericamente *potencial* o *energía potencial* asociada a la fuerza $\vec{F}$, por el Teorema Fundamental del cálculo tendremos

$$W_{A,B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dV = V(A) - V(B), \tag{48}$$

que explícitamente muestra que el trabajo solo depende de $A$ y $B$ y no del camino. Si $\vec{F}$ deriva de un potencial, utilizando (41), obtenemos

$$E(t_2) \equiv K(t_2) + V(\vec{r}_2) = K(t_1) + V(\vec{r}_1) \equiv E(t_1), \tag{49}$$

en que hemos definido, tal cual lo hicimos en los ejemplos preliminares, la energía total $E$ como la suma $K + V$. Así, si $\vec{F}$ deriva de un potencial, tenemos una ley de conservación de la energía, dada por (49).

El criterio de *intregrabilidad* para ver si $\vec{F}$ deriva de un potencial es relativamente simple de derivar. Escribiendo el producto $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ en coordenadas cartesianas tenemos

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz. \tag{50}$$

Por otra parte, para cualquier función $V(\vec{r}) = V(x, y, z)$ que sea diferenciable y cuyas primeras derivadas sean continuas, por la regla de la cadena tenemos

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz. \tag{51}$$

Exigiendo $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dV$, y comparando (50) y (51), notando que los incrementos $dx$, $dy$, y $dz$ son arbitrarios tenemos de inmediato que una condición suficiente para que $\vec{F}$ sea conservativa es que

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = F_x, \tag{52}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = F_y, \tag{53}$$

y

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = F_z. \tag{54}$$

Si $V$ es diferenciable dos veces y las derivadas segundas son continuas entonces, el orden de las derivadas no altera el resultado, i.e.,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}. \tag{55}$$

Esta condición impone una restricción fuerte sobre $\vec{F}$. En efecto, de (52), (53) y (**??**) tenemos que para que $\vec{F}$ derive de un potencial es necesario que

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \tag{56}$$

y que se satisfagan relaciones análogas para el resto de las derivadas.

Nótese que para el ejemplo de la sección anterior, i.e., para $\vec{F} = 3y\hat{\imath} + 2x\hat{\jmath}$, $F_x = 3y$, y, $F_y = 2x$, de modo que

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 3 \neq 2 = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \tag{57}$$

de modo que la fuerza $\vec{F}$ del ejemplo no deriva de un potencial, lo que era de esperarse pues vimos que el trabajo realizado por esa fuerza depende del camino.

Como vimos en la primera sección de este capítulo, el peso, i.e., $\vec{F} = m\vec{g}$ es una fuerza conservativa, que deriva de la función potencial

$$V = m\, g\, z. \tag{58}$$

Otro caso de interes dentro de las fuerzas conservativas lo constituyen las fuerzas armónicas (e.g., un caso especial de fuerza armónica lo constituyen los resortes que vimos en el capítulo 2). En efecto, si

$$\vec{F} = -k\vec{r}, \tag{59}$$

tenemos

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -k\vec{r} \cdot d\vec{r} = -d\left(\frac{1}{2}k\vec{r}^2\right) \tag{60}$$

de modo que las fuerzas armónicas son conservativas y derivan del potencial

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}k\vec{r}^2. \tag{61}$$

Para el caso particular de un resorte en que $F(x) = -k(x - \ell_0)$, el potencial asociado es

$$V(x) = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2. \tag{62}$$

## 5 Fuerzas no conservativas: Balance Energía–Trabajo

Las fuerzas que no derivan de un potencial y, para las cuales el trabajo depende del camino, las llamaremos *fuerzas no conservativas* (el nombre, obviamente se debe a que para tales fuerzas no existe una ley de conservación de la energía). Los ejemplos más clásicos de fuerzas no conservativas son las fuerzas de roce dinámico y la fuerza de roce viscoso. Si sobre un cuerpo actúan tanto fuerzas conservativas como no conservativas, podemos ciertamente escribir

$$m\vec{a} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}, \tag{63}$$

en que $\vec{F}_c$ denota la suma de todas las fuerzas conservativas, y $\vec{F}_{nc}$ da cuenta de todas las fuerzas no conservativas que actúan sobre el cuerpo. Multiplicando (63) por $\vec{v}$ y procediendo como antes obtenemos

$$\frac{d}{dt}(K + V) = \vec{F}_{nc} \cdot \vec{v}, \tag{64}$$

en que $K$ es la energía cinética del cuerpo y $V$ la energía potencial asociada a las fuerzas conservativas. Integrando (64) entre dos instantes cualquiera $t_1$ y $t_2$, obtenemos el siguiente balance entre diferencia de energía y trabajo,

$$\Delta E \equiv E(t_2) - E(t_1) = W_{\vec{r}_1,\vec{r}_2}, \tag{65}$$

en que $E = K + V$ es la energía total del cuerpo, y $W$ es el trabajo que hacen las fuerzas no conservativas sobre el cuerpo, a lo largo de la trayectoria del mismo, entre los puntos $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ y $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$. Esta expresión generaliza el resultado (38) que habíamos visto anteriormente.

# 6 Conservación de energía para sistemas de dos y más partículas

Consideremos ahora dos cuerpos que interactúan entre sí y que además estan sufren la acción de sendas fuerzas externas. Las ecuaciones de movimiento de estos cuerpos pueden ser escritas como

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{1e}, \tag{66}$$

y

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{2e}, \tag{67}$$

en que, de acuerdo a nuestra convención, $\vec{F}_{12}$ es la fuerza que el cuerpo 2 ejerce sobre el cuerpo 1, $F_{1e}$ es la fuerza externa (al sistema 1–2) actuando sobre 1, etc. De acuerdo al principio de acción y reacción $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Si ahora multiplicamos (66) por $\vec{v}_1$ y (67) por $\vec{v}_2$ y sumamos, recordando lo visto en las secciones anteriores, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(K_1 + K_2) = \vec{F}_{12} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + \vec{F}_{1e} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_{2e} \cdot \vec{v}_2. \tag{68}$$

Aquí $K_1 = m_1\vec{v}_1^2/2$ y $K_2 = m_2\vec{v}_2^2/2$ son las energías cinéticas de los cuerpos 1 y 2 respectivamente.

De aquí en adelante debemos distinguir diversas situaciones, de acuerdo a los distintos tipos de interacción posibles entre los cuerpos. Sin embargo, en el resto de esta sección solo consideraremos ya sea fuerzas conservativas o fuerzas de ligazón (normales y tensiones).

Distingamos los siguientes casos:

a) La fuerza de interacción entre los cuerpos es una fuerza de reacción normal. En este caso, $\vec{F}_{12}$ es ortogonal al desplazamiento relativo entre los dos cuerpos, i.e., $\vec{F}_{12} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 0$, de modo que (69) se reduce a

$$\frac{d}{dt}(K_1 + K_2) = \vec{F}_{1e} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_{2e} \cdot \vec{v}_2. \tag{69}$$

Si las fuerzas externas son conservativas, entonces tanto $\vec{F}_{1e}$ como $\vec{F}_{2e}$) derivan de un potencial, y podemos escribir

$$\vec{F}_{1e} \cdot \vec{v}_1 = \frac{d}{dt}(V_{1e}), \tag{70}$$

y

$$\vec{F}_{2e} \cdot \vec{v}_1 = \frac{d}{dt}(V_{2e}), \tag{71}$$

de modo que (69) se puede escribir finalmente como una ley de conservación, i.e., la energía total del sistema

$$E \equiv K + V, \tag{72}$$

es constante. En (72), $K = K_1 + K_2$ y $V = V_{1e} + V_{2e}$, i.e., tanto la energía cinética como la energía potencial son aditivas.

b) Los cuerpos en cuestión están unidos por cuerdas ideales, como en las clásicas máquinas de Atwood. En este caso, como las cuerdas ideales son extensibles, la posición relativa entre los cuerpos es constantes de modo que $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \equiv 0$ en (69), así es que tal como en el caso anterior somos conducidos a la misma ley de conservación de energía (72).

c) Los cuerpos están unidos mediante resortes ideales. En este caso, la fuerza mútua entre los cuerpos es de la forma está dirigida a lo largo de la línea que une los cuerpos y su magnitud es de la forma

$$|\vec{F}_{12}| = k||\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - \ell_0|, \tag{73}$$

en que $k$ es la constante elástica del resorte y $\ell_0$ su largo natural. Introduciendo esta información en (69), vemos que el primer término del lado derecho de esa ecuación se puede escribir como

$$\vec{F}_{12} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = -\frac{d}{dt}V_{12}, \tag{74}$$

en que

$$V_{12} = \frac{1}{2}k(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - \ell_0)^2, \tag{75}$$

representa el potencial de interacción entre los dos cuerpos; la interacción mútua entre los cuerpos se debe al resorte, y $V_{12}$ representa una energía potencial interna del sistema de los dos cuerpos. De este modo, si $\vec{F}_{1e}$ y $\vec{F}_{2e}$ son conservativas, utilizando (75), obtenemos una ley de conservación de la energía de la forma

$$E = K_1 + K_2 + V_{12} + V_{1e} + V_{2e} = \text{constante}, \tag{76}$$

en que $V_{12}$ corresponde a la energíapotencial interna del sistema y, tal como antes $V_{1e}$ y $V_{2e}$ corresponden a los potenciales asociados a las fuerzas externas.

Para un sistema de $N$ cuerpos se puede proceder en forma enteramente análoga, y concluir con una ley de balance energía–trabajo de la forma

$$\Delta E = W, \tag{77}$$

en que la energía $E$ del sistema está dada por

$$E = K + V, \tag{78}$$

donde $K$ es la energía cinética del sistema de $N$ partículas, la cual es aditiva, i.e.,

$$K = \sum_{i=1}^{N} K_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 . \tag{79}$$

La energía potencial $V$ es típicamente de la forma

$$V = \sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{ij} + \sum_{i=1}^{N} V_{i,e} , \tag{80}$$

en que el primer término de la suma representa la energíapotencial interna del sistema, en tanto que el segundo término representa la energía potencial asociada a las fuerzas externas conservativas que actúan sobre el sistema. Finalemente, en (77), $W$ representa el trabajo total que hacen todas las fuerzas no conservativas (tanto internas como externas) sobre el sistema.

# 7 Unidades

Como hemos visto a través del presente capítulo, tanto la energía como el trabajo tienen las mismas unidades. Como el trabajo es el producto de una fuerza por un desplazamiento, las unidades de trabajo en el Sistema Internacional de Unidades corresponden a [N–m]. A esta unidad se la conoce comunmente como *Joule* (en honor a James Prescott Joule (1818–1889). Así, típicamente en el Sistema Internacional de Unidades se habla mas bien de joules que de Newton–metro. A partir de la unidad de energía podemos derivar de inmediato la unidad de potencia, i.e., de trabajo por unidad de tiempo. Entonces la unidad de potencia en el Sistema Internacional de Unidades es [joule/seg] que comunmente se deomina *watt* en honor al inventor de la máquina de vapor James Watt (1736–1818). Existen varias otras unidades prácticas de energía, que son de uso frecuente. A partir de la relación entre potencia y trabajo vemos que una posible unidad de trabajo es el *watt–hora* [wh] que por supuesto equivale a 3.600 [joules]. Del mismo modo, el *kilowatt hora* [kwh] es una unidad de trabajo que equivale entonces a 1000 [wh], i.e., a $3,6 \times 10^6$ [joules]. Otra unidad de potencia de uso frecuente es el [hp], i.e., *horse power*, que equivale aproximadamente a $745,7$ [w]. Otra unidad de energía de uso frecuente es la *caloría* [cal] que equivale aproximadamente a $4,184$ [joules]. La "caloría" que se usa conmunmente en la descripción del contenido energético de los alimentos en realidad corresponde a mil calorías, i.e., a una [kcal] $\approx 4.184$ [joules].

# 8 Ejemplos

Al principio de este capítulo ya vimos varios ejemplos del uso de la ley de conservación de energía para resolver problemas simples de movimiento de una partícula. A continuación veremos algunas aplicaciones adicionales.

*Ejemplo 1: La máquina de Atwood: revisión.*

Como primera aplicación, regresemos al problema de la máquina de Atwood que vimos en el capítulo 2 (ver figura). La máquina de Atwood es un sistema de dos cuerpos en que actúa la gravedad como fuerza externa, y la tensión en la cuerda como fuerza interna. La gravedad es una fuerza conservativa, y la tensión no hace trabajo sobre el sistema total (ciertamente hace trabajo sobre cada uno de los cuerpos, pero la suma de los trabajos que hace sobre las dos masas es nulo). Entonces la energíatotal del sistema se conserva. La energía cinética del sistema

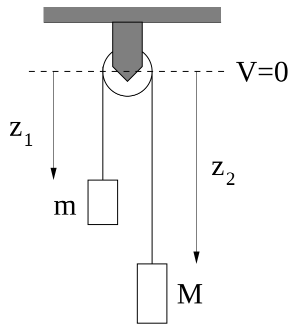


Figure 5: Máquina de Atwood

está dada por

$$K = \frac{1}{2} m \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} M \dot{z}_2^2. \tag{81}$$

Por otra parte, si tomamos el nivel del eje de la polea como nivel de referencia de la energía potencial, la energía potencial del sistema está dada por

$$V = -m\, g\, z_1 - M\, g\, z_2. \tag{82}$$

Entonces, la energía total del sistema está dada por

$$E = \frac{1}{2} m \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} M \dot{z}_2^2 - m\, g\, z_1 - M\, g\, z_2. \tag{83}$$

Como la cuerda que une las dos masas es una cuerda ideal,

$$z_1 + z_2 = d, \tag{84}$$

en que $d$ es una constante (básicamente el largo de la cuerda). Derivando (84) con respecto al tiempo tenemos

$$\dot{z}_2 = -\dot{z}_1. \tag{85}$$

Reemplazando (84) y (85 en la expresión de la energía (83, obtenemos

$$E = \frac{1}{2}(m + M)\dot{z}_1^2 + g(M - m)\, z_1 - M\, g\, d. \tag{86}$$

Derivando esta última expresión con respecto al tiempo, luego dividiendo por $\dot{z}_1$ (que es distinto de cero pues las masas están en movimiento), encontramos de una vez,

$$\ddot{z}_1 = \frac{m - M}{m + M} g, \tag{87}$$

que es la misma expresión que habíamos obtenido anteriormente (ver ecuaciones (2–21) y (2–22)).

*Ejemplo 2: Una máquina de Atwood más compleja.*

Consideremos ahora la máquina de Atwood de la figura. Esta consiste en un bloque de masa $M$ que descansa sobre una superficie horizontal rugosa, de coeficiente de roce dinámico $\mu$, y un bloque de masa $m$ que se mueve verticalmente sujeta a una polea ideal (sin masa y sin roce) como se indica en la figura. Si el sistema parte del reposo se pide calcular la velocidad de $m$ luego que $M$ ha recorrido una distancia $d$ sobre la mesa. Este sistema también consiste en dos

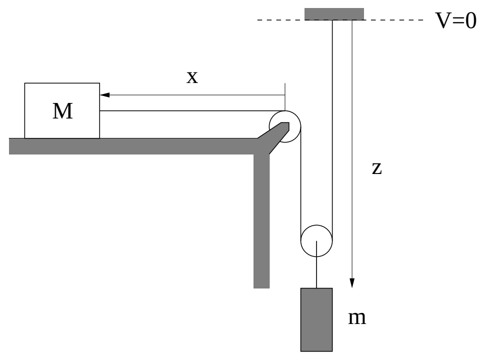


Figure 6: Máquina de Atwood más compleja

cuerpos, pero esta vez tenemos fuerzas conservativas (la gravedad) y no conservativas (el roce). Tomemos como nivel de referencia de la energía potencial el nivel de la siperficie horizontal. Si en el momento inicial la masa $m$ está a una distancia $\ell$ por debajo de la superficie horizontal, la energía inicial del sistema es simplemente

$$E_i = -m\,g\,\ell. \tag{88}$$

Llamemos $z$ a la distancia por debajo de la mesa de la masa $m$ (e.g., $z(0) = \ell$ y $x$ a la distancia de $M$ desde el vértice de la mesa (ver figura). Entonces, como se trata de una cuerda ideal, $2z + x$ es constante, y en particular,

$$2\,z + x = 2\,\ell + x(0), \tag{89}$$

en que $x(0)$ es la posición inicial de $M$. Derivando (89) con respecto al tiempo se tiene

$$2\,v + \dot{x} = 0, \tag{90}$$

en que hemos llamado $v = \dot{z}$ a la velocidad de $m$. De (89) vemos que en el momento que $M$ se ha desplazado una distancia $d$, i.e., cuando $x = x(0) - d$, la nueva posición de $m$ es

$$z_f = \ell + \frac{d}{2}. \tag{91}$$

Si llamamos $v_f$ a la velocidad de $m$ en ese momento, la velocidad de $M$ en el mismo instante es $-2v_f$ como se desprende de (90). Entonces la energía cinética del sistema en ese instante es

$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}4\,Mv_f^2 = \frac{1}{2}(m + 4M)v_f^2. \tag{92}$$

Por otra parte la energía potencial en ese mismos instante es, utilizando (91),

$$V_f = -m\,g\,z_f = -mg\ell - mg\frac{d}{2}, \tag{93}$$

de tal modo que la energía total en ese instante es

$$E_f = K_f + V_f = \frac{1}{2}(m+4M)v_f^2 - mg\ell - mg\frac{d}{2}. \tag{94}$$

De acuerdo a la ecuación de balance de energía trabajo, la perdida de energía del sistema es igual al trabajo realizado por el roce, i.e.,

$$E_i - E_f = W = F_r\,d = \mu\,M\,g\,d. \tag{95}$$

Finalmente, de (88), (94) y (95) obtenemos,

$$v_f = \sqrt{\frac{gd(m-2\mu)\,M}{m+4M}} \tag{96}$$

*Ejemplo 3: Amortiguamiento de un resorte debido a la fuerza de roce.*

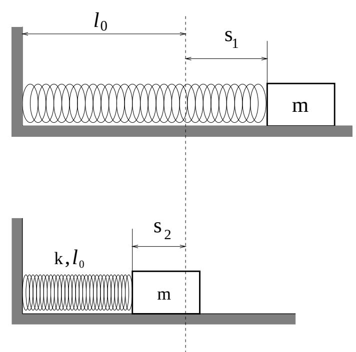


Figure 7: Amortiguamiento de un resorte debido a la fuerza de roce.

# 9 Problemas

42. Considere dos bloques unidos por una cuerda como se indica en la figura. Si los bloques se sueltan del reposo, calcule, usando trabajo y energía, la velocidad común de los bloques cuando éstos han recorrido una distancia $d$. El coeficiente de roce cinético entre la mesa y $m_1$ es $\mu$.

43. La cuerda de la figura tiene una longitud de $120[cm]$, y la distancia $d$, desde el punto $O$ al tope $P$ es de $75[cm]$. Cuando la bola se suelta desde el reposo en la posición indicada en la figura, se moverá a lo largo de la curva punteada. ¿ Cuál

es la velocidad de la bola cuándo pasa por el punto más bajo de su trayectoria? ¿ Cuál es la velocidad de la bola cuándo pasa por el punto más alto, luego que la cuerda se enrolla en el tope $P$? trayectoria?

44. Un bloque pequeño de masa $m$ desliza a lo largo del circuito, sin roce, de la figura. El bloque se suelta desde el reposo en el punto $P$. ¿ Cúal es la fuerza resultante en el punto $Q$? ¿ Cuál es la altura mínima, medida desde la base del circuito, necesaria para que el bloque no se desprenda del circuito durante su recorrido por él?

45. Se arroja una piedra de masa $m$ verticalmente hacia arriba, con una velocidad $v_0$. Una fuerza constante $f$ debida a la resistencia con el aire actúa sobre la piedra durante su vuelo. Calcule, usando energía y trabajo, la altura máxima alcanzada por la piedra? Calcule la velocidad de la piedra una vez que ésta regresa al punto de partida.

46. Considere el campo de fuerzas definido por la expresión $\vec{F} = x(y^2 + z^2)\hat{\imath} + y(x^2 + z^2)\hat{\jmath} + z(x^2 + y^2)\hat{k}$. ¿ Es éste un campo de fuerzas conservativo?

47. Un esquiador parte del reposo en $A$ y desliza con poco roce hasta la posición horizontal de despegue en $B$. Aterriza en la ladera de $45°$ a una distancia $s$ de la base del trampolín. Calcule el valor máximo posible de $s$ que se podría alcanzar si el rozamiento del esquí y la resistencia del aire fuesen nulos.

48. El dispositivo de la figura a) se utiliza para disparar un objeto según se muestra en la figura b). Suponga que la constante del resorte del dispositivo es $k$ y que inicialmente éste se comprime en una longitud $d$. ¿ Qué distancia alcanza el objeto?

49. En el sistema de la figura el carro de masa $m$ es impulsado por el resorte de constante elástica $k$. ¿ En cuanto es necesario comprimir el resorte para que el carro recorra el círculo de radio $R$ sin nunca abandonar los rieles?

50. Un sistema se compone de dos resortes unidos, cuyas constantes son $k_1$ y $k_2$. Encuentre el trabajo que es necesario hacer para estirar el sistema en una longitud $\Delta\ell$, cuando los resortes están unidos en
a) serie,
b) paralelo.

51. La central hidroeléctrica Pangue estará ubicada en el río Bío–Bío a $87[kms]$ al sureste de la ciudad de Los Angeles, y se puso en marcha en abril de 1997. Su altura de caída bruta es de $100[m]$ y el caudal de diseño de $500[m^3]$. Si la potencia eléctrica generada será de 450 Megawatts, ¿ cuál es la eficiencia de la central?

52. En la figura adjunta la masa $m = 1kg$ se encuentra en una posición tal que el resorte $A$ está comprimido en $10cm$ mientras que el resorte $B$ tiene un largo que excede en $5cm$ su largo natural. Calcule la máxima velocidad que adquiere la masa $m$ una vez que se la suelta de esa posición. Suponga un coeficiente de

roce igual a 0.2 entre la masa y la superficie. Los coeficientes elásticos de los resortes $A$ y $B$ son $40N/m$ y $20N/m$ respectivamente.

53. Considere un bloque de masa $M$ sujeto a un resorte vertical de constante $k$ y de largo natural $l_0$. Sobre el bloque se coloca una partícula de masa $m$. Suponga que inicialmente se comprime el resorte en una distancia $d$ con respecto a la posición de equilibrio del sistema. Calcule la altura máxima (sobre el suelo) que alcanza la masa $m$ una vez que se libera el resorte.

54. Considere dos bloques de masa $m$, unidos por un resorte de constante elástica $k$. El sistema formado por los dos bloques y el resorte descansa en forma vertical sobre una mesa, tal como se indica en la figura. ¿En cuánto se debe comprimir el resorte con respecto al largo natural para que al soltar el sistema, éste eventualmente despegue de la mesa?

55. Para el instante representado en la figura la masa $M$ está detenida mientras que la masa $m$ se desplaza con una velocidad $v_0$ y el resorte tiene su largo natural $\ell_0$. Si el coeficiente de roce dinámico es $\mu_d$ y el estático es $\mu_e$, y la constante del resorte es $k$,
a) Determine la compresión máxima del resorte para que $M$ no deslice.
b) ¿ cuál es el valor de $v_0$ si $M = 2m$, $\mu_e = 2\mu_d = 1$, y $M$ no desliza?

56. Los bloques representados en la figura, de igual masa $m$, están unidos a los extremos de un resorte ideal de constante $k$. Los bloques, que partieron juntos del reposo desde la posición en que $x = 0$, deslizan con roce despreciable por los planos que tienen el mismo ángulo de inclinación. Si el resorte está sin deformar en la posición en que $x = 0$, determine:
a) la posición de los bloques cuando el resorte alcanza la máxima compresión;
b) la rapidez máxima de los bloques y la posición en que la alcanzan.

57. Un objeto de masa $m$ se ata al extremo de una cuerda y se coloca sobre una rampa sin roce inclinada en un ángulo $\theta$ con respecto a la horizontal. El otro extremo se fija a un punto de la rampa y el objeto describe una trayectoria circular de radio $R$, de tal modo que la tensión de la cuerda en el punto más bajo es $T$.
a) Encuentre el módulo de la velocidad en el extremo más bajo.
b) Encuentre el módulo de la velocidad en el extremo más alto.
c) Encuentre la tensión de la cuerda en el extremo más alto.

58. Un bloque de masa $m$ desliza sin roce por una rampa cuya forma está definida por la ecuación:

$$(\frac{x-a}{a})^2 + (\frac{y-b}{b})^2 = 1$$

partiendo del reposo en el punto $A$. Al alcanzar el punto $B$ la masa desliza sobre una superficie horizontal rugosa de largo $d$ y choca luego con los dos resortes. Como resultado del impacto, la masa se detiene cuando los resortes se comprimen una distancia $s$. Considerando que la constante elástica de ambos resortes es $k$ calcule el coeficiente de roce dinámico entre la masa y la superficie horizontal rugosa.

59. El motor de un barco de 30 [Ton] entrega una potencia constante de $15[kW]$ (aproximadamente 20 [hp]), que Ud. puede considerar independiente de la velocidad con que se desplaza el barco en el agua. Si la fuerza de roce entre el barco y el agua es proporcional a la velocidad del barco, con una constante de proporcionalidad de 150 [Kg/s], encuentre (a) la velocidad límite del barco; (b) la velocidad del barco en función del tiempo, suponiendo que el barco parte del reposo en $t = 0$ (para ésto le puede resultar más simple resolver para $v^2$) y (c) el tiempo que demora el barco en que el cuadrado de su velocidad alcance un valor $1/e$ veces menor que su valor límite.

George Atwood (1745-1807) físico inglés. Se graduó en Trinity College, Universidad de Cambridge en 1769. Es autor del libro *A Treatise on the Rectilinear Motion ....*, publicado en 1784, que es un texto de mecánica newtoniana. En dicho libro describe la máquina que ahora lleva su nombre, con el objeto de ilustrar las leyes vde movimiento uniformemente acelerado debido a la gravedad. También escribió trabajos sobre la estabilidad de barcos, sobre la construcción de arcos y sobre el diseño de un nuevo puente de hierro en Londres, sobre el río Támesis.