1 Choque entre dos partículas

En este capítulo consideraremos la colisión entre dos partículas. Para empezar consideraremos el choque de dos cuerpos en una dimensión, y luego veremos colisiones en el plano. Consideremos pues dos cuerpos que se desplazan a lo largo de una misma línea recta. Llamemos m_1 y m_2 a las masas de los cuerpos. En el caso de un choque, las fuerzas internas entre los cuerpos que chocan (fuerzas normales o de reacción entre los cuerpos) son muy grandes comparadas con las posibles fuerzas (e.g., el peso) que actúan sobre ellas. Además el choque ocurre en un tiempo muy breve. Así pues podemos despreciar la acción de cualquier fuerza externa sobre las partículas. Como solo consideraremos las fuerzas de reacción interna entre los cuerpos que chocan, el momentum lineal total del sistema se conserva durante el choque, i.e., el momentum lineal total justo antes del choque es igual al momentum lineal total del sistema justo después del choque.

Como discutiremos primero choques unidimensionales, todas las cantidades como velocidades y momenta que consideraremos son escalares.

Llamemos v_1 y v_2 a las velocidades de las partículas de masa m_1 y m_2 respectivamente, justo antes del choque. Por su parte, llamemos v_1' y v_2' a las velocidades de las mismas partículas justo después del choque. Como hemos argumentado, el momentum lineal del sistema de dos partículas se conserva, de modo que

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'. \tag{1}$$

A partir de ete punto distinguiremos dos tipos de colisiones *elásticas* e *inelásticas*. Diremos que un choque es elástico si se conserva la energía cinética del sistema durante el choque. De lo contrario diremos que la colisión es inelástica.

Veamos primero las colisiones elásticas.

En términos de las variables que introdujimos más arriba, la conservación de energía cinética durante el choque se expresa como

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 {v'}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 {v'}_2^2. \tag{2}$$

El sistema (1), (2) es un sistema de dos ecuaciones algebraicas para las incógnitas v_1', v_2' que son las velocidades de los cuerpos justo después del choque. La forma más simple de resolver este sistema consiste en reescribir las dos ecuaciones anteriores, de modo que todas las cantidades que involucran a una misma partícula se encuentren al mismo lado de cada ecuación, es decir

$$m_1(v_1 - v_1') = -m_2(v_2 - v_2'), \tag{3}$$

y

$$m_1(v_1^2 - {v'}_1^2) = -m_2(v_2^2 - {v'}_2^2), \tag{4}$$

respectivamente. Nótese que hemos simplificado el factor $1/2$ en la última ecuación. Ahora podemos dividir la ecuación (4) por la ecuación (3). Al dividir debemos tener en consideración dos posibilidades. O el factor $v_1 - v_1' = 0$ (y por lo tanto lo mismo ocurre con el término análogo que atañe a la partícula 2), ó es diferente de cero. Dicho factor es cero cuando las dos partículas en efecto no colisionan (porque una no alcanza a la otra), y por lo tanto las velocidades de cada una de ellas no cambia. Por lo tanto, si efectivamente ocurre la colisión, el factor en cuestión es no nulo, y lo podemos simplificar al dividir, de modo que obtenemos

$$v_1 + v_1' = +(v_2 + v_2'). \tag{5}$$

Podemos reescribir esta última ecuación como

$$v_2 - v_1 = -(v_2' - v_1'). \tag{6}$$

La cantidad $|v_2 - v_1|$ representa la rapidez relativa de la partícula 2 con respecto a la partícula 1. Podemos interpretar entonces (6) como la conservación de la rapidez relativa entre las partículas durante el choque. Finalemente resolvemos (3) y (4) para v_1' y v_2' (estas son ahora dos ecuaciones lineales). Resolviendo obtenemos,

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \tag{7}$$

y

$$v_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \tag{8}$$

respectivamente.

Comentarios:

i) Uno puede concluir de inmediato a partir de estas dos expresiones que si las masas de las partículas son iguales (i.e., si $m_1 = m_2$), entonces las partículas durante el choque intercambian sus velocidades, i.e., $v_2' = v_1$ y $v_1' = v_2$ respectivamente.

ii) También uno puede comprobar de (7) y (8), que de acuerdo a la intuición, si 2 está en reposo originalmente y es mucho mas masiva que 1 (i.e., $m_2 \gg m_1$), entonces 2 sigue en reposo después del choque y m_1 invierte su velocidad, i.e., $v_1' = -v_1$. Esto es lo que ocurre, por ejemplo cuando una partícula choca contra una pared.

1.1 Choque plástico en una dimensión

En la sección anterior hemos resuelto completamente el choque elástico en una dimensión. Antes de analizar los choques inelásticos en general conviene discutir otro caso extremo, que se conoce como *choque plástico*. En el choque plástico ambas partículas quedan pegadas (i.e., siguen juntas) después del choque. En este tipo de choques no se conserva la energía. De hecho es muy simple calcular la perdida de energía.

Como en la sección anterior, consideremos dos partículas de masas m_1 y m_2 respectivamente que se mueven a lo largo de la misma línea, con velocidades v_1 y v_2 respectivamente. Llamemos v_f a la velocidad común de las partículas justo después del choque. Aplicando conservación del momentum lineal, del sistema tenemos

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_f. \tag{9}$$

Entonces, la velocidad v_f está dada por

$$v_f = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{10}$$

La energía cinética inicial es

$$K_i = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2\right), \tag{11}$$

en tanto que la energía cinética después del choque está dada por

$$K_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 = \frac{1}{2}\frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2}. \tag{12}$$

La pérdida de energía cinética durante el choque, $\Delta K = K_i - K_f$, queda dada por

$$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1)^2. \tag{13}$$

La cantidad $\mu \equiv m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ aparece a menudo en sistemas de dos partículas y se conoce como la *masa reducida* del sistema. Por otra parte $v_r \equiv v_2 - v_1$ es la velocidad relativa entre las partículas antes del choque. En términos μ y v_r, la pérdida de energía se expresa simplemente como

$$\Delta K = \frac{1}{2}\mu v_r^2. \tag{14}$$

Esta pérdida de energía se transforma en un cambio de la energía interna del sistema (e.g., deformaciones de los cuerpos) o simplemente se disipa en forma de calor.

1.2 Choque inelástico en una dimensión: coeficiente de restitución

En un choque inelástico se conserva el momentum lineal pero hay pérdida de energía. Llamemos Q a la pérdida de energía cinética durante el choque. Usaremos la misma notación que al principio del capítulo. Entonces, la conservación del momentum lineal queda expresada por (1) en tanto que el balance de energía toma ahora la forma

$$\frac{1}{2}m_1 {v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_2}^2 = \frac{1}{2}m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_2'}^2 + Q, \tag{15}$$

donde, como hemos dicho, Q representa la energía cinética perdida en el choque. Si $Q = 0$, el choque es elástico, si $Q > 0$, como suele suceder, parte de la energía cinética se pierde en el choque, en forma de calor o en un aumento de la energía interna del sistema. El momentum se conserva debido a que durante el choque no actúan fuerzas externas, ésto implica que el momentum del centro de masa de las partículas se conserva. Por esto conviene introducir como variables la velocidad del centro de masa (CM) y la velocidad relativa de las partículas. La velocidad del centro de masas es

$$V_{CM} \equiv \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1 + m_2}, \tag{16}$$

en que la última igualdad sigue de la conservación del momentum lineal. Por otra parte las velocidades relativas de las partículas, antes y despues del choque son,

$$v_r \equiv v_1 - v_2 \tag{17}$$

y

$$v'_r = v'_1 - v'_2, \tag{18}$$

respectivamente.

Mediante álgebra elemental encontramos que,

$$v_1 = V_{CM} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_r,$$

y

$$v_2 = V_{CM} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_r.$$

De la misma forma, después del choque,

$$v'_1 = V_{CM} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v'_r,$$

y

$$v'_2 = V_{CM} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v'_r.$$

Utilizaremos estas expresiones para las velocidades de las partículas en la ecuación (2) para el balance de enrgía cinética. Un cálculo directo nos muestra que

$$\frac{1}{2} m_1 {v_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2}^2 = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{M} v_r^2,$$

donde $M = m_1 + m_2$, y una expresión análoga vale después del choque. Entonces la ecuación (2) se escribe como

$$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{M} v_r^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{M} {v'_r}^2 + Q$$

o, lo que es lo mismo,

$$v_r^2 = {v'_r}^2 + \frac{2MQ}{m_1 + m_2}$$

que es la expresión que buscábamos. Si el choque es elástico, $Q = 0$ y las velocidades relativas de las partículas son iguales antes y después del choque. Si el choque es inelástico y se pierde energía cinética, $Q > 0$ y

$$|v'_r| < |v_r|. \tag{19}$$

El *coeficiente de restitución*, e, se define como el cuociente

$$e \equiv \frac{|v'_r|}{|v_r|}. \tag{20}$$

De acuerdo a (19) y a la definición del coeficiente de restitución, $0 \leq \leq 1$. El caso $e = 1$ corresponde al choque elástico, en tanto que el caso $e = 0$ corresponde al choque plástico.

2 Choque elástico en dos dimensiones.

En esta sección vamos a considerar una caso especial de choque elástico en dos dimensiones. Vamos a estudiar el choque de una partícula móvil, que llamaremos proyectil, contra un blanco fijo.

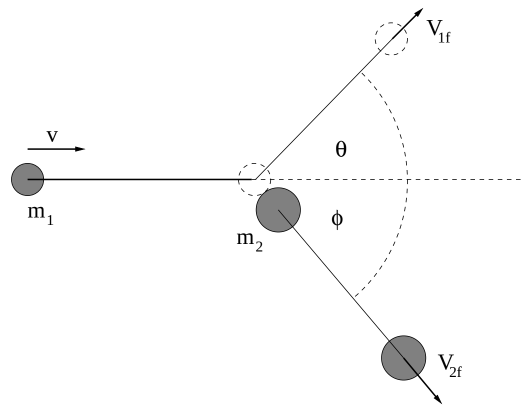

Figure 1: Choque elástico en dos dimensiones

Consideremos entonces el sistema de la figura, en que el proyectil, de masa m_1 y velocidad v incide sobre un blanco fijo de masa m_2. Llamemos, v_{1f} y v_{2f} las magnitudes de las velocidades del proyectil y del blanco, respectivamente, después del choque. Llamemos también θ al angulo, medido con respecto a la dirección inicial del movimiento del proyectil, con que emerge el proyectil luego del choque. Finalmente llamemos ϕ al ángulo con que emerge el blanco, medido también con respecto a la línea de incidencia del proyectil. Tenemos entonces cuatro variables que determinar, i.e., las dos velocidades y los dos ángulos. Tres de estas cantidades quedan determinadas por consideraciones cinemáticas: la conservación de momentum lineal y la conservación de la energía cinética. La cuarta incógnita quedará determinada por las características específicas de la interacción entre las partículas en el momento del choque. Empecemos por imponer las leyes de conservación. Si elegimos ejes coordenados cartesianos en el plano, con el eje x coincidiendo con la dirección incidente del proyectil, y el origen coincidiendo con la posición inicial del blanco fijo (ver figura)

Usando estas coordenadas, las leyes de conservación del momentum lineal se pueden expresar del modo siguiente: i) la conservación del momentum lineal a lo largo del eje x queda dada por

$$m_1 v = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi. \tag{21}$$

ii) La conservación del momentum a lo largo del eje y se expresa como

$$0 = m_1 v_{1f} \mathrm{sen}\theta - m_2 v_{2f} \mathrm{sen}\phi. \tag{22}$$

Como el choque es elástico, se conserva la energía cinética y así tenemos,

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2. \tag{23}$$

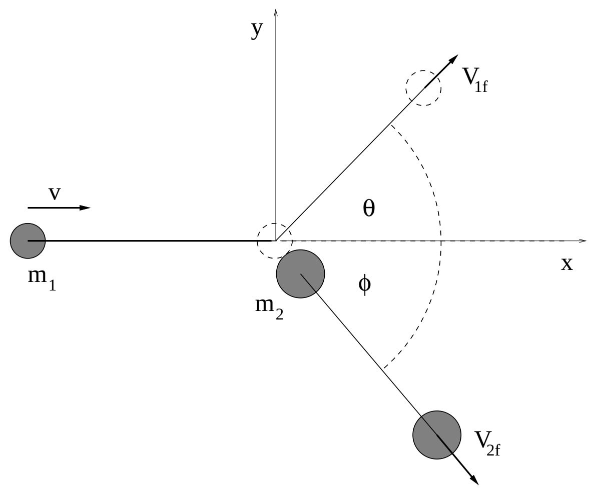

Figure 2: Choque elástico en dos dimensiones

Antes de proseguir, es conveniente usar parámetros adimensionales, que permiten simplificar un poco los cálculos. Usaremos la velocidad del proyectil como unidad de velocidad y la masa del proyectil como unidad de masa. Así, definiremos

$$u = \frac{v_{1f}}{v}, \tag{24}$$

$$w = \frac{v_{2f}}{v}, \tag{25}$$

y

$$r = \frac{m_2}{m_1}. \tag{26}$$

Comentario: Este proceso de expresar las variables del problema en unidades que son propias del sistema que uno está considerando es usado frecuentemente en física e ingeniería.

En términos de las nuevas variables las tres leyes de conservación discutidas más arriba toman la forma, un poco rearreglada,

$$u\,\cos\theta = 1 - r\,w\,\cos\phi, \tag{27}$$

$$u\,\mathrm{sen}\theta = r\,w\,\mathrm{sen}\phi, \tag{28}$$

y

$$1 = u^2 + r\,w^2, \tag{29}$$

respectivamente.

Tenemos entonces un sistema de tres ecuaciones para encontrar las cuatro incógnitas del problema, u, w, θ y ϕ. La cuarta ecuación, como hemos dicho anteriormente, proviene de la dinámica misma del choque. Nuestra estrategia aquí será resolver (27), (28) y (29) para las variables u, w, y θ en términos de ϕ. Dividiendo (28) por (27) obtenemos

$$\tan\theta = \frac{r\,w\,\mathrm{sen}\phi}{1 - r\,w\,\mathrm{sen}\phi} \tag{30}$$

y así hemos despejado θ en términos de w y de ϕ. Por otra parte, si tomamos el cuadrado de (27), luego el cuadrado de (28) y los sumamos, obtenemos

$$u^2 = 1 + r^2\, w^2 - 2\, r\, w\, \cos\phi. \tag{31}$$

Ahora podemos combinar (29) y (31) para deshacernos de u y, de este modo, obtener una ecuación que solo contiene a w:

$$r(1+r)w^2 - 2\, r\, w \cos\phi = 0. \tag{32}$$

Esta última ecuación es una ecuación cuadrática para la variable w en términos de ϕ. Admite dos soluciones, $w = 0$ (que corresponde en realidad al caso en que el proyectil no impacta al blanco, i.e., que no hay choque), y

$$w = \frac{2\,\cos\phi}{(1+r)}. \tag{33}$$

Una vez determinado w, por medio de (33), podemos determinar facilmente u y θ, por medio de (29) y (30) respectivamente.

Comentario:
Si las masas del proyectil y del blanco son iguales, i.e., si $r = 1$, las soluciones posibles dadas por (33) son: a) $w = 0$, y b) $w = \cos\phi$. La primera solución corresponde a la ausencia de choque. La solución $w = \cos\phi$ es la solución general en este caso. Reemplazando este valor de w en (29), determina $u = \mathrm{sen}\phi$. Finalmente, de (30) obtenemos $\tan\theta = \cot\phi$, lo que a su vez implica

$$\theta + \phi = \frac{\pi}{2}, \tag{34}$$

es decir, si las dos partículas tienen la misma masa y el choque es elástico, las trayectorias de las partículas que emergen del choque forman un ángulo recto.

3 Choque de esferas, o de discos duros

Como discutimos en la sección anterior, las leyes de conservación solo permiten determinar tres de las cuatro variables que caracterizan un choque en dos dimensiones. Para determinar completamente el resultado de un choque es necesario considerar el detalle de la interacción entre los cuerpos que chocan. Eso haremos en esta sección, para un caso muy especial de choques que son los choques entre discos duros o entre esferas duras (los típicos choques importantes en el billar).

En la figura hemos dibujado dos discos duros, el proyectil de radio R_1 y el blanco de radio R_2. Llamemos *línea de impacto* a la recta paralela a la velocidad incidente del proyectil, que pasa por el centro del dico "blanco". Se llama *parámetro de impacto* a la distancia entre la trayectoria actual del proyectil y la línea de impacto. En la figura hemos designado por b al parámetro de impacto.

Nuestro propósito es determinar el ángulo ϕ con que emerge el blanco luego del choque, en términos del parámetro de impacto. Dada la discusión de la sección anterior, una vez determinado ϕ, tenemos determinadas todas las demás cantidades después del choque.

En el instante en que se produce el choque, los discos interactúan entre ellos por medio de la normal N, que es perpendicular al plano de contacto. En

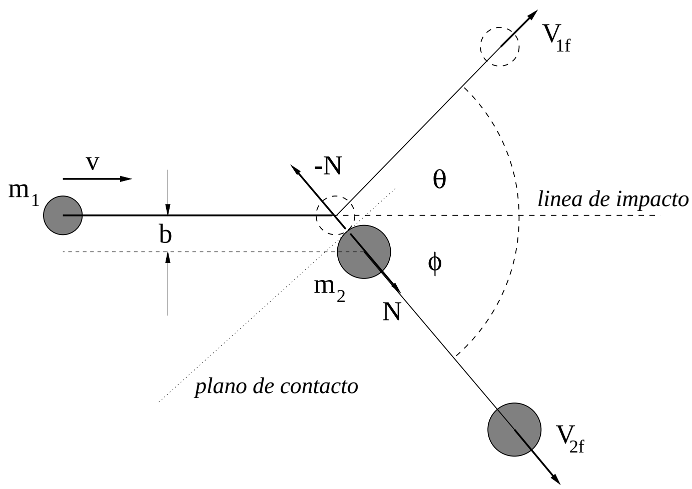

Figure 3: Choque de discos duros en dos dimensiones

la figura siguiente hemos dibujado en detalle el instante en que se produce el choque. Como la única fuerza que experimenta el "blanco" es la normal N, y como antes del choque éste se encontraba en reposo, el momentum final del blanco estará dirigido a lo largo de la normal. Entonces podemos calcular el ángulo ϕ a partir de simple trigonometría del triángulo OPQ de la figura.

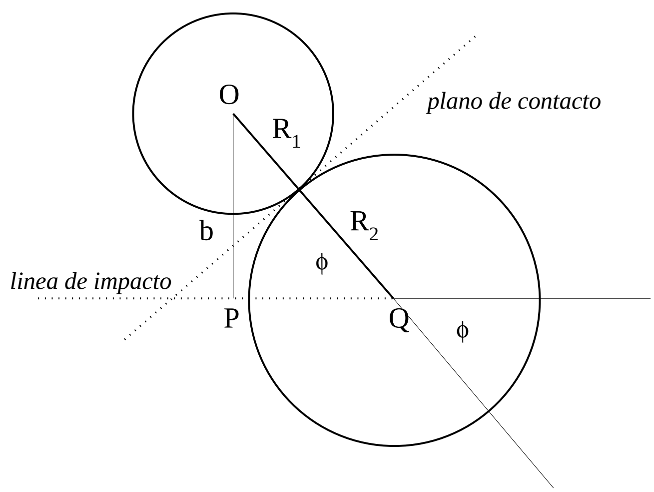

Figure 4: Choque de discos duros en dos dimensiones (detalle)

Así obtenemos,

$$\text{sen}\phi = \frac{b}{R_1 + R_2}. \tag{35}$$

4 Problemas

67. Se arroja un ladrillo de $0.6[kg]$ al interior de un carrito de $25[kg]$ como se indica en la figura. Si al entrar al carro, el ladrillo tiene una rapidez de $10[m/s]$ como se muestra en la figura, determine la velocidad final del carro.

68. Una niñita de $m = 20[kg]$ se deliza por un resbalín hacia la superficie de un carro de $M = 10[kg]$. Determine la velocidad del carro en el instante en que la niña para de deslizarse sobre el. Desprecie el roce y suponga que la niña parte desde el reposo en A.

69. Dos hombres A y B, cada uno de masa $75[kg]$, están parados sobre una balsa de $250[kg]$. Determine la velocidad que se da a la balsa si estos hombre corren sobre la balsa con una velocidad relativa de $1[m/s]$ y saltan desde ella: a) uno a la vez y b) los dos al mismo tiempo. Desprecie el roce y suponga que la balsa no se da vuelta.

70. Suponga dos masas iguales m, unidas mediante un resorte de constante elástica k. Si inicialmente el sistema se encuentra adosado a una pared de tal modo que el resorte se encuentra comprimido en d con respecto a su largo natural, describa (cuantitativamente) el movimiento del sistema una vez que éste se deja evolucionar desde el reposo.

71. Suponga que el sistema del problema original viaja con velocidad $\vec{v}$ hacia la pared, de modo que el resorte que une las dos masas se encuentra en su largo natural. Describa el movimiento del sistema desde el instante que la masa de la izquierda choca contra la pared. ¿ Qué sucede finalmente con el sistema?

En los problemas siguientes se hace uso del coeficiente de restitución. En clases discutimos dos tipos de colisiones: las colisiones elásticas, en que se conserva la energía y las colisiones plásticas. Entre estos dos extremos existen situaciones en las que no se conserva la energía, pero en las cuales las dos partículas no siguen juntas después del choque. Por supuesto, en estas situaciones intermedias no se puede usar la conservación de la energía. En lugar de la conservación de energía se especifica el **coeficiente de restitución** e que está definido como el cuociente entre las velocidades relativas después y antes del choque, a lo largo de la línea de impacto. La línea de impacto está definida como la dirección normal al plano de contacto (ver figura).

72. Dos bolas de billar A y B tienen la misma masa $m = 0.2[kg]$. Si A choca a B con una velocidad $(v_A)_i = 2[m/s]$ como se indica, determine su velocidad final después de la colisión. La bola B está originalmente en reposo y el coeficiente de restitución es $e = 0.75$.

73. Dos monedas A y B tienen velocidades iniciales como se indica, justo antes de chocar en el punto O. Si sus masas son respectivamente $m_A = 7[grs]$ y $m_b = 3[grs]$ y la superficie sobre la que se mueven es suave, determine las velocidades justo después del choque. El coeficiente de restitución es $e = 0.65$.

74. Dos cilíndros de caucho (de los que se usan en hockey sobre hielo) A y B cada uno de masa $m = 0,2[kg]$ chocan en el punto O y son deflectados a lo largo de las líneas punteadas que se muestran en la figura. Determine las velocidades de A y B después del choque, suponiendo que la superficie de hielo es suave.

5 Notas Bibliográficas e Históricas

Las leyes de choque fueron descritas por primera vez por John Wallis, Christopher Wren y Christiaan Huygens. De acuerdo al libro de René Dugas, **Histoire de la Mécanique**, Eds. J. Gabay 1996, Paris, (Cáp. V, p. 165), en el año 1668, la Sociedad Real de Londres llamó a concurso para determinar las leyes de las colisiones de los cuerpos. El 26 de noviembre de 1668, Wallis presentó un ensayo sobre el choque inelástico de los cuerpos. El 17 de diciembre de 1668, y el 4 de enero de 1669, Wren y Huygens, independientemente presentaron ensayos sobre los choques elásticos. El ensayo de Wallis apareció publicada en su tratado *Mechanica, sive de Motu* aparecido en Londres entre 1669 y 1671. El ensayo de Wren apareció publicado en la revista *Philosophical Transactions* en 1669. Finalmente el ensayo de Huygens aparece publicado en su obra póstuma *De Motu corporum ex percusione*, aparecido en 1703.