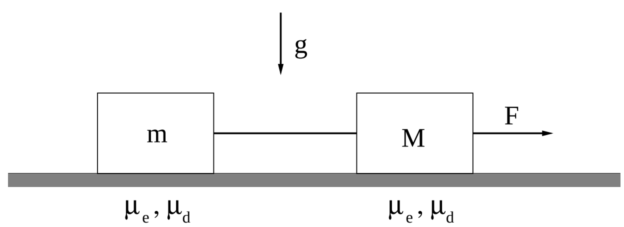
Facultad de Física, P. Universidad Católica de Chile

FIS-1512-01: Física Clásica
FIZ-0121-01: Mecánica Clásica
Ejercicios Resueltos de Dinámica
30 de Agosto de 2008

Problema 1: Considere el sistema de la figura, que consiste en dos bloques de masas m y M respectivamente, unidos por una cuerda ideal de largo ℓ.

a) Suponiendo que el coeficiente de roce estático entre los bloques y el suelo es el mismo, e igual a μ_e, cual es la máxima fuerza F que se puede aplicar a M sin que el sistema se mueva.

b) Si el coeficiente de roce dinámico entre los bloques es μ_d, que fuerza F se debe aplicar al bloque de masa M para que ambos bloques aceleren con aceleración a. ¿ Cuál es el valor de la tensión de la cuerda en ese caso?



Solución:
a) En la figura hemos dibujado los diagramas de cuerpo libre para ambos cuerpos. Si el sistema está en equilibrio, tenemos que

$$F - T - f_{r1} = 0, \qquad N_1 - Mg = 0, \qquad \text{y, } f_{r1} \leq \mu_e\, Mg, \tag{1}$$

y

$$T - f_{r2} = 0, \qquad N_2 - Mg = 0, \qquad \text{y, } f_{r2} \leq \mu_e\, mg. \tag{2}$$

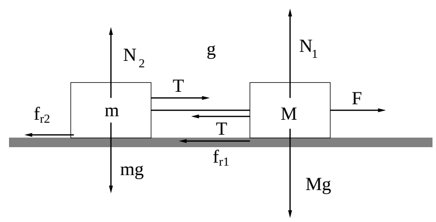
Sumando las dos primeras ecuaciones de (1) y (2) tenemos de inmediato que

$$F = f_{r1} + f_{r2} \leq \mu_e g(M + m), \tag{3}$$

de modo que $F_{\text{máx}} = \mu_e g(M + m)$.

b) Nuevamente tenemos $N_1 = Mg$ y $N_2 = mg$, y esta vez, $f_{r1} = \mu_d N_1 = \mu_d Mg$, y $f_{r2} = \mu_d N_2 = \mu_d mg$. Como cada bloque acelera con aceleración a, aplicando la segunda ley de Newton a cada cuerpo obtenemos,

$$F - T - f_{r1} = F - T - \mu_d Mg = Ma, \tag{4}$$



para el bloque de masa M, y,

$$T - f_{r2} = T - \mu_d mg = ma, \tag{5}$$

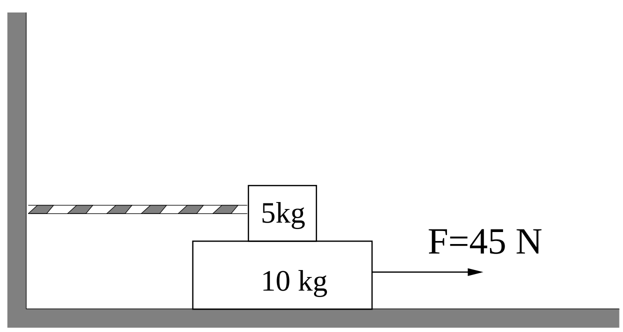
para el bloque de masa m. Sumando ammas ecuaciones obtenemos $F - \mu_d g(m + M) = (m + M)a$, así es que finalmente,

$$F = (m + M)\left[a + \mu_d g\right].$$

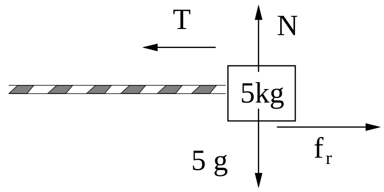
Problema 2: Un bloque de 5 [kg] se coloca sobre un bloque de 10 [kg], como se indica en la figura. Se aplica sobre el bloque de 10 [kg] una fuerza horizontal de 45 [N], en tanto que el bloque de 5 [kg] está amarrado a la pared. El coeficiente de roce dinámico entre las dos superficies en movimiento es $\mu_d = 0,2$.

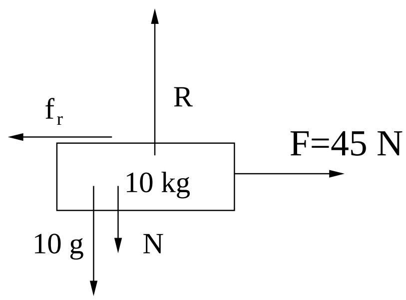
a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada bloque identificando las fuerzas de acción y reacción dobre los bloques.

b) Determine la tensión en la cuerda y la aceleración del bloque de 10 [kg].



Solución: **a)** En la figura hemos dibujado los diagramas de cuerpo libre para cada uno de los dos bloques del problema:
Sobre el bloque superior actúan las siguientes fuerzas: la tensión T de la cuerda hacia la izquierda; el peso $5g$ hacia abajo; la normal N hacia arriba, y el roce entre los dos bloques, de magnitud f_r hacia la derecha (nótese que el bloque superior ejerce la fuerza f_r hacia la izquierda sobre el bloque inferior).





Sobre el bloque inferior actúan las siguientes fuerzas: la fuerza $F = 45$ [N] hacia la derecha; el peso $10g$ hacia abajo; la reacción del bloque superior N hacia abajo; la reacción del suelo sobre el bloque R y el roce entre los dos bloques, de magnitud f_r hacia la izquierda.

b) El bloque de arriba está en reposo, mientras que el de abajo acelera hacia la derecha con aceleración a. Entonces las ecuaciones de movimiento son: para el bloque de arriba,

$$f_r - T = 0,$$

y

$$N - 5g = 0,$$

en que

$$f_r = \mu_d N = 0,2N = 0,2 \times 5g = g.$$

Y, para el bloque de abajo,

$$45 - f_r = 45 - g = 10a,$$

y

$$R = 10g + N = 15g.$$

De las ecuaciones anteriores obtenemos,

$$a = 3,5 \mathrm{m/seg}^2,$$

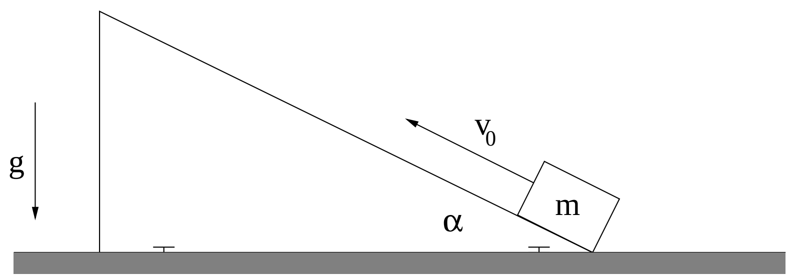
y

$$T = f_r = g = 9,81[\mathrm{N}].$$

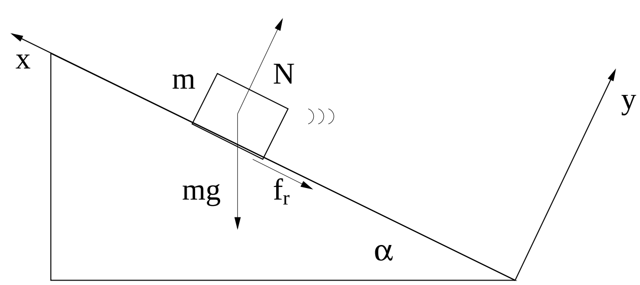
Problema 3: Se comunica al ladrillo de la figura una velocidad v_0 a lo largo del plano inclinado y dirigida hacia arriba. Suponga que la superficie del plano inclinado es rugosa y que el coeficiente de roce dinámico entre la superficie y el ladrillo es μ_d, y que el ángulo α es mayor que el crítico (i.e., $\tan\alpha \geq \mu_e$, en que μ_e es el coeficiente de roce estático entre el ladrillo y la superficie del plano inclinado).

a) Encuentre la distancia que recorrerá el ladrillo plano arriba, y

b) Calcule el tiempo que tardará en deslizarse hacia arriba y hacia abajo hasta volver a su posición inicial.



Solución: **a)** Cuando el ladrillo viaja plano arriba, la fuerza de roce apunta plano abajo. En la figura hemos dibujado todas las fuerzas que actúan sobre el ladrillo, y hemos ilustrado la elección de nuestros ejes coordenados.



De la figura tenemos de inmediato las ecuaciones de movimiento para el ladrillo, i.e.,

$$N - mg\cos\alpha = 0, \tag{6}$$

y

$$-mg\text{sen}\alpha - f_r = -mg\text{sen}\alpha - \mu_d mg\cos\alpha = m\ddot{x}, \tag{7}$$

de modo que la aceleración del ladrillo está dada por

$$\ddot{x} = -g(\text{sen}\alpha + \mu_d\cos\alpha). \tag{8}$$

Integrando esta ecuación dos veces, usando las condiciones iniciales, $x(0) = 0$, y $\dot{x}(0) = v_0$, obtenemos (como en clases),

$$\dot{x}(t) = v_0 - g(\text{sen}\alpha + \mu_d\cos\alpha)t, \tag{9}$$

y

$$x(t) = v_0\, t - \frac{1}{2} g(\mathrm{sen}\alpha + \mu_d \cos\alpha) t^2. \tag{10}$$

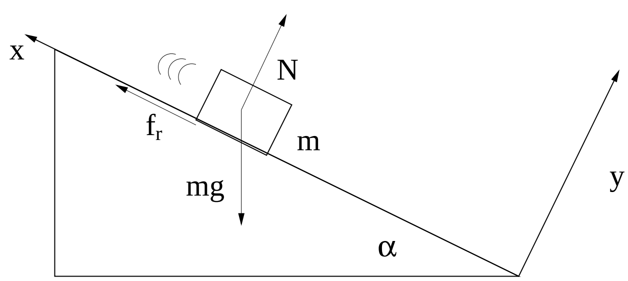
De (10), vemos que el tiempo que el ladrillo tarda en subir (hasta detenerse) es

$$t_1 = \frac{v_0}{g(\mathrm{sen}\alpha + \mu_d \cos\alpha)}, \tag{11}$$

y la distancia que recorre, $d = x(t_1)$ está dada por

$$d = \frac{v_0^2}{2g(\mathrm{sen}\alpha + \mu_d \cos\alpha)}. \tag{12}$$

b) Cuando el ladrillo viaja plano abajo, la fuerza de roce apunta plano arriba. En la figura hemos dibujado todas las fuerzas que actúan sobre el ladrillo, y hemos elegido los mismos ejes coordenados que en la parte a).



De la figura tenemos de inmediato las ecuaciones de movimiento para el ladrillo, i.e.,

$$N - mg\cos\alpha = 0, \tag{13}$$

y

$$-mg\mathrm{sen}\alpha + f_r = -mg\mathrm{sen}\alpha + \mu_d mg\cos\alpha = m\ddot{x}, \tag{14}$$

de modo que la aceleración del ladrillo está dada por

$$\ddot{x} = -g(\mathrm{sen}\alpha - \mu_d \cos\alpha). \tag{15}$$

Integrando (15), usando esta vez las condiciones iniciales, $x(0) = d$ y $\dot{x}(0) = 0$, obtenemos,

$$x(t) = d - \frac{1}{2} g(\mathrm{sen}\alpha - \mu_d \cos\alpha) t^2. \tag{16}$$

El tiempo t_2 que el ladrillo tarda en bajar está dado por $x(t_2) = 0$, de modo que,

$$t_2 = \sqrt{2d/(g(\mathrm{sen}\alpha - \mu_d \cos\alpha))} = \frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{1}{\mathrm{sen}^2\alpha - \mu_d^2 \cos^2\alpha}}, \tag{17}$$

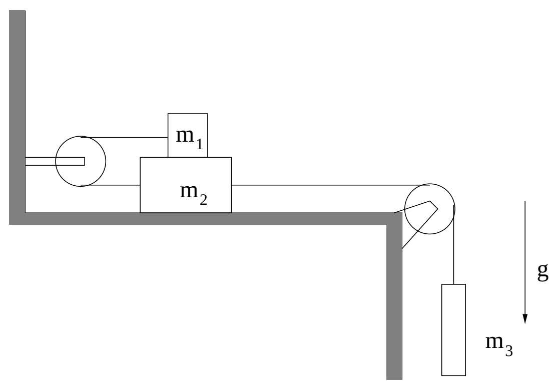
en que usamos (12) para reemplzara el valor de d obtenido en la parte a).

Problema 4: En la figura, el coeficiente de roce dinámico entre los bloques de 2 [kg] y 3 [kg] es $0,3$. La superficie horizontal y las poleas no tienen roce y las masas se liberan a partir del reposo.

a) Dibuje los diagramas de cuerpo libre de cada bloque.

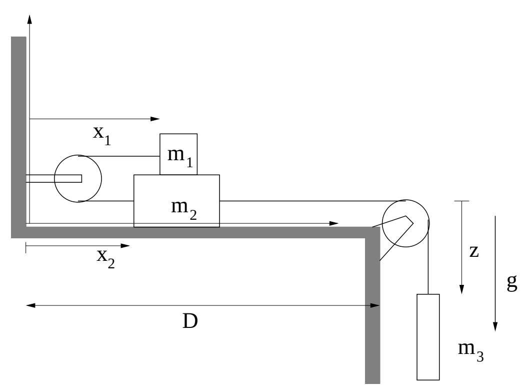
b) Calcule la aceleración de cada bloque.

c) Determine las tensiones en las cuerdas.



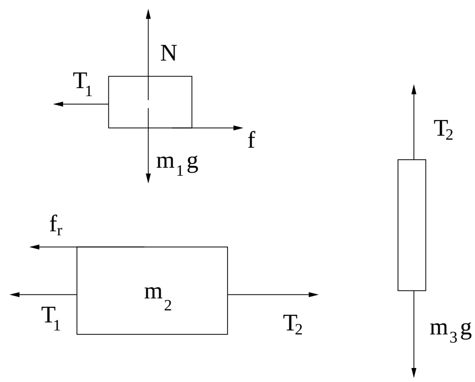
Solución:

a) En la figuras siguientes hemos dibujado nuestra elección de coordenadas y los diagramas de cuerpo libre de cada uno de los tres bloques.



b) De ambas figuras anteriores, podemos escribir de inmediato las ecuaciones de movimiento de cada uno de los tres bloques, así como las ecuaciones de ligazón para las coordenadas de los bloques. Estas son:

$$m_3 g - T_2 = m_3 \ddot{z}, \tag{18}$$



$$T_2 - T_1 - f_r = m_2 \ddot{x}_2, \tag{19}$$

y,

$$T_1 - f_r = -m_1 \ddot{x}_1, \tag{20}$$

en que

$$f_r = \mu_d N = \mu_d \, m_1 \, g. \tag{21}$$

Las ecuaciones de ligazón entre las coordenadas de las partículas, que toman en cuenta el hecho que las cuerdas son de largo fijo, están dadas por,

$$x_2 + x_1 = \ell_1 \tag{22}$$

(en que ℓ_1 es, esencialmente, el largo de la cuerda 1), y,

$$z + (D - x_2) = \ell_2, \tag{23}$$

en que ℓ_2 es, esencialmente, el largo de la cuerda 2, y D es la distancia entre la pared y el precipicio. Sumando las ecuaciones (18), (19) y (20), usando que $-\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{z}$ (que sigue de (22 y (23), y también reemplazando el valor de f_r dado por (21) obtenemos,

$$\ddot{z} = \frac{m_3 - 2\,\mu_d\, m_1}{m_1 + m_2 + m_3} g, \tag{24}$$

$$T_1 = \frac{m_1(m_2\mu_d + m_3(1 + \mu_d) - m_1\mu_d)}{m_1 + m_2 + m_3}\, g, \tag{25}$$

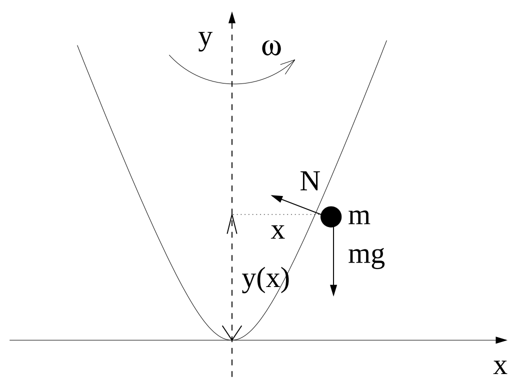
y,

$$T_2 = \frac{m_3(m_1(1 + 2\mu_d) + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} g. \tag{26}$$

Finalmente, para los datos numéricos del problema obtenemos: $\ddot{z} = 5,76$ [m/seg^2], $T_1 = 23,28$[N], y $T_2 = 40,55$ [N].

Problema 5: Considere un alambre plano descrito por la ecuación $y = y(x)$. Suponga que sobre él puede deslizar una masa m. ¿ Qué forma debe tener el alambre para que al hacerlo girar en torno al eje vertical (eje y con velocidad angular constante ω la masa se desliza sobre él se encuentre en equilibrio en cualquier punto?

[Ref.: pp. 46 (Prob. 8; Cáp. 2), del libro R.B., M.C. Depassier, *Problemas Resueltos de Mecánica Clásica*, Ediciones UC, Santiago de Chile, 1995].



Solución: Las coordenadas de la masa son x e $y(x)$ como se indica en la figura. Las fuerzas que actúan sobre la masa son su peso $-mg\hat{\jmath}$ y la reacción del alambre sobre ella $\vec{N}$ (normal al alambre). Por otra parte, como vimos en clases, la aceleración de la masa (que está describiendo un círculo de radio x con velocidad angular uniforme ω) es centrípeta y está dada por $\vec{a} = -\omega^2 x\hat{\imath}$.

La ecuación de movimiento de la masa m está dada por

$$-mg\hat{\jmath} + \vec{N} = -m\omega^2 x\hat{\imath}. \tag{27}$$

Como $\vec{N}$ es normal a la curva, $\vec{N} \cdot \hat{t} = 0$, en que $\hat{t}$ es la tangentea la curva $y(x)$. Si llamamos $\vec{r} = x\hat{\imath} + y(x)\hat{\jmath}$ al vector posición de la masa,

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = \hat{\imath} + \frac{dy}{dx}\hat{\jmath} \tag{28}$$

es tangente a la curva. Multiplicando (27) por $d\vec{r}/dx$ obtenemos

$$-mg\frac{dy}{dx} = -m\omega^2 x,$$

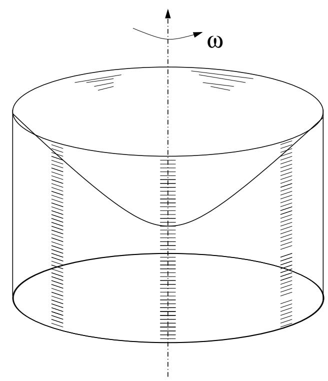
es decir,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g}x,$$

ecuación que puede ser integrada de inmediato (usando el Teorema Fundamental del Cálculo) para obtener

$$y = y(x) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}x^2 + c. \tag{29}$$

La ecuación (3) es la ecuación de una parábola. Aquí c, es una constante de integración y corresponde al mínimo de la parábola, que por supuesto puede ser fijado en forma arbitraria.



Nota: Si se hace girar un vaso con agua (o cualquier otro líquido) con respecto al eje del vaso y con velocidad angular constante, la superficie libre del líquido adopta precisamente la forma parabólica que hemos encontrado en la solución de este problema. Ver, e.g., el libro de H. Lamb, *Hydrodynamics*, Dover Publications, NY, 1945, problema 26, pp. 28, Capítulo 1.