

Facultad de Física, P. Universidad Católica de Chile
FIZ-2520: Métodos Matemáticos de la Física II
Curso: R. Benguria, Semestre Primavera 2001
Tarea # 1
Fecha de Entrega: Jueves 22 de marzo, 2001.

1. Demuestre que el conjunto de polinomios de grado a lo mas n , con coeficientes reales, en una variable real x forman un espacio vectorial bajo las operaciones usuales.

2. Demuestre que si $w(x)$ es una función positiva de x , entonces para el espacio vectorial del problema 1, la expresión

$$(f, g) = \int_{-1}^1 w(x) f(x) g(x) dx$$

satisface las propiedades de un producto interno.

3. Muestre que los polinomios trigonométricos con coeficientes reales, es decir sumas del tipo

$$p(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx],$$

forman un espacio lineal. Muestre que

$$(p, q) = \int_{-\pi}^{\pi} p(x) q(x) dx$$

es un buen producto interno, y que las funciones

$$p_k(x) = \cos kx, \quad q_k(x) = \operatorname{sen} kx,$$

forman un conjunto de funciones ortogonales.

4. La dimensión de un espacio vectorial de dimensión finita está definida como el número de elementos de una base. Las bases no son únicas. Demuestre que la dimensión es independiente de la base elegida.

5. Demuestre que el espacio de funciones reales, continuas, definidas en el intervalo $(0, 1)$ forman un espacio vectorial bajo las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar.

6. Muestre que

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

constituye un producto interno apropiado para el espacio del problema anterior.

7. Muestre que la norma definida como

$$||f(x)|| = \sup_{x \in (0,1)} |f(x)|$$

satisface todas las propiedades de una norma para el espacio de funciones del problema 5. Note que una norma distinta se puede construir a partir del producto interno definido en el problema 6.

8. Para los siguientes intervalos y correspondientes funciones de peso, construya mediante el procedimiento de Gram–Schmidt los primeros cuatro polinomios ortonormales.

- a) $w(x) = \sin \pi x$, en $(0, 1)$,
- b) $w(x) = \sqrt{1 - x^2}$, en $(-1, 1)$,
- c) $w(x) = e^x$, en $(0, 1)$,
- d) $w(x) = x e^{-x}$, en $(0, \infty)$,
- e) $w(x) = e^{-x^2/2}$, en $(-\infty, \infty)$.

Nota: Si Ud. está familiarizado co Maple, puede utilizarlo como herramienta de cálculo.

Referencias:

1. Harry Hochstadt, *The functions of mathematical physics*, Dover, NY, 1986. (Disponible en Biblioteca de Matemáticas).

Notas históricas: Adrien-Marie Legendre nació en Paris el 18 de septiembre de 1752. Estudió en el Collège Mazarin de Paris, de donde se graduó en 1780. Hizo clases en l'Ecole Militaire entre 1775 y 1780. En 1782 ganó el Premio de la Academia de Berlín con su trabajo *Recherches sur la trajectoire des projectiles dans les milieux resistants*. En 1783 introdujo las ahora llamadas *funciones de Legendre* con el objeto de determinar el campo gravitacional de un elipsoide homogéneo en un punto exterior. En 1784 utilizó los *Polinomios de Legendre* en su trabajo *Recherches sur la figure des planètes*. En 1794 publicó su libro *Elements de geometrie*, el cual se constituyó en el principal texto elemental de geometría por los siguientes cien años. Realizó numerosos trabajos en teoría de números y en la teoría de las funciones elípticas. Murió en Paris el 10 de enero de 1833. (Para mas detalles consultar el sitio web: [www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/ history/Mathematicians/Legendre.html](http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Legendre.html))