Facultad de Física, P. Universidad Católica de Chile
FIZ–2520: Métodos Matemáticos de la Física II
Curso: R. Benguria, Semestre Primavera 2001
Tarea # 2
Fecha de Entrega: Jueves 29 de marzo, 2001.

9. *El núcleo de Dirichlet.* Sea

$$N_k(u) = \frac{1}{2\pi}\frac{\operatorname{sen}((k+1/2)u)}{\operatorname{sen}(u/2)}, \qquad -\pi \le u \le \pi, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

a) Demuestre que $\int_{-\pi}^{\pi} N_k(u)\,du = 1$, para todo k. Defina luego el promedio

$$\tilde{N}_k(u) = \left(\sum_{p=0}^{k-1} N_p(u)\right)/k.$$

Entonces, $\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{N}_k(u)\,du = 1$, para todo k.
b) Verifique luego que

$$\tilde{N}_k(u) = \frac{1}{2\pi k}\left[\frac{\operatorname{sen}(ku/2)}{\operatorname{sen}(u/2)}\right]^2,$$

y demuestre que

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\delta\le|u|\le\pi} \tilde{N}_k(u)\,du = 0,$$

para todo $\delta > 0$.
c) Imite la demostración del Teorema de Weierstrass que aparece en el Capítulo 2 del volumen 1 del libro de Courant y Hilbert y demuestre que si $g(x)$ es una función real y continua en $[-2\pi, 2\pi]$, entonces

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(x+u)\tilde{N}_k(u)\,du = g(x),$$

para todo $x \in (-\pi, \pi)$.
d) Suponga ahora que $g(x)$ es continua por pedazos en $[-2\pi, 2\pi]$. Demuestre que si $x \in (-\pi, \pi)$ es un punto de discontinuidad de $g(x)$, entonces

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(x+u)\tilde{N}_k(u)\,du = \frac{1}{2}\left[g_+(x) + g_-(x)\right],$$

en que g_+ (respectivamente g_-) es el valor de g a la derecha (respectivamente a la izquierda) de la discontinuidad.
e) **Aplicación:** Demuestre que si f es una función continua, real, periódica, de período 2π, y si se define

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen} t\,dt,$$

$n = 1, 2, \ldots,$ y

$$s_n = a_0 + \sum_{p=1}^{n}\left[a_p\cos(px) + b_p\,\mathrm{sen}(px)\right],$$

y

$$T_n = \frac{1}{n}(s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}),$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x).$$

10. Sea V el conjunto de todas las funciones $f(z)$ que son analíticas en $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ y tales que

$$\iint_{|z|<1} |f(z)|^2\,dx\,dy < \infty.$$

a) Demuestre que $(f, g) \equiv \iint_{|z|<1} \bar{f} g\,dx\,dy$ define un buen producto interno en V.

b) Sean $\phi_n(z) = \sqrt{n/\pi}\,z^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$; demuestre que los ϕ_n forman un conjunto ortonormal en V.

c) Compare los coeficientes (ϕ_n, f) con los coeficientes del desarrollo en serie de potencias para f.

11. Utilice la fórmula de cuadratura de Gauss para obtener estimaciones de π a partir de

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

(estime el error). Haga lo propio a partir de

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

12. Si x_0 es un cero de $\phi_n(x)$ demuestre que

$$x_0 = \frac{\int_a^b x\left[\phi_n(x)/(x-x_0)\right]^2 w(x)\,dx}{\int_a^b \left[\phi_n(x)/(x-x_0)\right]^2 w(x)\,dx}.$$

Problema de desafío:

Sean $p_n(x)$ los polinomios ortonormales con respecto al peso $w(x)$, y $q_n(x)$ los polinomios ortonormales con respecto al peso $\sigma(x)$, en (a,b). Suponga además que los coeficientes de $p_n(x)$ y $q_n(x)$ de las potencias de más alto orden en x son positivos. Si expandemos los q's en términos de los p's, es decir,

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n}\, p_k(x),$$

demuestre que si

$$\int_a^b p_n(x) p_m(x) \sigma(x)\, dx \leq 0,$$

para todo $m \neq n$, entonces,

$$a_{k,n} \geq 0$$

para todo k y n.

Nota: Este resultado fue demostrado por M.W. Wilson en: *Nonnegative expansions of Polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. **24** (1970), 100-102. (La revista Proc. Amer. Math. Soc. está en la Biblioteca Gauss de la Facultad de Matemáticas).

Referencias:

1. Harry Hochstadt, *The functions of mathematical physics*, Dover, NY, 1986. (Disponible en Biblioteca de Matemáticas).

2. Richard Courant y David Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, volume 1, Interscience, NY, 1953.

Notas históricas:

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet nació en Düren, Alemania el 13/2/1805. Su familia era originaria de la ciudad belga Richelet y de ahí el nombre patronímico de “Le jeune de Richelet”. Estudió en el Colegio Jesuíta de Colonia donde tuvo la suerte de contar como uno de sus profesores a G. Ohm. Luego se trasladó a París donde asistió al College de France y a la Faculté des Sciences. En 1825 retornó a Alemania. Fue profesor de la Universidad de Berlín entre 1828 y 1855. Tras la muerte de C. F. Gauss en 1855, Dirichlet le sucedió en su puesto de profesor en la Universidad de Göttingen. Dirichlet murió en Göttingen el 5 de Mayo de 1859 de un ataque al corazón. Dirichlet fue el primero en estudiar la convergencia de las series trigonométricas (de Fourier). Es uno de los fundadores de la teoría analítica de números. Demostró, junto con Legendre el caso $n = 5$ del Teorema de Fermat. También estudió la estabilidad del sistema solar (ver http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/ history/Mathematicians/Dirichlet.html).