

13.

a) Sea $f(x) = x$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Encuentre los coeficientes de su expansión en serie de Fourier.

b) Haga lo propio con la función $f(x) = (\pi - x)^2/4$. Observe el distinto grado de convergencia de los coeficientes de Fourier en los casos a) y b).

c) Evaluando el desarrollo en serie de Fourier para la función del caso b), en $x = 0$, obtenga el valor de la suma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

d) Demuestre que la serie de Fourier en el caso b) puede ser derivada término a término y de este modo encuentre el desarrollo en serie de Fourier de la función $g(x) = (\pi - x)/2$.

14.

a) Calcule las series de Fourier para: i) x^2 , ii) $|x|$, iii) $\sin^2(x)$, iv) $|\sin(x)|$, y v) $|\cos x|$.

b) Calcule la serie de Fourier de la función

$$\tilde{N}_k(u) = \frac{1}{2\pi k} \left[\frac{\sin(ku/2)}{\sin(u/2)} \right]^2,$$

que aparece en el Problema 9, de la Tarea # 2.

15. Utilice una función adecuada y su correspondiente serie de Fourier con el objeto de evaluar la suma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Haga uno de los dos problemas que se dan a continuación:

16.

Utilice series de Fourier para demostrar la desigualdad isoperimétrica clásica, i.e., de todas las curvas cerradas en el plano de perímetro dado la que encierra mayor área es el círculo.

Indicación: Ver los detalles de la demostración de A. Hurwitz, en las fotocopias del capítulo 2 del Courant y Hilbert distribuidas en clases (pag. 97).

17. Sea f una función real, continua, definida sobre la recta real y tal que $f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2})$ para todo x . Demuestre que f es constante.

Referencias:

1. Richard Courant y David Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, volume 1, Interscience, NY, 1953.

Notas históricas:

Jean Baptiste Joseph Fourier nació el 21 de marzo de 1768 en Auxerre, Francia. Estudió en la Escuela Militar Real de Auxerre y luego en la abadía benedictina de Benoit-sur-Loire y a partir de 1795 en la recién fundada Escuela Normal de Paris, donde tuvo entre sus profesores a J.L. Lagrange, P. S. Laplace y G. Monge. Enseñó en la Escuela Central de Trabajos Públicos (que luego pasó a llamarse, Escuela Politécnica). En 1797, sucedió a Lagrange como profesor de análisis y mecánica en la Escuela Politécnica. En 1798, formó parte del equipo científico que acompañó a Napoleón en la invasión de Egipto. Retornó a Paris en 1801, a su cátedra de Análisis en la Escuela Politécnica. Por orden de Napoleón tuvo que asumir como Prefecto del Departamento de Isère, en Grenoble, abandonando el mundo académico. Durante su estadía en Grenoble completó su trabajo *Sobre la Propagación del Calor en los Cuerpos Sólidos* en el que introdujo las series que llevan su nombre. En 1817 fue elegido miembro de la Academia de Ciencias y en 1822 publicó su famoso libro *Teoría Analítica del Calor*. Fourier murió en Paris el 16 de mayo de 1830. (ver <http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Fourier.html>).