Facultad de Física, P. Universidad Católica de Chile
FIZ–2520: Métodos Matemáticos de la Física II
Curso: R. Benguria, Semestre Primavera 2001
Tarea # 5
Fecha de Entrega: Jueves 26 de abril, 2001.

26. Encuentre las frecuencias propias de una membrana rectangular de lados a y b con condiciones de borde de Dirichlet en $x = 0$ y $x = a$ y condiciones de borde de Neumann en $y = 0$ e $y = b$. Encuentre también los correspondientes modos normales.

27. Considere la función Θ de Riemann,

$$\Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-\pi n^2 x}.$$

En clase demostramos que la función Θ de Riemann satisface la relación funcional,

$$\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Theta(\frac{1}{x}),$$

y de ahí concluimos que $\Theta(x) \approx 1/\sqrt{x}$ para valores pequeños de x. Uno puede demostrar facilmente que las correcciones son exponenciales. Defina ahora la *función partición* para una membrana cualquiera Ω en el plano como

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t},$$

en que $t \geq 0$ y la suma se extiende sobre todos los valores propios de la membrana. Considere una membrana rectangular de lados a y b, y borde fijo. Demuestre que para t pequeño,

$$Z(t) = \frac{1}{4\pi t}A - \frac{1}{8\sqrt{\pi t}}L + \frac{1}{4} + \ldots, \tag{1}$$

en que A es el área de la membrana y L es su perímetro. **Nota**: exprese la función partición de la membrana rectangular en términos de la función Θ, y utilice el comportamiento de Θ para x pequeño. Se puede demostrar que los dos primeros términos de la expansión (1) son válidos para una membrana cualquiera. Así, es posible *escuchar* el área y el perímetro de una membrana (ver M. Kac, *Can one hear the shape of a drum?*, American Mathematical Monthly, **73** 1-23(1966)).

28. *Método de D'Alambert para la solución de la ecuación de ondas en una dimensión:* Considere la ecuación de ondas en una dimensión,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

sobre una cuerda de largo L con sus extremos fijos. Suponga que en $t = 0$,

$$u(x,0) = F(x), \qquad \text{y} \qquad u_t(x,0) = G(x),$$

en que $0 \leq x \leq L$. Extendamos F y G a toda la recta real del modo siguiente. Primero definimos ambas funciones en $(-L,0)$ de modo que $F(-x) = -F(x)$ (e igualmente con G). Luego la extendemos a todo la recta real copiandola periódicamente de modo que $F(x) = F(x+2L)$ (e igual cosa con G). Compruebe explícitamente que

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[F(x+ct) + F(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(s)\,ds,$$

satisface la ecuación de ondas, las condiciones de borde en 0 y L, y las condiciones iniciales. Interprete físicamente las funciones $F(x+ct)$ y $F(x-ct)$. Expandiendo las funciones F y G, apropiadamente, en serie de Fourier demuestre que esta solución (que se conoce como solución de D'Alambert) coincide con la solución de Bernouilli discutida en clase. ¿ Cómo escribiría la solución en el caso de condiciones de borde libre (Neumann)?

29. Encuentre las frecuencias propias de una membrana que tiene la forma de un triángulo recto isósceles de cateto a. Para ello utilice la observación hecha en clase concerniente a la relación entre degeneración y simetría (en la discusión de la membrana cuadrada). **Desafío:** Si puede, obtenga $Z(t)$ (ver problema 27) en este ejemplo.

30. Haga un gráfico de las líneas nodales de los primeros 6 modos de vibración de una membrana circular.

31. Obtenga las frecuencias propias y los modos normales de una membrana semicircular de radio R.

Notas históricas: Mark Kac nació en Krzemieniec, Polonia (hoy parte de Ucrania) el 3 de Agosto de 1914 (calendario juliano). Estudió en la Universidad Jan Casimir, en Lvov (hoy Ucrania). Su tutor fue Hugo Steinhaus. Obtuvo su doctorado en 1938. Emigró a EE.UU. en 1939. Fue instructor y luego profesor en la Universidad de Cornell entre 1939 y 1961. Luego fue profesor en la Universidad de Rockefeller en Nueva York hasta 1980. Finalmente fue profesor en la Universidad de Southern California en Los Angeles. Murió el 26 de Octubre de 1984. Hizó numerosas contribuciones en Probabilidades, Mecánica Estadística, Teoría de Números, etc. Entre muchas cosas es conocido en física por la formula de "Feynman–Kac" en el método de cuantización usando intregrales de camino. Para muchos, Mark Kac es recordado por su artículo clásico *Can one hear the shape of a drum?* al que se hace referencia en el Problema 27. (ver http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/ history/Mathematicians/Kac.html).