Facultad de Física, P. Universidad Católica de Chile
FIZ–2520: Métodos Matemáticos de la Física II
Curso: R. Benguria, Semestre Primavera 2001
Tarea # 6
Fecha de Entrega: Jueves 3 de mayo, 2001.

Instrucciones: Resuelva el problema 32; el problema 33; el problema 34, una parte del 35; una parte del 36, y el 37.

32. Considere una membrana que cubre el triángulo equilatero $0 < y < x\sqrt{3}$, $0 < y < \sqrt{3}(L-x)$. Sean d_1 $(= y)$, d_2 $(= \frac{1}{2}(x\sqrt{3} - y))$ y d_3 $(= \frac{1}{2}(\sqrt{3}(L-x) - y))$, las distancias de un punto (x, y) en el interior del triángulo a cada uno de los lados. Para $n = 1, 2 \ldots\ldots$, sea

$$u_n(x,y,t) = \left(\mathrm{sen}\frac{4\pi n d_1}{L\sqrt{3}} + \mathrm{sen}\frac{4\pi n d_2}{L\sqrt{3}} + \mathrm{sen}\frac{4\pi n d_3}{L\sqrt{3}}\right)\cos\omega t.$$

Muestre que u_n satisface la ecuación de onda en la membrana, con condiciones de borde de Dirichlet, siempre que ω sea escogido apropiadamente. (**Nota:** Para verificar las condiciones de borde Ud. puede utilizar que $d_1 + d_2 + d_3 = L\sqrt{3}/2$). (**Desafío:** encuentre las líneas nodales correspondientes a u_2 y dibujelas).

33. Utilizando el método visto en ayudantía (Viernes 20 de abril), para encontrar la solución de la ecuación de Laplace en un cilindro, con data de Dirichlet en el manto del cilindro (ver la deducción del Núcleo de Poisson), encuentre la solución de la ecuación de Laplace en la región cilíndrica $1 < r < 2$ que satisface las condiciones de borde $u(1,\theta) = \cos 2\theta$, $u(2,\theta) = 1$, para $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

34 *Función generatriz para las funciones de Bessel.* Expandiendo en series, apropiadamente, las funciones $e^{xt/2}$ y $e^{-xt/2}$, demuestre que

$$\psi(x,t) = e^{x(t-1/t)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n x,$$

es la función generatriz de las funciones de Bessel. Aquí, $J_{-n}(x) \equiv (-1)^n J_n(x)$. Utilice luego la función generatriz para demostrar que

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\mathrm{sen}\theta)\, d\theta,$$

que se conoce como la *Integral de Bessel* para $J_n(x)$. Finalmente use esta última representación integral para J_n para demostrar que $|J_n(x)| \leq 1$.

35. *Algunos ejemplos de Expansiones de Fourier Bessel.* Demuestre los siguientes desarrollos en serie: (aquí, α denota cualquier raíz positiva de $J_0(x)$.

i) $1 = 2\sum_\alpha \frac{J_0(\alpha x)}{\alpha J_1(\alpha)}$.

ii) $x^2 = 2\sum_\alpha \frac{\alpha^2-4}{\alpha^3 J_1(\alpha)} J_0(\alpha x)$.

iii) $J_0(kx) = 2J_0(k)\sum_\alpha \frac{\alpha\, J_0(\alpha x)}{(\alpha^2-k^2)J_1(\alpha)}$.

iv) $x = 2\sum_\alpha \left[\frac{1}{\alpha J_1(\alpha)} - \frac{1}{\alpha^3 J_1^2(\alpha)}\int_0^\alpha J_0(t)\,dt\right] J_0(\alpha x)$.

v) $-logx = 2\sum_\alpha \frac{J_0(\alpha x)}{\alpha^2 J_1(\alpha)}$.

36. *Mas ejemplos de Expansiones de Fourier Bessel.* Si ahora α denota cualquier raíz positiva de $J_1(x)$, demuestre que

i) $x^2 = \frac{1}{2} + 4\sum_\alpha \frac{J_0(\alpha x)}{\alpha^2 J_0(\alpha)}$.

ii) $(1-x^2)^2 = \frac{1}{3} - 64\sum_\alpha \frac{J_0(\alpha x)}{\alpha^4 J_0(\alpha)}$.

37. *Aún mas ejemplos de Expansiones de Fourier Bessel.* Si ahora α denota cualquier raíz positiva de $J_0(x)$, demuestre que para todo $0 \le r < a$,

$$a^2 - r^2 = 8\,a^2 \sum_\alpha \frac{1}{\alpha^3 J_1(\alpha)} J_0(\frac{\alpha r}{a}).$$

Use este resultado para encontrar ls solución de le ecuación de ondas en una membrana circular, de radio a, con condiciones de borde de Dirichlet y con las condiciones iniciales: $u(r,\theta,0) = 0$ y $u_t(r,\theta,0) = a^2 - r^2$.

Referencias

1. Mark A. Pinsky, *Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications*, Second Edition, Mc. Graw–Hill, NY, 1991.
2. Frank Bowman, *Introduction to Bessel Functions*, Dover Publications, NY, 1958.

Notas históricas: Gabriel Lamé nació en Tours el 22 de Julio de 1795. Estudió en L'Ecole Polytechnique entre 1813 y 1817 y luego ingeniería en L'Ecole de Mines, donde se graduó en 1820. Entre 1820 y 1832 fue profesor e ingeniero en el *Cuerpo de Ingenieros de Vías de Comunicación* en San Petersburgo. En 1832 ocupó la cátedra de física en l?ecole Polytecnique. Además de su trabajo en investigación y enseñanza, participó en diversos trabajos de ingeniería, entre ellos la construcción del ferrocarril de París a Versalles y de París a St. Germain. En 1843 fue elegido miembro de la Academia de Ciencias de París. A partir de 1851 ocupó la cátedra de física matemática y probabilidades en la Sorbonne. Motivado por sus trabajos de ingeniería estructural, hizo importantes contribuciones a la Teoría de la Elasticidad (dos constantes elásticas llevan su nombre). Trabajó también en teoría de números (resolvió el caso $n = 7$ del Teorema de Fermat). También hizo importantes contribuciones en geometría diferencial. Murió el primero de mayo de 1870 en París. Lamé encontró las frecuencias propias de una membrana triangular. Su solución aparece en *Leçons sur la théorie mathématique de lélasticité des corps solides*, Paris, Bachelier, 1852. (ver http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/ history/Mathematicians/Lame.html).

Friedrich Wilhelm Bessel nació en Minden, Westphalia (Alemania) el 22 de julio de 1784. Estudió en el Gymnasium de Minden, el cual abadonó a los 14 años, para tomar un puesto de aprendiz en una firma comercial de importaciones en Bremen. Sin educación formal, en 1804 Bessel escribió un artículo sobre la órbita del cometa Halley, el cual fue enviado a Heinrich Olbers (astrónomo famoso), quién reconoció la calidad del trabajo de Bessel y recomendó su publicación. En 1806, bajo la recomendación de Olbers, aceptó el puesto de asistente el Observatorio de Lilienthal, cerca de Bremen. En 1807, la universidad de Göttingen le otorgó un doctorado, por recomendación de Gauss. En 1809 fue nombrado director del observatorio de Königsberg (hoy Kaliningrado) en Prusia Oriental. Hizo numerosos descubrimientos astronómicos (e.g., en 1841, descubrió variaciones periódicas en las posiciones de Sirio y de Procyon. Basado en estas observaciones, anunció que ambas estrellas eran dobles). Bessel fue también un excelente matemático, que introdujo las funciones que llevan su nombre, en 1817, en el estudio del problema de los tres cuerpos en mecánica celeste (casos particulares de las funciones de Bessel habían sido encontrados previamente por Jacob y Daniel Bernoulli, Leonhard Euler, y J. L. Lagrange. A pesar de haber abandonado toda educación formal a los 14 años hizo notables contribuciones en Matemáticas, Física y Astronomía.