

38. Verifique que para $m \geq 0$,

$$P_n^m \equiv (1 - z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z),$$

satisface la ecuación asociada de Legendre.

39 Para $-n \leq m \leq n$ las funciones asociadas de Legendre están definidas por medio de la formula de Rodrigues,

$$(1) \quad P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2 - 1)^n.$$

a) Demuestre que los P_n^m así definidos satisfacen la ecuación asociada de Legendre.

b) Demuestre que

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x).$$

c) Demuestre que la función generatriz de las funciones asociadas de Legendre es

$$\frac{(2m)!(1-x^2)^{m/2}}{2^m m! (1-2tx+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{s=0}^{\infty} P_{s+m}^m(x) t^s.$$

y a partir de ella, encuentre algunas relaciones de recurrencia para las funciones asociadas de Legendre.

d) *Paridad*: demuestre que

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^m(x).$$

e) A partir de la formula de Rodrigues o de la función generatriz, encuentre la normalización de las funciones asociadas de Legendre discutida en clase.

f) Encuentre $P_n^n(\cos \theta)$.

40. Encuentre la solución de la ecuación de Laplace en el hemisferio $0 \leq r < a$, $0 < \theta < \pi/2$, que satisface las condiciones de borde $u(r, \pi/2) = 0$, para $0 < r < a$ y $u(a, \theta) = 1$ para $0 < \theta < \pi/2$.

41. Encuentre la solución de la ecuación de Laplace fuera de la esfera de radio a , y que satisface la condición de borde $u(a, \theta, \varphi) = \text{sen}\theta \cos \varphi + \text{sen}^2\theta \text{sen}2\varphi$.

42. *Teorema de Adición de los Esféricos Armónicos* Sean (θ_1, φ_1) y (θ_2, φ_2) las coordenadas de dos puntos sobre S^2 . Sea γ el ángulo que forman los vectores que van desde el centro de la esfera a estos dos puntos, i.e.,

$$\cos \gamma = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Demuestre que

$$P_n(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^{m=n} (-1)^m Y_n^m(\theta_1, \varphi_1) Y_n^{-m}(\theta_2, \varphi_2).$$

©Rafael Benguria D., 2001