Facultad de Física, P. Universidad Católica de Chile
FIZ–2520: Métodos Matemáticos de la Física II
Curso: R. Benguria, Semestre Primavera 2001
Tarea # 7
Fecha de Entrega: Jueves 17 de mayo, 2001.

38. Verifique que para $m \geq 0$,

$$P_n^m \equiv (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z),$$

satisface la ecuación asociada de Legendre.
39 Para $-n \leq m \leq n$ las funciones asociadas de Legendre están definidas por medio de la formula de Rodrigues,

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n. \tag{1}$$

a) Demuestre que los P_n^m así definidos satisfacen la ecuación asociada de Legendre.

b) Demuestre que

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x).$$

c) Demuestre que ls función generatriz de las funciones asociadas de Legendre es

$$\frac{(2m)!(1-x^2)^{m/2}}{2^m m!(1-2tx+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{s=0}^{\infty} P_{s+m}^m(x) t^s.$$

y a partir de ella, encuentre algunas relaciones de recurrencia para las funciones asociadas de Legendre.

d) *Paridad:* demuestre que

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^{+m}(x).$$

e) A partir de la formula de Rodrigues o de la función generatriz, encuentre la normalización de las funciones asociadas de Legendre discutida en clase.

f) Encuentre $P_n^n(\cos\theta)$.

40. Encuentre la solución de la ecuación de Laplace en el hemisferio $0 \leq r < a$, $0 < \theta < \pi/2$, que satisface las condiciones de borde $u(r, \pi/2) = 0$, para $0 < r < a$ y $u(a, \theta) = 1$ para $0 < \theta < \pi/2$.

41. Encuentre la solución de la ecuación de Laplace fuera de la esfera de radio a, y que satisface la condición de borde $u(a,\theta,\varphi) = \text{sen}\theta\cos\varphi + \text{sen}^2\theta\text{sen}2\varphi$.

42. *Teorema de Adición de los Esféricos Armónicos* Sean (θ_1,φ_1) y (θ_2,φ_2) las coordenadas de dos puntos sobre S^2. Sea γ el ángulo que forman los vectores que van desde el centro de la esfera a estos dos puntos, i.e.,

$$\cos\gamma = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2).$$

Demuestre que

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2n+1}\sum_{m=-n}^{m=n}(-1)^m Y_n^m(\theta_1,\varphi_1)Y_n^{-m}(\theta_2,\varphi_2).$$